

国防科工委“十五”规划教材.航空宇航科学与技术

航空飞行器飞行动力学

方振平　陈万春　张曙光　编著

北京航空航天大学出版社

北京理工大学出版社　西北工业大学出版社
哈尔滨工业大学出版社　哈尔滨工程大学出版社

内容简介

本书系统地介绍航空飞行器(飞机、有翼导弹)的飞行动力学特性,内容结合工程实际,反映现代飞行动力学的一些新现象、新特点。全书分两大部分。前5章着重分析飞行器质心运动规律,确定飞机的基本飞行性能、机动性能、敏捷性和导弹的轨迹特性。后7章着重分析刚性飞行器的运动特性,讨论飞行器的平衡、静稳定性和静操纵性、动稳定性和动操纵性;飞行器+自动器系统动力学特性;飞机飞行品质和导弹命中准确度分析等。

本书可作为飞行器设计专业大学本科生的教材,对于飞行器设计和使用部分的工程技术人员也有参考价值。

图书在版编目(CIP)数据

航空飞行器飞行动力学/方振平等编著.—北京:北京航空航天大学出版社,2005.11

ISBN 978-7-81077-670-7

Ⅰ.航… Ⅱ.方… Ⅲ.航空器—飞行力学
Ⅳ.V212.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第086352号

航空飞行器飞行动力学

方振平 陈万春 张曙光 编著
责任编辑 刘晓明
北京航空航天大学出版社出版发行
北京市海淀区学院路37号(100083)
发行部电话:010-82317024 传真:010-82328026
http://www.buaapress.com.cn E-mail:bhpress@263.net
涿州市新华印刷有限公司印装 各地书店经销

*

开本:787×960 1/16
印张:28 字数:627千字
2005年11月第1版 2010年2月第2次印刷
印数:3 001~5 000册
ISBN 978-7-81077-670-7 定价:56.00元

国防科工委“十五”规划教材编委会

（按姓氏笔画排序）



总　　序

国防科技工业是国家战略性产业，是国防现代化的重要工业和技术基础，也是国民经济发展和科学技术现代化的重要推动力量。半个多世纪以来，在党中央、国务院的正确领导和亲切关怀下，国防科技工业广大干部职工在知识的传承、科技的攀登与时代的洗礼中，取得了举世瞩目的辉煌成就；研制、生产了大量武器装备，满足了我军由单一陆军，发展成为包括空军、海军、第二炮兵和其他技术兵种在内的合成军队的需要，特别是在尖端技术方面，成功地掌握了原子弹、氢弹、洲际导弹、人造卫星和核潜艇技术，使我军拥有了一批克敌制胜的高技术武器装备，使我国成为世界上少数几个独立掌握核技术和外层空间技术的国家之一。国防科技工业沿着独立自主、自力更生的发展道路，建立了专业门类基本齐全，科研、试验、生产手段基本配套的国防科技工业体系，奠定了进行国防现代化建设最重要的物质基础；掌握了大量新技术、新工艺，研制了许多新设备、新材料，以“两弹一星”、“神舟”号载人航天为代表的国防尖端技术，大大提高了国家的科技水平和竞争力，使中国在世界高科技领域占有了一席之地。十一届三中全会以来，伴随着改革开放的伟大实践，国防科技工业适时地实行战略转移，大量军工技术转向民用，为发展国民经济做出了重要贡献。

国防科技工业是知识密集型产业，国防科技工业发展中的一切问题归根到底都是人才问题。50多年来，国防科技工业培养和造就了一支以“两弹一星”元勋为代表的优秀的科技人才队伍，他们具有强烈的爱国主义思想和艰苦奋斗、无私奉献的精神，勇挑重担，敢于攻关，为攀登国防科技高峰进行了创造性劳动，成为推动我国科技进步的重要力量。面向新世纪的机遇与挑战，高等院校在培养国防科技人才，传播国防科技新知识、新思想，攻克国防基础科研和高技术研究难题当中，具有不可替代的



作用。国防科工委高度重视，积极探索，锐意改革，大力推进国防科技教育特别是高等教育事业的发展。

高等院校国防特色专业教材及专著是国防科技人才培养当中重要的知识载体和教学工具，但受种种客观因素的影响，现有的教材与专著整体上已落后于当今国防科技的发展水平，不适应国防现代化的形势要求，对国防科技高层次人才的培养造成了相当不利的影响。为尽快改变这种状况，建立起质量上乘、品种齐全、特点突出、适应当代国防科技发展的国防特色专业教材体系，国防科工委全额资助编写、出版200种国防特色专业重点教材和专著。为保证教材及专著的质量，在广泛动员全国相关专业领域的专家、学者竞投编著工作的基础上，以陈懋章、王泽山、陈一坚院士为代表的100多位专家、学者，对经各单位精选的近550种教材和专著进行了严格的评审，评选出近200种教材和学术专著，覆盖航空宇航科学与技术、控制科学与工程、仪器科学与技术、信息与通信技术、电子科学与技术、力学、材料科学与工程、机械工程、电气工程、兵器科学与技术、船舶与海洋工程、动力机械及工程热物理、光学工程、化学工程与技术、核科学与技术等学科领域。一批长期从事国防特色学科教学和科研工作的两院院士、资深专家和一线教师成为编著者，他们分别来自清华大学、北京航空航天大学、北京理工大学、华北工学院、沈阳航空工业学院、哈尔滨工业大学、哈尔滨工程大学、上海交通大学、南京航空航天大学、南京理工大学、苏州大学、华东船舶工业学院、东华理工学院、电子科技大学、西南交通大学、西北工业大学、西安交通大学等，具有较为广泛的代表性。在全面振兴国防科技工业的伟大事业中，国防特色专业重点教材和专著的出版，将为国防科技创新人才的培养起到积极的促进作用。

党的十六大提出，进入21世纪，我国进入了全面建设小康社会、加快推进社会主义现代化的新的发展阶段。全面建设小康社会的宏伟目标，对国防科技工业发展提出了新的更高的要求。推动经济与社会发展，提升国防实力，需



要造就宏大的人才队伍，而教育是奠基的柱石。全面振兴国防科技工业必须始终把发展作为第一要务，落实科教兴国和人才强国战略，推动国防科技工业走新型工业化道路，加快国防科技工业科技创新步伐。国防科技工业为有志青年展示才华，实现志向，提供了缤纷的舞台，希望广大青年学子刻苦学习科学文化知识，树立正确的世界观、人生观、价值观，努力担当起振兴国防科技工业、振兴中华的历史重任，创造出无愧于祖国和人民的业绩。祖国的未来无限美好，国防科技工业的明天将再创辉煌。

张华祝



前　言

本书是为飞行器设计专业本科生编写的教材，也可作为航空飞行器设计单位、工厂和部队从事飞行力学研究工作的科研人员的参考书。

飞行动力学是应用力学的一个分支，是研究飞行器在大气层内运动规律的学科，是以空气动力学、刚体力学、结构力学、控制理论和计算数学等作为主要理论基础，对飞行器动力学特性进行综合的学科。它是直接为飞行器设计和使用服务的。

由于涉及的研究对象不同，所研究的飞行动力学问题性质也不完全相同，因而有飞机飞行动力学、直升机飞行动力学和导弹飞行动力学等研究学科。这里考虑飞机和有翼导弹运动原理是基本相同的；目前航空技术的发展，飞机自动化飞行程度的提高，面对称导弹机动能力的发展，使这类飞行器特点更趋接近，故合在一起编写，书名取为《航空飞行器飞行动力学》。当然对于两者相异的一些特点，则另立章节单独予以介绍。

根据教材编写宗旨，对于本科生教材，仍然本着“少而精”的原则，以基础知识和基本原理为主，结合工程实践，突出重点。同时，增加因采用新气动布局、先进的飞控技术给飞行器动力学特性带来新变化、新特点的内容，以扩充知识面，适应航空事业发展需要。其中有一小部分内容，是为实施因材施教，满足不同学生要求而编入的，可不作为必读内容。

全书分两大部分。前 5 章为第一部分，着重分析在已知外力作用下飞行器质心的运动规律，即确定飞行器的性能和轨迹特性。这类问题常将飞行器作为一可操纵质点处理。其中第 1 章介绍作用在飞行器上的外力特性和飞行操纵原理；建立飞行器质心运动数学模型。第 2 章确定飞机的飞行性能，包括基本飞行性能、续航性能和起落性能等，并分析其主要影响因素。第 3 章研究飞机的非定常运动飞行性能，讨论飞机的机动性及其综合评价指标，介绍飞机的敏捷性及其评价尺度。第 4 章和第 5 章分别叙述方案飞行导弹和导引导弹的弹道特性，以及相应的弹道设计方法。

后 7 章为本书的第二部分，着重分析在外界扰动和操纵作用下飞行器的动力



学特性，即飞行器保持和改变飞行状态的能力，常称之为飞行器的稳定性和操纵性。这类问题必须考虑飞行器绕质心的转动运动，需将飞行器作质点系——刚体或弹性体来处理。其中第6章建立刚性飞行器运动数学模型，是研究后面章节内容的基础。第7章和第8章分别介绍作用在飞行器上纵向、横侧向的外力矩，讨论飞行器定常飞行平衡特性、静稳定性和静操纵性。第9章和第10章则分别讨论飞机固有的纵、横向模态特性，飞控系统的功能和效果，纵、横向飞行品质指标等。第11章介绍飞机空间运动中各类非线性耦合因素，典型非线性运动机理、稳定判据及相应的飞控系统。第12章探讨导弹的动态特性，包括导弹的固有特性，倾斜、俯仰稳定回路特性，导弹控制回路特性和命中准确度分析等。

全书由三位作者共同编写，第1～3章和6～8章由方振平执笔；第4,5,12章由陈万春执笔；第9～11章由张曙光执笔。最后统稿由方振平完成。

限于作者水平，书中出现的不妥和错误之处，欢迎读者批评指正，以使本书逐步完善。

目　　录





第9章 飞机的纵向稳定性和操纵性

第10章 飞机的横航向稳定性和操纵性





第 1 章　飞行器质心运动方程

研究飞行器性能、飞行轨迹特性时，常将飞行器视作一可控质心处理。可控的意思就是说飞行器的飞行轨迹是可以人为改变的，而轨迹的变化则决定于作用在飞行器上的外力。为此，本章首先介绍作用在飞行器上的外力，再引出建立飞行器质心运动用的坐标轴系，最后在选定的坐标轴系上建立描述飞行器质心运动的方程。

1.1　作用在飞行器上的外力

如图 1.1 所示，作用在飞行器上的外力有重力 **W**，推力 **T** 和气动力 **A**。通常气动力 **A** 由升力 L、阻力 D 和侧力 C 组成。这些外力除重力 **W** 外，一般不可能刚好通过飞行器质心，于是会产生绕质心的力矩，即俯仰方向旋转力矩 M、偏航方向旋转力矩 N 和滚转方向旋转力矩 L。但在研究飞行器性能和飞行轨迹特性时，可以认为通过偏转操纵机构能够消除这些力矩；换句话说，使作用在飞行器上的力矩始终保持平衡，则上述各外力将通过质心，构成汇交于飞行器质心的空间力系。

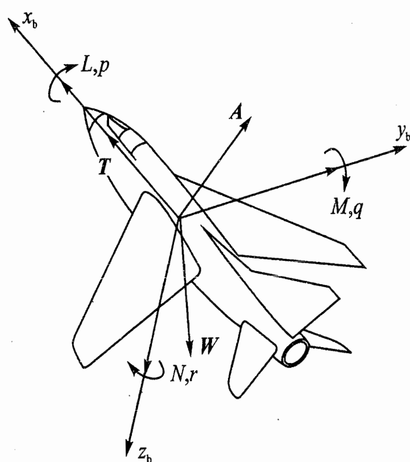


图 1.1　作用在飞行器上的外力和外力矩

1.1.1　升阻特性

由空气动力学可知，空气动力的一般公式可表示为

$$\left.\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_L \\ D &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D \\ C &= \frac{1}{2}\rho V^2 S C_C \end{aligned}\right\} \tag{1.1}$$

式中 C_L，C_D 和 C_C 分别为升力、阻力和侧力系数。其值主要取决于马赫数 Ma、雷诺数 Re、迎角 α、侧滑角 β 以及飞行器的外形。对于轴对称飞行器讲，侧力特性与升力特性是相同的；对于面对称飞行器讲，侧力只在飞行器有侧滑飞行时才产生，一般来说 β 角较小。故下面着重讨论升

力和阻力的特性。

1. 升力特性

在给定飞行状态下，飞行器的升力由机翼(弹翼)、机身、平尾和舵面产生。升力系数可表示为

$$C_L = C_{L.\mathrm{wb}} + C_{L.\mathrm{ht}} + C_{L.\delta}$$

式中 $C_{L.\mathrm{wb}}$为翼身组合体升力系数；$C_{L.\mathrm{ht}}$为平尾升力系数；$C_{L.\delta}$为升降舵偏转产生的升力系数。对于有尾飞行器来讲，如舵面偏转产生的 $C_{L.\delta}$较小可以忽略的话，则为了便于分析，全机的升力系数在小迎角范围内可表示为

$$C_L = C_{L\alpha}(\alpha - \alpha_0) \tag{1.2}$$

式中 $C_{L\alpha}=\partial C_L/\partial\alpha$ 为全机升力系数斜率，是表征升力特性的一个重要气动参数，其值与飞行器气动外形(机翼、尾翼的平面形状，翼型，尾翼的相对位置等)和飞行马赫数有关，α_0 为零升迎角。图 1.2 为不同后掠角 χ 和展弦比 λ 的飞机，$C_{L\alpha}$随 Ma 的变化曲线。

表征升力特性的另一个重要气动参数是最大升力系数 $C_{L\max}$，与之对应的迎角称为临界迎角 α_c(见图 1.3)。$C_{L\max}$值与飞行器气动外形有很大关系。现代飞机为提高 $C_{L\max}$，采用的边条翼气动布局或近耦鸭式布局，均是利用边条翼或鸭翼产生的分离涡，形成对基本翼的有利干扰，在其外侧流场产生上洗和侧洗，增加了基本翼的有效迎角和侧滑角，加强了基本翼前缘涡强度；同时，分离涡流过基本翼时，增强了基本翼上附面层的能量，使其能克服较大的逆压梯度，从而延缓分离，提高了临界迎角 α_c 和 $C_{L\max}$。图 1.4 为边条翼气动布局增升的工作原理图。

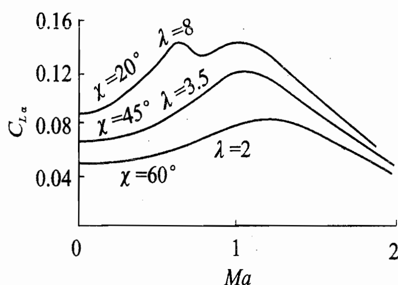


图 1.2 不同 χ 和 λ 时 $C_{L\alpha}$随 Ma 的变化曲线

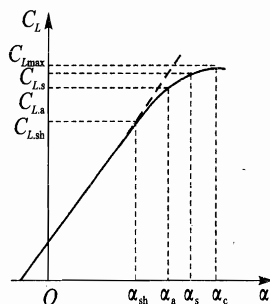


图 1.3 各类 C_L 限制示意图

但在实际飞行中，通常飞行器不会达到 α_c 或 $C_{L\max}$。这是因为在迎角达到 α_c 以前，由于机翼气流分离的发展，可能出现翼尖下坠或机头下俯等失速现象，甚至飞行器会丧失稳定性。此时相应的升力系数称为失速升力系数，以 $C_{L.s}$表示，它略比 $C_{L\max}$小一些。由此可见，为保证飞行安全，防止飞行器失速，还应规定一个允许飞行器达到的最大升力系数，称为允许升力系数，以 $C_{L.a}$表示。它比 $C_{L.s}$又小一些(见图 1.3)。

除此之外，还有一些升力系数会引起飞行器设计者、驾驶员的注意。大多数飞行器在接近失速迎角 α_s 前，由于机翼处于不稳定的气流分离区内，或者在超过临界马赫数后激波位置不



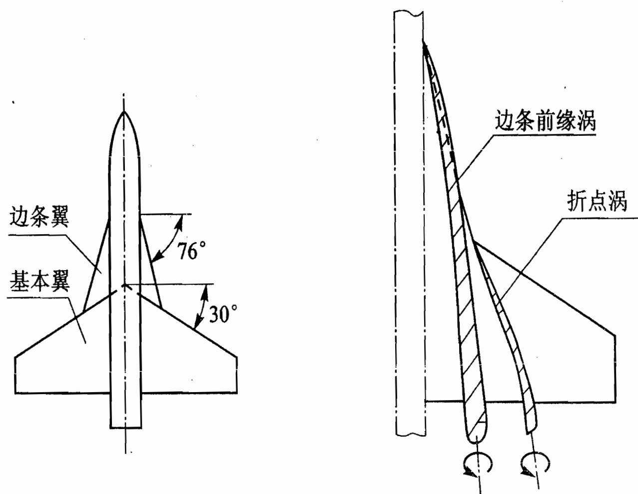


图 1.4　边条翼气动布局增升的工作原理

稳定，均会引起机翼不规则振动，这种现象称为机翼抖振。此时相应的升力系数称为抖振升力系数，以 $C_{L.sh}$表示，通常小于 $C_{L.s}$。一般情况下，这种抖振不会对飞行器构成威胁，短时间内也不会妨碍执行飞行任务。为此，不按开始出现抖动来限制 C_L的最大允许值，否则不利于飞行器潜能发挥。另外飞行器在超声速飞行时，由于舵面操纵效率降低，升力系数还要受到为保持俯仰平衡所需的舵面极限偏角 $\delta_{e.max}$限制，$C_{L\delta.max}$随 Ma 增加而减小。图 1.5 表示各种升力系数随马赫数变化的一般规律。

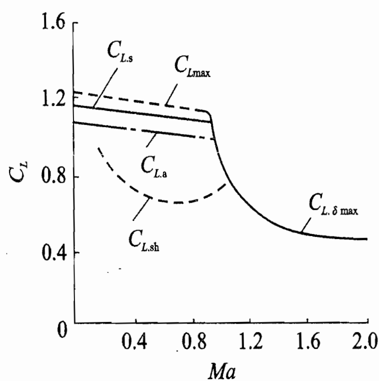


图 1.5　$C_{L.s}$，$C_{L.a}$，$C_{L.sh}$和 $C_{L.\delta max}$随 Ma 的变化曲线

对于一些机翼（或弹翼）与尾翼面积接近的飞行器，舵面偏转产生的 $C_{L.\delta}$将不可忽略，在计算飞行性能和轨迹特性时，可近似通过俯仰力矩平衡条件，求得舵偏角与迎角之间的关系，即

$$\delta_e = -\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta}}\alpha$$

式中 $C_{m\alpha}$，$C_{m\delta}$分别为俯仰力矩系数对迎角和舵偏角的导数，详细内容在第 7 章中介绍。在计及舵偏转引起的升力后得出的全机升力系数称为平衡升力系数，以 C_{L*} 表示。其相应表示式为

$$C_{L*} = C_{L\alpha \cdot *}(\alpha - \alpha_0) \tag{1.3}$$

显然，对于正常式布局飞行器，$C_{L\alpha\cdot *} < C_{L\alpha}$；而对于鸭式布局飞行器，$C_{L\alpha\cdot *} > C_{L\alpha}$，其零升迎角也稍有变化。

2. 阻力特性

飞行器的阻力按其产生原因和性质，可分为摩擦阻力、压差阻力、诱导阻力、干扰阻力和激



波阻力等。在飞行性能计算中,常把阻力分为两部分:一部分与升力无关的阻力称为零升阻力,另一部分由升力引起的阻力称为升致阻力。阻力系数表示式为

$$C_D = C_{D0} + C_{Di} = C_{D0} + AC_L^2 \tag{1.4}$$

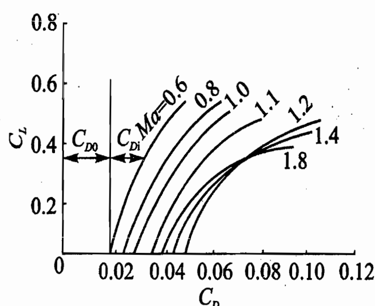


图 1.6 超声速飞机的极曲线

上式反映飞行器阻力系数与升力系数的关系,这种关系曲线称为飞行器的极曲线。其中 C_{D0} 为零升阻力系数,A 为升致阻力因子或称极曲线弯度系数,二者都是 Ma 和 Re 的函数。图 1.6 给出的是一架超声速飞机极曲线。从图上可见,Ma 小于 0.6,空气压缩性影响不明显。随着 Ma 增加,压缩性影响逐渐显著,波阻逐渐增加,曲线将向右移动。曲线上每一点对应着一个迎角 α。

图 1.7(a)为 C_{D0} 随 Ma 的变化曲线。亚声速时,C_{D0} 中主要是摩阻系数,它随 Ma 变化很小;跨声速时,由于波阻出现,使 C_{D0} 剧增;而在超声速以后,激波强度随 Ma 增加而减弱,波阻系数将随 Ma 增加而降低。

图 1.7(b)为 A 随 Ma 的变化曲线。亚声速时,升致阻力因子 A 与机翼有效展弦比 λ_e 成反比,即

$$A = \frac{1}{\pi\lambda_e} \tag{1.5}$$

对于小后掠机翼,λ_e 可近似按下式确定,即

$$\lambda_e = \frac{\lambda}{1 + S_b/S}$$

式中 λ 为机翼几何展弦比;S_b 为机身和发动机短舱所占据的机翼面积。

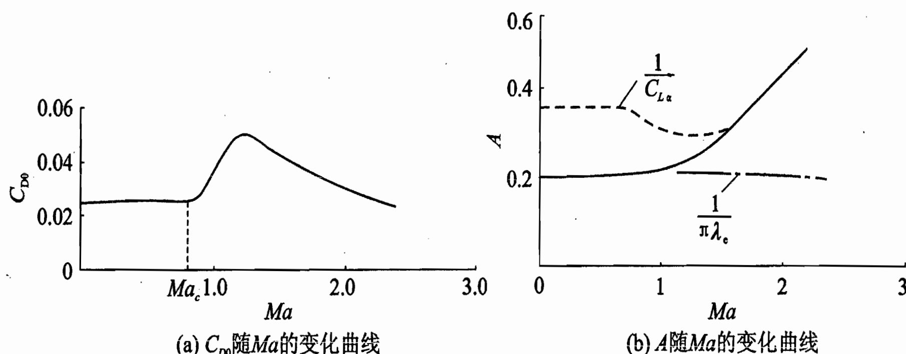


图 1.7 C_{D0} 和 A 随 Ma 的变化曲线

超声速时,对于钝头机翼,在亚声速前缘情况下,由于前缘吸力存在,A 值增加不多;而在超声速前缘情况下,前缘吸力消失,则



$$A \approx \frac{1}{C_{L\alpha}} = \frac{\sqrt{Ma^2 - 1}}{4} \tag{1.6}$$

故随着 Ma 的增加，曲线如图 1.7(b)中实线所示。如果机翼前缘不带弯度且尖锐，则在整个 Ma 范围内，$A=1/C_{L\alpha}$，其变化如图 1.7(b)中虚线所示。

飞行器的极曲线一般是按飞行器的基本构形给出的。构形改变，如增加外挂物，放下襟翼、起落架和减速板等，都应加上附加的升力系数和阻力系数增量。又由于极曲线常按某一基准高度(国内习惯上取 $H=5$ km)计算得出，故飞行高度改变，因 Re 的变化，应加上相应的阻力系数修正量 ΔC_{DH}。当需要计及舵面偏转产生的升力影响时，则采用平衡升力系数 C_{L*}，得出的极曲线称为飞行器平衡极曲线。

3. 升阻比

综合评定飞行器升阻特性的重要气动参数是飞行器的升阻比 K，即

$$K = \frac{C_L}{C_D} \tag{1.7}$$

它主要取决于飞行 Ma 和迎角 α。在 Ma 一定的曲线上，升阻比 K 即是纵坐标 C_L 和横坐标 C_D 之比(见图 1.8)。从坐标原点作极曲线的切线，切点处对应的升阻比最大，称为最大升阻比 K_{max}。与 K_{max} 状态相对应的迎角和升力系数分别称为有利迎角 α_{opt} 和有利升力系数 $C_{L.opt}$。

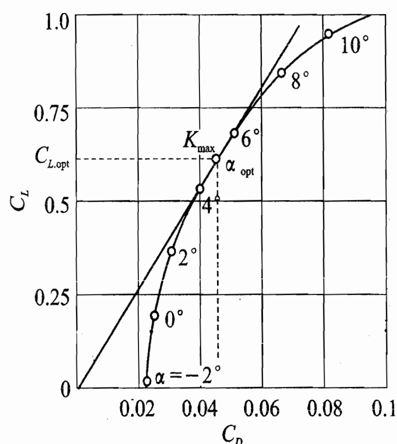


图 1.8　极曲线确定 K_{max}

根据极曲线表示式 (1.4)很容易确定 $C_{L.opt}$ 和 K_{max} 的表示式。先将式(1.7)写成倒数形式，得

$$\frac{1}{K} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{C_{D0}}{C_L} + AC_L$$

当 $K=K_{max}$ 时，C_D/C_L 最小。现将上式对 C_L 微分，并令其等于零，得

$$\frac{d}{dC_L}\left(\frac{C_D}{C_L}\right) = -\frac{C_{D0}}{C_L^2} + A = 0$$

即

$$C_{D0} = AC_{L.opt}^2 \tag{1.8}$$

可见，在最大升阻比状态下，零升阻力系数等于升致阻力系数。于是可以得出

$$C_{L.opt} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{A}} \tag{1.9}$$

$$K_{max} = \frac{C_{L.opt}}{C_D} = \frac{1}{2\sqrt{AC_{D0}}} \tag{1.10}$$

由式(1.9)和式(1.10)可看出零升阻力系数变化对于 $C_{L.opt}$ 和 K_{max} 的影响。如取其对数再微分，则可得出其相对变化量的关系



$$\frac{dC_{L.opt}}{C_{L.opt}} = \frac{1}{2}\frac{dC_{D0}}{C_{D0}}$$

$$\frac{dK_{max}}{K_{max}} = -\frac{1}{2}\frac{dC_{D0}}{C_{D0}}$$

显然,若 C_{D0} 增加 20 %,则 K_{max} 减小 10 %,而 $C_{L.opt}$ 增大 10 %。

一般情况下,飞行器设计者总是希望 K_{max} 尽可能大些。从后面章节可以看到,它对提高飞机的续航性能及上升、下滑性能等是有利的。

1.1.2 发动机推力

航空用的发动机种类很多,目前使用较多的主要是喷气发动机。按其具体工作方式,大致可以分成两类:一类以大气中的氧作为氧化剂与燃料燃烧产生高温气体,称为空气喷气发动机,其中有涡轮喷气发动机、涡轮风扇发动机和涡轮螺桨发动机等;另一类不依赖大气中的氧,而是自身携带氧化剂和燃料,经燃烧产生高温气体,称为火箭发动机,其中有液体火箭发动机、固体火箭发动机等。但其喷气发动机的工作原理基本相同,均以燃气流高速向后喷出而产生的反作用力,即发动机推力,使飞机获得前进的动力。下面着重介绍涡轮喷气发动机的特性,其他发动机只简略介绍。

1. 涡轮喷气发动机

涡轮喷气发动机由压气机、燃烧室、涡轮和尾喷管等主要部件组成,如图 1.9 所示。

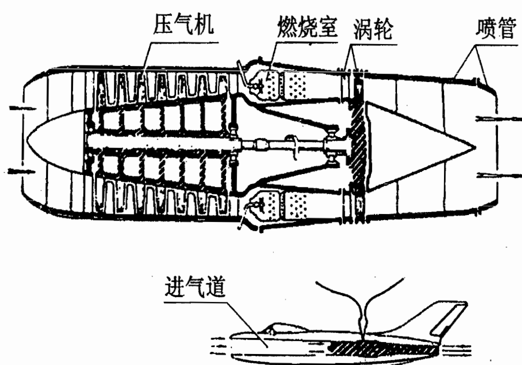


图 1.9 涡轮喷气发动机简图

当空气由进气道进入发动机后,空气流速降低,压力升高,再经压气机将空气压力再提高几倍到数十倍,随即进入燃烧室与从喷嘴喷出的燃料掺混,经点火后燃烧,燃料的化学能转换为热能。高温气体膨胀驱动涡轮工作,高速旋转的涡轮带动压气机工作。经过涡轮后的燃气通过喷管以高速向后喷射而产生推力。

按照动量定理,在尾喷管完全膨胀的条件下,可导出推力 T 的表示式为

$$T = m'(V_j - V_i) \tag{1.11}$$

式中 T——推力(N);

m'——进入发动机的空气质量流量 ($kg \cdot s^{-1}$);

V_j——尾喷管喷出的气流速度 ($m \cdot s^{-1}$);

V_i——进入进气道的气流速度,即飞行速度($m \cdot s^{-1}$)。

显然,推力 T 是评价涡轮喷气发动机效率最主要的性能指标。其大小主要取决于空气质



量流量 m' 和喷气流速度 V_j。而这些参数又与飞行速度、飞行高度和发动机转速有关。

涡轮喷气发动机另一个性能指标是耗油率 c_f，用每牛顿推力在 1 h 内所消耗的燃油质量来衡量[$kg \cdot (N \cdot h)^{-1}$]。它反映发动机的经济性。耗油率 c_f 也与发动机转速和飞行状态有关。

涡轮喷气发动机还有一个性能指标是推重比 γ_{TW}，即发动机推力（地面最大工作状态）和其结构重量之比。它反映发动机设计、材料和工艺水平的综合性。推重比大，则有利于提高飞行器的飞行性能。

(1) 涡轮喷气发动机工作状态

实际飞行过程中，发动机转速将随飞行状态的变化而改变。根据飞行状态不同，涡轮喷气发动机通常有以下几种工作状态。

1) 加力状态

在加力状态时加力燃烧室喷嘴喷出补充燃料，燃烧后进一步提高燃气温度，增加喷气速度，从而增大发动机推力。一般来说，使用加力状态后，推力大约可增加 25 %。飞机在起飞时为缩短滑跑距离，加速爬升时为缩短时间，均使用这种工作状态。但为了避免发动机损坏，连续使用加力工作时间有限制。如某发动机使用加力状态规定：飞行高度小于 6 000 m 时，不允许超过 6 min；飞行高度大于 6 000 m 时，不允许超过 10 min。

2) 最大状态

最大状态是发动机处于最大许用转速下的工作状态。此时发动机发出的推力，仅次于加力状态，是非加力状态下最大的推力；连续工作时间也受到限制。飞机在起飞、上升和平飞加速时，都使用这种工作状态。

3) 额定状态

额定状态是发动机处于额定转速（约比最大许用转速小 3 %）下的工作状态。此时推力通常是最大工作状态推力的 85 %～90 %。额定工作状态可以较长时间（为 0.5～1 h）连续工作，在飞行中常用于较长时间的平飞和上升。

4) 巡航状态

巡航状态是发动机转速约为额定转速的 90 %的工作状态。相应的推力约为额定状态的 80 %，耗油率最小，连续工作时间不限。这种状态常用于飞机作巡航飞行。

5) 慢车状态

慢车状态是发动机转速约为额定转速的 30 %的工作状态。推力很小，为最大推力的 3 %～5 %。飞机下滑着陆时常用此种状态。连续工作时间一般不允许超过 10～15 min。

(2) 涡轮喷气发动机特性

涡轮喷气发动机的性能指标推力 T 和耗油率 c_f 等均随飞行状态、发动机工作状态而改变。下面将简要介绍这些变化规律，即发动机的特性曲线，以供研究飞行性能时使用。



1）转速（油门）特性

在给定调节规律下，高度和速度一定时，发动机推力和耗油率随转速的变化关系，称为转速特性。图1.10为某涡轮喷气发动机 T 和 c_f 随转速 n 的变化曲线。可以看出，随着转速的增加，进入发动机的空气质量流量 m' 和尾喷管的喷流速度 V_j 都增加，故使推力迅速增加。试验表明，推力 T 大致与转速 n 的三次方成正比变化。

耗油率 c_f 则由于空气流量增加，使发动机每小时的耗油量增大；而发动机推力 T 则以更快的速度增加，因此单位推力在1 h内的耗油量即 c_f 将不断减小。而在某一转速时 c_f 达到最小值，这个转速称为巡航转速。超过巡航转速后，继续增加转速，此时耗油量增加较多，故 c_f 又会稍微增加。

由于一定转速对应一定油门位置，故转速特性又称油门特性或节流特性。

2）速度特性

在给定调节规律下，高度和转速一定时，发动机推力和耗油率随飞行速度或 Ma 的变化关系，称为速度特性。图1.11为某涡轮喷气发动机 T 和 c_f 随 Ma 变化曲线。

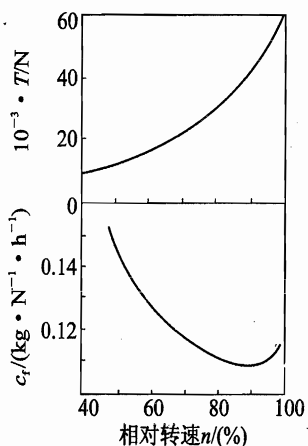


图1.10　涡轮喷气发动机的转速特性曲线

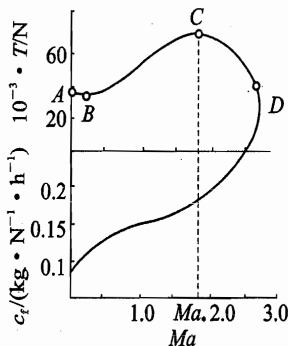


图1.11　涡轮喷气发动机速度特性曲线

可以看出，推力 T 开始略有下降，然后增加，再迅速下降。其原因从推力公式（1.11）可见，开始时飞行速度很小，气流在压气机前冲压效果不大，进入发动机的空气质量 m' 和喷流速度 V_j 都没有很大变化，但由于飞行速度 V_i 逐渐加大，(V_j-V_i) 之值减小，推力 T 随速度增加将稍有下降。随着飞行速度不断增大，m' 和 V_j 值的增加也逐渐显著，推力 T 值在一定速度后随飞行速度增加而增大。当飞行速度增至超声速的某个 Ma 时，发动机推力达到最大值。如飞行速度继续增加，则因冲压作用过大，使进入压气机的空气温度升高。为了使涡轮不致过热，这时不得不降低燃油和空气混合比，使涡轮前的燃气温度不致过高，这样就限制了 V_j 增大，差值 (V_j-V_i) 大大降低，才导致推力随速度增加而减小。

耗油率 c_f 随飞行速度增加而增大。其原因是 c_f 的大小与空气质量流量 m' 成正比变化，而



与推力 T 成反比变化。开始时，随着速度增加，m'的增加使燃油消耗量相应增大，而推力又减小，结果 c_f迅速增加；从亚声速进入超声速的一段范围内，随着速度增加，m'和 T 都呈增长趋势，但 T 比 m'增加得慢一些，故 c_f增加的程度减缓；当 Ma 超过某值后，由于推力 T 急剧下降，c_f将迅速增大。

3）高度特性

在发动机转速和飞行速度一定时，发动机推力和耗油率随飞行高度的变化关系，称为高度特性。图 1.12 为某涡轮喷气发动机的 T 和 c_f随 H 的变化曲线。

由图 1.12 可见，在对流层（$H<11$ km）内，高度增加，空气密度减小，进入发动机的空气流量将减小，故推力 T 和耗油率 c_f均随高度增加而降低。在平流层内（$H\geqslant1.1$ km），则高度升高，空气密度减小，但空气温度保持不变，发动机增压比亦保持不变，故发动机推力 T 随高度增加而降低。耗油率 c_f主要受空气温度的影响，故不随高度变化而变化。

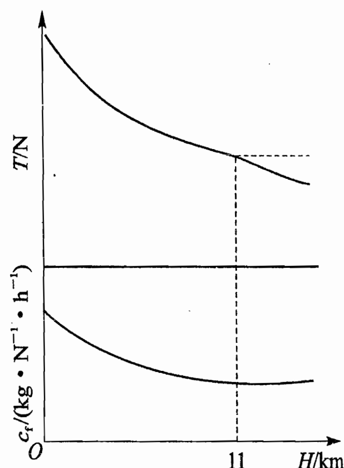


图 1.12　涡轮喷气发动机高度特性

2. 其他空气喷气发动机

（1）涡轮风扇发动机

涡轮风扇发动机的结构简图如图 1.13 所示。可见该型发动机是在涡轮喷气发动机的涡轮前面，再装上一个涡轮带动的风扇。风扇转动压缩空气，故该涡轮也称低压压气机。经过压缩的气流分成两股：外通道的一股气流平行流动，经喷口后加速排出，外通道也称外涵道；另一股气流与涡轮喷气发动机一样，经高压压气机、燃烧室和涡轮后由喷管排出。这种有内外二股气流的发动机，也称为内外涵发动机。外股与内股气流量之比称流量比或涵道比。两股气流可以分别从各自喷管排出，也可以在涡轮后混合，再一起喷出。

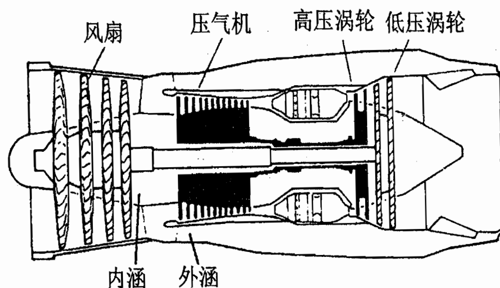


图 1.13　涡轮风扇发动机简图

涡轮风扇发动机由于风扇吸入大量空气，使进入发动机的空气流量增加，在同样内涵道涡轮温度条件下，显然推力可以增加。另外，外涵道不消耗燃料，出口喷气速度较小，故能量损失也较小，在产生同样推力的情况下，其耗油量较低。由于涡轮风扇发动机具有这些优点，加上排气速度减小，使噪声降低，故被民用机所采用。当内外涵气流分别排出时，涡轮风扇发动机推力可导出为

$$T=T_i+T_e=m_i'(V_{ij}-V_i)+m_e'(V_{ej}-V_i) \tag{1.12}$$



式中 T_i, T_e——内涵道和外涵道产生的推力(N)；

m_i', m_e'——内涵道和外涵道的空气质量流量 ($kg \cdot s^{-1}$)；

V_{ij}, V_{ej}——内涵道和外涵道的喷气速度($m \cdot s^{-1}$)。

当两股气流在喷管内混合后，再以同一速度喷出。此时发动机推力可仍按式(1.11)计算。

(2) 涡轮螺桨发动机

这类发动机是涡轮喷气发动机与螺旋桨的组合。可以直接用涡轮轴带动螺旋桨，中间加一个减速器以限制螺旋桨转速，如图 1.14 所示；也可以使用带动风扇的涡轮来带动螺旋桨。

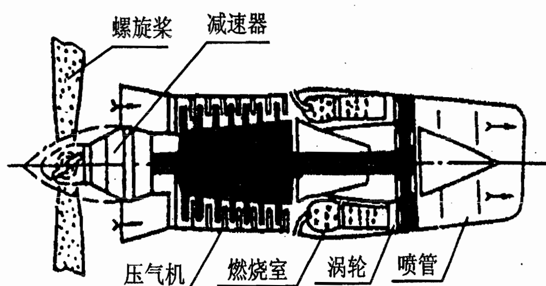


图 1.14 涡轮螺桨发动机简图

这种发动机的推力将由螺旋桨产生的拉力和喷气排气推力组成。一般由于尾喷管中压差小，喷气速度显著降低，故喷气推力部分仅占总推力的 10 %左右，主要的是拉力部分。为此涡轮螺桨发动机特性常用折算功率 P_c表示，可写成

$$P_c = P + TV/\eta \tag{1.13}$$

式中 P_c——折算功率(W)；

P——发动机的功率(W)；

T——喷气反作用产生的推力(N)；

V——飞行速度($m \cdot s^{-1}$)；

η——螺旋桨折算效率，近似取 0.8。

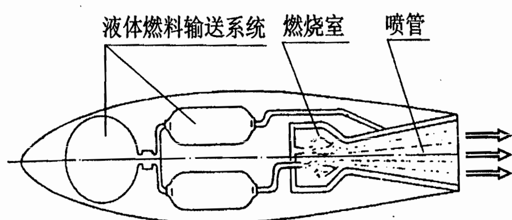
涡轮螺桨发动机仅适用于低亚声速(500～600 km/h)飞行的民用机，显出其耗油低，马力大，经济性好。但随着飞行速度增加，螺旋桨性能下降，经济性好的优点就不明显了。

3. 火箭发动机

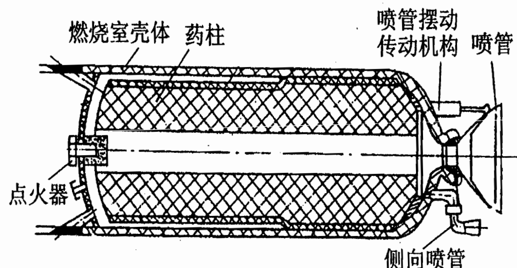
火箭发动机的特点是不需要大气中的氧气，本身自带氧化剂和燃烧剂，统称为推进剂。液体火箭发动机，其氧化剂和燃烧剂均为液体，经传输系统送至燃烧室，燃烧后产生高温燃气经喷管排出；而固体火箭发动机，则由一种或几种固体推进剂组成，制成药柱，直接充填在燃烧室，点火后产生高温燃气经喷管排出。图 1.15(a)为液体火箭发动机简图；图 1.15(b)为固体火箭发动机简图。

这类发动机常作为导弹的动力装置。如地-空导弹为使导弹在短时间内获得较大的加速度，很快离开发射装置，且在离开发射架后稳定飞行，在弹上装有助推器。这种助推器一般是





(a) 液体火箭发动机简图



(b) 固体火箭发动机简图

图 1.15　火箭发动机简图

固体火箭发动机，其工作时间短（最多只有几秒钟），推力大。助推器工作结束将自行脱落，以减少导弹重量，导弹主发动机随即开始工作，继续推动导弹运动。主发动机有用液体火箭发动机的，也有用固体火箭发动机的。

由上可知，无论是液体火箭发动机，还是固体火箭发动机，产生推力的原理是一样的。推进剂进入发动机时的速度为零，故推力公式可表示为

$$T = m_{\mathrm{p}}V_{\mathrm{j}} + A_{\mathrm{j}}(p_{\mathrm{j}} - p_0) \tag{1.14}$$

式中　m_{p}——推进剂的质量流量（$\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$）；

V_{j}——燃气流在喷管出口处的速度（$\mathrm{m \cdot s^{-1}}$）；

A_{j}——喷管出口处的面积（$\mathrm{m^2}$）；

p_{j}——喷管出口处燃气的静压（$\mathrm{N \cdot m^{-2}}$）；

p_0——喷管周围处大气静压（$\mathrm{N \cdot m^{-2}}$）。

可见，推力由 $m_{\mathrm{p}}V_{\mathrm{j}}$（即为燃气流的反作用力）和 $A_{\mathrm{j}}(p_{\mathrm{j}}-p_0)$（即为静压力）组成。随着飞行高度增加，$p_0$ 逐渐减小，则推力略有增加。

4. 发动机的可用推力

前面介绍的发动机推力特性是指发动机在试车台上测得的所谓台架特性。当发动机安装在飞行器上时，由于需要连接进气道和排气管道，以及带动其他附件，会产生一定的推力损失。因此作用于飞行器上的发动机推力将小于台架推力 T_i。将扣除推力损失后实际用于推动飞行器前进的推力，称为发动机的可用推力 T_{a}。它与台架推力 T_i 之间的关系可表示为

$$T_{\mathrm{a}} = i\eta T_i \tag{1.15}$$

式中 i 为安装在飞行器上发动机台数；η 为计及各种推力损失的有效系数。其值取决于发动机在飞机上的安装部位、进气和排气形式以及飞行状态等因素，一般由试验确定。

图 1.16 为装有涡轮喷气发动机的飞行器可用推力 T_{a} 随飞行马赫数 Ma 和飞行高度 H 的变化规律。图中纵坐标 $(T/T_0)_{\mathrm{a}}$ 表示相对于 $H=0$ 时的可用推力比值。



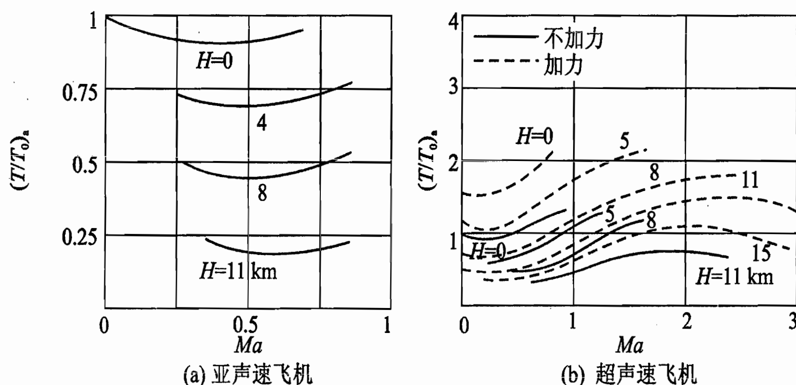


图 1.16　涡轮喷气发动机可用推力曲线

1.2　飞行器飞行操纵概念

飞行器在空中的运动，从力学的观点看决定于作用在飞行器上的外力。为实现飞行器的某些运动规律，如要求导弹按一定的导引规律飞向目标，并准确地命中目标；又如要求驾驶飞机接近目标、跟踪目标等，就必须改变作用在飞行器的力。从前面介绍的作用在飞行器上的外力可知，重力 W 作用虽能引起轨迹变化，但其方向始终指向地心，不能人为改变，故称为不可控力。余下的气动力 $\boldsymbol{A}$ 和推力 $\boldsymbol{T}$，是可以通过驾驶员或/和各类飞控系统（简称为自动器）操纵改变的，从而改变其飞行轨迹。故将这些力合成为 $\boldsymbol{N}$，称为可控力，表示成

$$\boldsymbol{N}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{T}=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{D}+\boldsymbol{C}+\boldsymbol{T} \tag{1.16}$$

合力 $\boldsymbol{N}$ 可以沿飞行速度方向和垂直速度方向分解为

$$\left.\begin{aligned} N_n &= A_n + T_n, \qquad \boldsymbol{A}_n=\boldsymbol{L}+\boldsymbol{C} \\ N_\tau &= A_\tau + T_\tau = D + T_\tau \end{aligned}\right\} \tag{1.17}$$

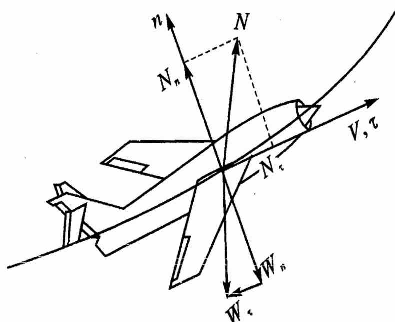


图 1.17　飞行器的可控法向力和切向力

N_n和 N_τ 分别称为可控法向力和可控切向力。显然前者可以用来改变飞行器飞行速度方向；后者可以用来改变飞行速度大小（见图 1.17）。

如将重力 W 亦沿飞行速度方向和垂直速度方向分解为 W_n 和 W_τ，那么，当 $W_n=N_n$，且 $W_\tau=N_\tau$ 时，则飞行处于平衡状态，飞行器将作等速直线飞行。若 $N_\tau>W_\tau$，飞行器将作加速直线飞行；若 $N_\tau<W_\tau$，飞行器将作减速直线飞行。当 $W_\tau=N_\tau$ 时，若 $N_n>W_n$，飞行器将向上方弯曲飞行；若 $N_n<W_n$，飞行器将向下方弯曲飞行。

下面将按飞行器的类型简单介绍可控力形成的基本原理。



1.2.1　常规飞机的飞行操纵

这里指的常规飞机通常由机翼、机身和尾翼组成，且有一个纵向对称平面，即飞机左右构形对纵平面基本对称，故属于面对称飞行器。其操纵机构为升降舵、方向舵、副翼和油门杆。

此时可控切向力的操纵可以通过油门杆调节发动机油门或反推力装置来改变推力切向分量 T_τ，或打开减速板增加阻力 D，来达到增减飞行速度大小的目的。

可控法向力的控制，常通过操纵升降舵，改变飞机的俯仰姿态，形成迎角 α 变化，从而改变升力 L 的大小和方向，引起垂直方向的轨迹变化；通过操纵副翼，则可改变飞机倾斜姿态，形成倾斜角 ϕ 变化，造成升力方向的改变，其水平分力的作用，使飞机水平方向轨迹发生变化；通过操纵方向舵，会引起飞机的偏航姿态改变，形成侧滑角 β 变化，从而产生侧力 C，同样可以引起水平方向的轨迹变化。但一般来说，用方向舵来改变水平方向航迹的效果较差。同时操纵升降舵、方向舵和副翼，则升力和侧力同时变化，从而可以实现飞机在空间任何方向的操纵（见图 1.18）。

从以上分析可知，常规飞机的飞行操纵特点是飞行轨迹的操纵必须通过姿态操纵来实现。

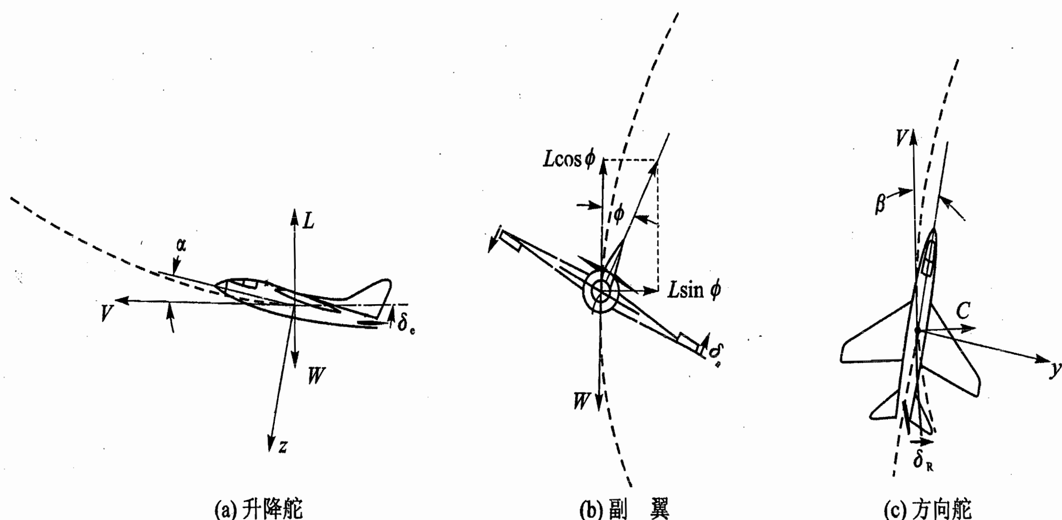


图 1.18　常规飞机飞行操纵原理

1.2.2　现代飞机的飞行操纵

现代飞机除了具有常规飞机的飞行操纵特点外，还可以利用发动机喷流转向产生推力分量，直接形成推力法向分量 T_n。若推力矢量不通过质心，还将改变飞机姿态，起到常规飞机升降舵和方向舵的操纵作用，改变法向力 L，C。由于其受外界气流影响比气动舵面要小，故适用于大迎角时的飞行操纵。

推力矢量的控制是通过喷管转向来实现的。目前采用的推力矢量喷管有二元收敛-扩散



喷管和三元轴对称喷管，如图 1.19 所示。喷管上下摆动，可实现俯仰操纵；喷管左右摆动，可实现偏航操纵。如在喷管出口处安装一些可以转动的舵面，常称为燃气舵，在喷流作用下，这些舵也可起到空气舵的作用。

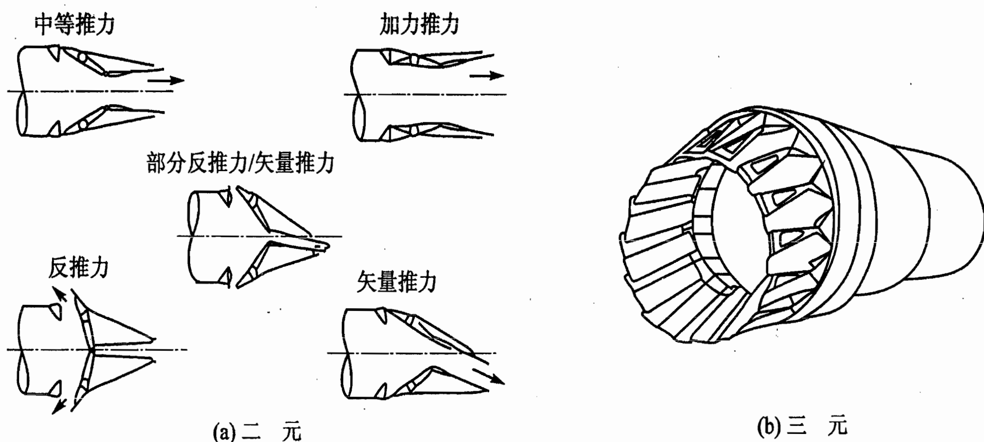


图 1.19　推力矢量操纵机构简图

现代飞机飞行操纵的另一个特点是，采用附加操纵面（如襟翼、垂直鸭翼等）与常规舵面协调操纵，以达到不改变飞机姿态，就可产生空间任何方向的法向力，改变飞行轨迹的目的；或者达到只改变飞机姿态，而不改变飞行轨迹的目的。这就实现了飞机姿态和轨迹运动之间的解耦，轨迹和姿态可以独立地控制。这种技术称为直接力飞行控制。

垂直方向的直接力控制，最常见的是通过襟翼和升降舵协调操纵。当襟翼偏转产生的绕质心的俯仰力矩由升降舵相应偏转来平衡，飞机上仅剩下附加升力 ΔL 时，飞机将在空中姿态不变的情况下，上下平移飞行，见图 1.20(a)；当升降舵偏转产生的升力由襟翼相应偏转来平衡，飞机上仅剩下附加的俯仰力矩时，飞机将沿原轨迹俯仰转动，见图 1.20(b)。不同襟翼和升降舵的操纵组合，就可实现各种各样的姿态和轨迹的组合运动。

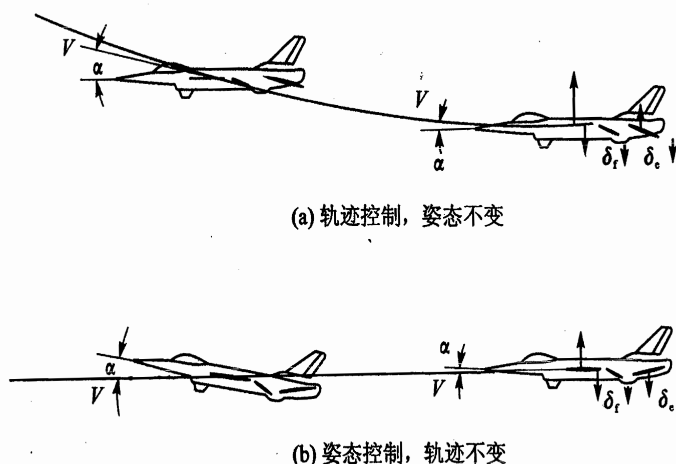
水平方向的直接力控制，则需要机头上安置垂直鸭翼。同样原理，当同时偏转垂直鸭翼和横侧向舵面使其横侧力矩平衡，仅剩下侧力 C 时，即可实现飞机在空中姿态不变的侧向平移飞行；当同时偏转垂直鸭翼和横侧舵面使其侧力平衡，仅剩下偏航力矩时，则可实现飞机沿原轨迹的偏航运动等。

显然，采用推力矢量控制和直接力控制技术后，可以大大提高飞机在空中的机动性和敏捷性。这将在第 3 章讲述。

1.2.3　导弹的飞行操纵

有翼导弹的外形大致可以分成两类，即面对称导弹和轴对称导弹。面对称导弹的飞行操纵与飞机非常类似，不再重复。轴对称导弹的构形特点是，其导弹上每一部分相对弹体纵轴均





(a) 轨迹控制，姿态不变

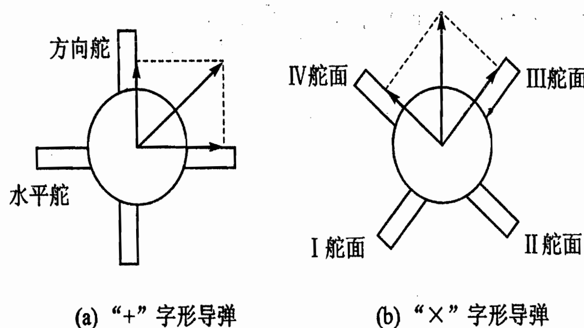
(b) 姿态控制，轨迹不变

图 1.20　垂直方向直接力控制原理

匀对称，通常由两对弹翼、两对全动舵面和弹身组成。弹翼和舵面沿弹身周围均匀分布，在空中可呈“＋”字形或“×”字形，决定于发射、挂置和操纵等条件。

对于舵面按“＋”字形布局的导弹，偏转水平舵改变导弹的俯仰姿态，形成迎角，从而改变升力的大小和方向；通过偏转方向舵，改变导弹的偏航姿态，形成侧滑角，使侧向力大小和方向发生变化。同时偏转水平舵和方向舵，则可产生导引导弹至空间的任何方向的法向力，如图 1.21(a)所示。当两侧舵面反向偏转，舵面起副翼作用时，其操纵目的只是保持滚转姿态稳定，即保持“＋”字在空中不变，以实现水平舵和方向舵的正常操纵，同时也可简化飞控系统。

对于舵面按“×”字形布局的导弹，这里将其编号，如图 1.21(b)所示。偏转Ⅰ，Ⅲ舵面，导弹在Ⅱ～Ⅳ舵面方向上产生法向力；偏转Ⅱ，Ⅳ舵面，导弹在Ⅰ～Ⅲ舵面方向产生法向力。



(a) “+” 字形导弹　　(b) “×” 字形导弹

图 1.21　导弹的飞行操纵原理

显然，同时偏转两对舵面，可以产生导引导弹至空间任何方向的法向力。同样，为保持导弹的正常操纵，要求导弹滚转姿态保持稳定，即可保持导弹在空中“×”字形不变。这可通过两侧舵面反向偏转实现。

1.3 常用的坐标轴系及其转换

在建立飞行器运动方程时，为了确定相对位置、速度、加速度和外力矢量的分量，必须引入多种坐标轴系。常用坐标轴系均采用右手直角坐标系。

1.3.1 常用的坐标轴系

1. 地面坐标系 $O_g x_g y_g z_g$

地面坐标系是固定在地球表面的一种坐标系。原点 O_g 位于地面任意选定的某固定点（例如飞机起飞点、导弹发射点）；$O_g x_g$ 轴指向地平面某任意选定方向；$O_g z_g$ 轴铅垂向下；$O_g y_g$ 轴垂直 $O_g x_g z_g$ 平面，按右手定则确定。

在许多飞行器动力学问题中，可以忽略地球自转和地球质心的曲线运动，于是该坐标系可看成惯性坐标系。飞行器的位置和姿态以及速度、加速度等都是相对于此坐标系来衡量的。

2. 机体坐标系 $Ox_b y_b z_b$

机体坐标系是固联于飞行器并随飞行器运动的一种动坐标系。由于该坐标系最常用，故常常简化为 $Oxyz$ 表示。它的原点位于飞行器的质心。Ox_b 轴在飞行器对称平面内，平行于机身轴线或机翼的平均气动弦线，指向前；Oz_b 轴亦在对称平面内，垂直于 Ox_b 轴，指向下；Oy_b 轴垂直于对称平面，指向右。

气动力矩的三个分量（即滚转力矩 L、偏航力矩 N 和俯仰力矩 M）是对机体坐标系的三根轴定义的。

如果 Ox_b 轴取沿飞行速度 V 在对称平面的投影方向；Oz_b 轴仍在对称面内，垂直 Ox_b 指向下；Oy_b 垂直于对称平面，指向右，则这种机体轴系又称为半机体轴系。风洞实验中测量气动力时，常用该坐标系。

如果 Ox_b 轴取沿基准运动（未扰动运动）飞行速度 V_* 在对称平面的投影方向；Oz_b 轴仍在对称平面内，垂直 Ox_b 指向下；Oy_b 轴垂直于对称平面，指向右，则这种在扰动运动中固联于飞行器的坐标系又称为稳定坐标系，可用 $Ox_s y_s z_s$ 表示。

3. 气流坐标系 $Ox_a y_a z_a$

气流坐标系又称速度坐标系或风轴系。它的原点 O 位于飞行器质心，Ox_a 轴始终指向飞行器的空速方向；Oz_a 轴位于对称平面内，垂直于 Ox_a 轴，指向下；Oy_a 轴垂直于 $Ox_a z_a$ 平面，指向右。

气动力的三个分量，即升力 L、阻力 D 和侧力 C 是在气流坐标系中定义的。

4. 航迹坐标系 $Ox_k y_k z_k$

航迹坐标系又称弹道固连坐标系。它的原点 O 位于飞行器质心。Ox_k 轴始终指向飞行器的地速方向；Oz_k 轴则位于包含 Ox_k 轴的铅垂平面内，垂直于 Ox_k 轴，指向下；Oy_k 轴垂直于



$Ox_k z_k$平面，指向右。

由定义可知，航迹坐标系的Ox_k轴与气流坐标系的Ox_a轴，当风速$V_w \neq 0$时，两者的方向是不同的；只有当风速$V_w = 0$时，两者的方向才一致。

以上四种坐标系中，只有地面坐标系是固定于地面不动的，其他三种坐标系都随飞行器一起运动，故统称为动坐标系。

1.3.2 坐标转换矩阵

建立运动方程时，还需要知道各坐标轴系之间的相互投影关系，即坐标转换矩阵。下面推出坐标转换的一般法则。

1. 两个矢量坐标轴系间的转换

设两个矢量坐标轴Ox_p和Ox_q之间夹角为α（见图1.22）。显然Ox_p轴上的量在Ox_q轴上的投影为

$$x_q = x_p \cos\alpha$$

Ox_q轴上的量在Ox_p轴上的投影为

$$x_p = x_q \cos\alpha$$

可见，均是二轴间的方向余弦的倍数。

2. 平面坐标系各轴间的转换

设两平面坐标系$Ox_p y_p$和$Ox_q y_q$，当坐标系$Ox_p y_p$顺时针转过α角后，将与新坐标系$Ox_q y_q$重合（见图1.23）。则某矢量$\boldsymbol{r}$在坐标系中可分别表示为(x_p, y_p)和(x_q, y_q)。如已知矢量的坐标(x_p, y_p)，则可用下式求得坐标(x_q, y_q)，即

$$\left.\begin{aligned} x_q &= x_p \cos\alpha + y_p \sin\alpha \\ y_q &= -x_p \sin\alpha + y_p \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} \tag{1.18}$$

令

$$\boldsymbol{L}_{qp} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{L}_{qp} \boldsymbol{r}_p$$

式中$\boldsymbol{L}_{qp}$为从坐标系p到坐标系q的坐标转换矩阵，即是这两个坐标轴系之间的方向余弦表。

同样，如已知(x_q, x_q)，则(x_p, x_p)可用下式求得，即

$$\left.\begin{aligned} x_p &= x_q \cos\alpha - y_q \sin\alpha \\ y_p &= x_q \sin\alpha + y_q \cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

写成矩阵形式为



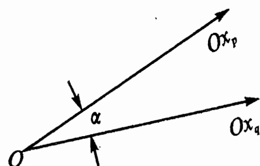


图 1.22　两个矢量坐标轴系转换关系

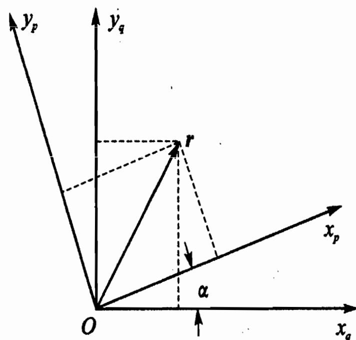


图 1.23　平面坐标轴系转换关系

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ y_q \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

令

$$\boldsymbol{L}_{pq} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{L}_{pq}\boldsymbol{r}_q$$

式中 $\boldsymbol{L}_{pq}$ 为从坐标系 q 到坐标系 p 的坐标转换矩阵。

由式 (1.18)和式 (1.19)可明显看出，转换矩阵具有如下性质：

① $\boldsymbol{L}_{pq} = (\boldsymbol{L}_{qp})^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{L}_{qp} = (\boldsymbol{L}_{pq})^{\mathrm{T}}$，即 $\boldsymbol{L}_{pq}$ 和 $\boldsymbol{L}_{qp}$ 互为转置矩阵。

② $\boldsymbol{L}_{pq} = (\boldsymbol{L}_{qp})^{-1}, \boldsymbol{L}_{qp} = (\boldsymbol{L}_{pq})^{-1}$，即 $\boldsymbol{L}_{pq}$ 和 $\boldsymbol{L}_{qp}$ 互为逆矩阵。

由此可得 $(\boldsymbol{L}_{qp})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{L}_{qp})^{-1}, (\boldsymbol{L}_{pq})^{\mathrm{T}} = (\boldsymbol{L}_{pq})^{-1}$，故 $\boldsymbol{L}_{pq}$ 或 $\boldsymbol{L}_{qp}$ 是正交矩阵。

③ 传递性质。设有三个坐标系 S_p, S_q, S_r，矢量 $\boldsymbol{r}$ 在这三个坐标系的分量阵可用相应的转换矩阵联系起来，即

$$\boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{L}_{pq}\boldsymbol{r}_q, \qquad \boldsymbol{r}_q = \boldsymbol{L}_{qr}\boldsymbol{r}_r, \qquad \boldsymbol{r}_p = \boldsymbol{L}_{pr}\boldsymbol{r}_r$$

由此可以推出

$$\boldsymbol{L}_{pr} = \boldsymbol{L}_{pq}\boldsymbol{L}_{qr}, \qquad \boldsymbol{L}_{rp} = \boldsymbol{L}_{rq}\boldsymbol{L}_{qp}$$

3. 三维坐标轴系各轴间的转换

原点重合的两个三维坐标轴系通过旋转也可重合在一起。若仅通过绕其中一轴旋转即可重合，则坐标轴之间的关系类似于平面坐标系(见图 1.24)。

仅绕 Oz_p 轴转过 α 角的坐标转换关系可表示为

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}_z \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$



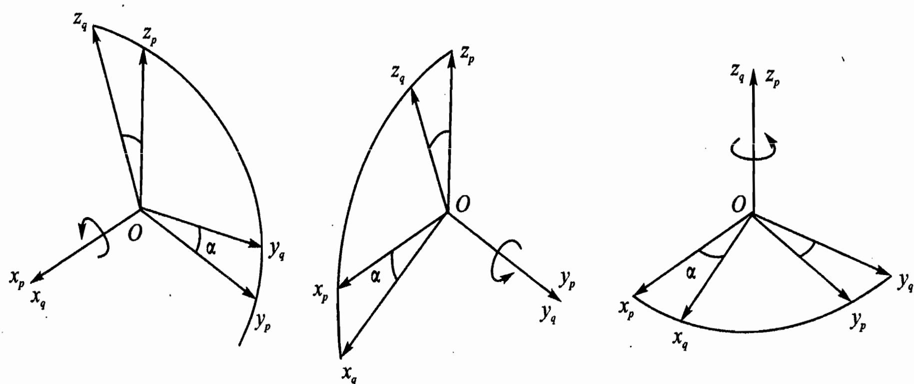


图 1.24　坐标系的基本旋转

转换矩阵为

$$L_z = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

绕 Oy_p 轴和 Ox_p 轴转过 α 角的转换矩阵分别为

$$L_y = \begin{bmatrix} \cos\alpha & 0 & -\sin\alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1.21}$$

$$L_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

一般情况下，坐标系 $Ox_qy_qz_q$ 相对于 $Ox_py_pz_p$ 的位置由三个欧拉角 ζ,η,ξ 确定。它们之间的相互转换关系，可由 $Ox_py_pz_p$ 按顺序连续绕 Oz 方向转动 ζ 角，再绕当时的 Oy 方向转动 η 角，最后绕当时的 Ox 方向转动 ξ 角，到达 $Ox_qy_qz_q$ 坐标系。利用绕单轴转换矩阵式(1.20)～式(1.22)，并根据其转动过程，两坐标轴之间的转换关系应有

$$\begin{bmatrix} x_q \\ y_q \\ z_q \end{bmatrix} = L_x(\xi)L_y(\eta)L_z(\zeta)\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

或简写成

$$r_q = L_{qp}r_p \tag{1.23}$$

式中三维坐标系转换矩阵之间的关系为

$$L_{qp} = L_x(\xi)L_y(\eta)L_z(\zeta)$$

该转换矩阵同样具有二维坐标系转换矩阵的特性。



1.3.3 常用坐标系之间的关系

1. 地面坐标系与机体坐标系

机体坐标系 $Ox_by_bz_b$ 相对于地面坐标系 $Ox_gy_gz_g$ 的方位，或者说飞行器在空中的姿态，常用三个欧拉角表示。具体角度的定义由图 1.25 所示。

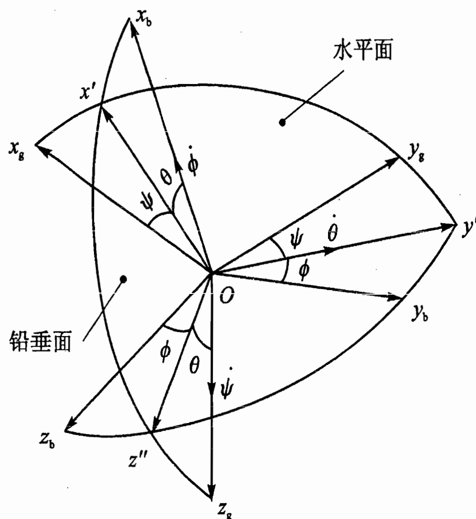


图 1.25 地面坐标系与机体坐标系的关系

偏航角 ψ：机体轴 Ox_b 在水平面 Ox_gy_g 上的投影与 Ox_g 轴之间的夹角。飞机右偏航时形成的角度，规定为正。

俯仰角 θ：机体轴 Ox_b 与水平面 Ox_gy_g 之间的夹角。当飞行器头部上仰时，规定 θ 为正。

滚转角(倾斜角)ϕ：飞机对称平面与包含 Ox_b 轴的铅垂平面之间的夹角。飞行器向右滚转时形成的角度，规定为正。

地面坐标系 $Ox_gy_gz_g$ 如按图 1.25 上的顺序先绕 Oz 轴方向(即图中 Oz_g 方向)转过角 ψ，然后绕当时的 Oy 轴方向(即图中 Oy' 方向)转过角 θ，最后绕当时的 Ox 轴方向(即图中 Ox_b 方向)转过角 ϕ，就可与 $Ox_by_bz_b$ 重合。按坐标转换一般法则，可得出由 $Ox_gy_gz_g$ 到 $Ox_by_bz_b$ 的转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_{bg}=\boldsymbol{L}_x(\phi)\boldsymbol{L}_y(\theta)\boldsymbol{L}_z(\psi)$$

利用单轴转换矩阵式(1.20)～式(1.22)，最后得出的转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_{bg}=\begin{bmatrix}\cos\theta\cos\psi & \cos\theta\sin\psi & -\sin\theta\\ \sin\theta\sin\phi\cos\psi-\cos\phi\sin\psi & \sin\theta\sin\phi\sin\psi+\cos\phi\cos\psi & \sin\phi\cos\theta\\ \sin\theta\cos\phi\cos\psi+\sin\phi\sin\psi-\sin\phi\cos\psi & \sin\theta\cos\phi\sin\psi & \cos\phi\cos\theta\end{bmatrix}\tag{1.24}$$

2. 地面坐标系与航迹坐标系

航迹坐标系相对地面坐标系的方位，根据两坐标轴系定义，其中 Oz_k 和 Oz_g 均位于垂直平面内，故只存在两个欧拉角。

① 航迹(轨迹)偏角 ψ_a：又称为航向角，即航迹轴 Ox_k 在水平面 Ox_gy_g 上的投影与 Ox_g 轴之间的夹角。规定航迹向右偏转时，ψ_a 为正。

② 航迹(轨迹)倾角 θ_a：又称为爬升角，即航迹轴 Ox_k 与水平面 Ox_gy_g 之间的夹角。规定航迹向上倾斜时，θ_a 为正。

从图 1.26 上可见，角度 ψ_a，θ_a 决定了飞机地速在空间的方向。



由 $Ox_g y_g z_g$ 到 $Ox_k y_k z_k$ 的转换矩阵可通过 $Ox_g y_g z_g$ 坐标按顺序绕 z_g 轴转过角 ψ_a，再绕当时的 y 轴（即图中 Oy_k 轴）转过角 θ_a，就可与 $Ox_k y_k z_k$ 坐标系重合。于是得出的转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_{kg}=\boldsymbol{L}_y(\theta_a)\boldsymbol{L}_z(\psi_a)=\begin{bmatrix}\cos\theta_a\cos\psi_a & \cos\theta_a\sin\psi_a & -\sin\theta_a\\ -\sin\psi_a & \cos\psi_a & 0\\ \sin\theta_a\cos\psi_a & \sin\theta_a\sin\psi_a & \cos\theta_a\end{bmatrix}\tag{1.25}$$

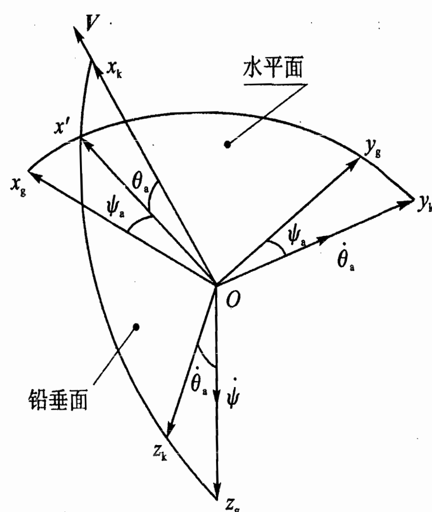


图 1.26　地面坐标系与航迹坐标系的关系

3. 航迹坐标系与气流坐标系

航迹坐标系与气流坐标系间的相互关系，在无风情况下，其 Ox_a 和 Ox_k 是同轴，故只有一个角度即可确定。

速度滚转角 ϕ_a：是飞行器对称平面 $Ox_b z_b$ 与含速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 的铅垂平面之间的夹角。它是绕速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 向右滚转形成的，定义为正 ϕ_a。

其相应的转换矩阵应为

$$\boldsymbol{L}_{ak}=\boldsymbol{L}_x(\phi_a)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\phi_a & \sin\phi_a\\ 0 & -\sin\phi_a & \cos\phi_a\end{bmatrix}\tag{1.26}$$

显然，有风存在时，Ox_a 和 Ox_k 将不是同轴。

4. 地面坐标系与气流坐标系

气流坐标系相对地面坐标系的方位，明显地由三个欧拉角来确定，分别为 ψ_a，θ_a 和 ϕ_a。其转换矩阵可以通过式(1.25)和式(1.26)导出，也可类于式(1.24)直接得出。

$$\boldsymbol{L}_{ag}=\boldsymbol{L}_{ak}\boldsymbol{L}_{kg}=\boldsymbol{L}_x(\phi_a)\boldsymbol{L}_y(\theta_a)\boldsymbol{L}_z(\psi_a)=$$
$$\begin{bmatrix}\cos\theta_a\cos\psi_a & \cos\theta_a\sin\psi_a & -\sin\theta_a\\ \sin\theta_a\sin\phi_a\cos\psi_a-\cos\phi_a\sin\psi_a & \sin\theta_a\sin\phi_a\sin\psi_a+\cos\phi_a\cos\psi_a & \sin\phi_a\cos\theta_a\\ \sin\theta_a\cos\phi_a\cos\psi_a+\sin\phi_a\sin\psi_a & \sin\theta_a\cos\phi_a\sin\psi_a-\sin\phi_a\cos\psi_a & \cos\phi_a\cos\theta_a\end{bmatrix}\tag{1.27}$$

式中三个角 ψ_a，θ_a 和 ϕ_a 在后面常采用另一组符号 χ，γ 和 μ 来表示。

5. 气流坐标系与机体坐标系

气流坐标系与机体坐标系间的相互关系，因其 Oz_a 和 Oz_b 轴同在飞行器纵向对称平面内，故有两个角度可确定其相对位置。

① 迎角 α：飞行速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 在飞行器对称平面上的投影与机体轴 Ox_b 之间的夹角。正常

飞行情况下，投影线在Ox_b上方，定义α为正。

② 侧滑角β：飞行速度矢量$\boldsymbol{V}$与飞行器对称平面之间的夹角。速度矢量$\boldsymbol{V}$在对称平面右方，定义β为正。

从图1.27上可见，坐标系$Ox_b y_b z_b$通过按顺序先绕y_b轴转过角$-\alpha$，再绕当时的z轴(即图中Oz_a轴)转过角β，就可与$Ox_a y_a z_a$重合。于是可得相应的转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_{ab} = \boldsymbol{L}_z(\beta)\boldsymbol{L}_y(-\alpha) = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta & \sin\beta & \sin\alpha\cos\beta \\ -\cos\alpha\sin\beta & \cos\beta & -\sin\alpha\sin\beta \\ -\sin\alpha & 0 & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

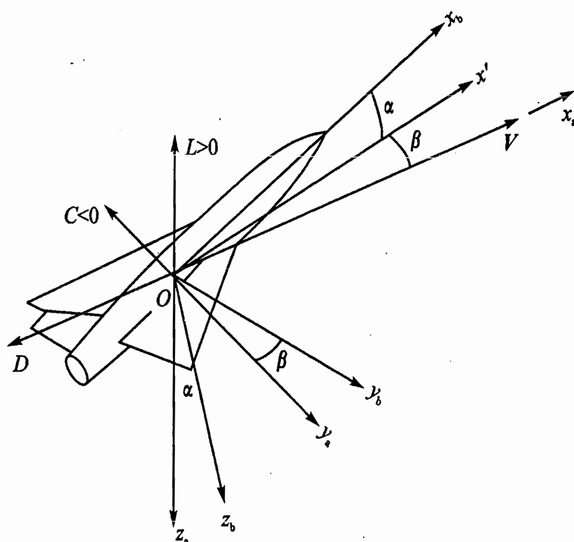


图1.27 气流坐标系与机体坐标的关系

1.4 飞行器质心运动方程

由理论力学可知，飞行器质心运动的描述，可用动量定理来表示。

$$m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F} \tag{1.29}$$

式中m为飞行器质量，$\boldsymbol{V}$为飞行器飞行速度矢量，$\boldsymbol{F}$为作用于质心处外力的合力矢量。上述运动规律只是相对惯性坐标系而言的。对于飞行器速度、飞行高度不很大的情况，可以忽略地球曲率和自转带来的影响，平面地球坐标系可近似作为惯性坐标系。

具体研究飞行器质心运动规律时，由于矢量形式的方程使用不太方便，故用在某坐标投影的标量形式来表示。工程习惯上，通常建立投影在一动坐标系的标量方程，并认为大气是静止的。



1.4.1　一般动坐标系中质心动力学方程

取原点位于飞行器质心的一动坐标系 $Oxyz$，它相对惯性坐标系 $O_g x_g y_g z_g$ 有一转动角速度 $\boldsymbol{\omega}$。质心的绝对速度为 $\boldsymbol{V}$，如图 1.28 所示。

将速度 $\boldsymbol{V}$ 和角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 分别投影在动坐标系上，则有

$$\boldsymbol{V} = V_x\boldsymbol{i} + V_y\boldsymbol{j} + V_z\boldsymbol{k} \tag{1.30}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j} + \omega_z\boldsymbol{k} \tag{1.31}$$

式中 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为动坐标系 $Oxyz$ 的单位矢量。由于 $\boldsymbol{\omega}$ 存在，其方向将随时间变化。

现考虑速度 $\boldsymbol{V}$ 的微分，即质心的绝对加速度，应为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} + V_x\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} + V_y\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} + V_z\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} \tag{1.32}$$

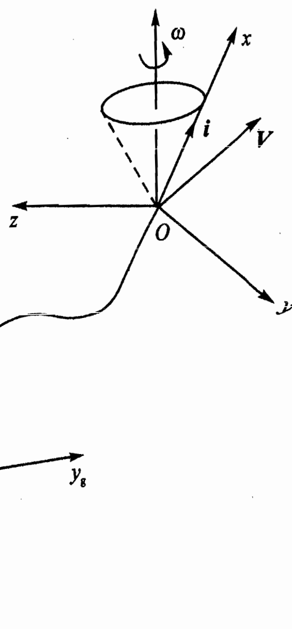


图 1.28　动系相对于惯性坐标系的关系

由图 1.28 可见，式中单位矢量导数 $\mathrm{d}\boldsymbol{i}/\mathrm{d}t$，应是矢量 $\boldsymbol{i}$ 端点的速度。此时矢端曲线是绕 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转的一个圆，故可得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{i}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{i}$$

同理有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{j}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{j}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{k}$$

把上述关系代入式(1.32)，质心的绝对加速度可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{V}}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta\boldsymbol{V}}{\delta t} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V} \tag{1.33}$$

而

$$\frac{\delta\boldsymbol{V}}{\delta t} = \frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

式中 $\delta\boldsymbol{V}/\delta t$ 为动系角速度 $\boldsymbol{\omega}=0$ 时的加速度，即相当于观察者站在动坐标系中所看到的质心加速度；$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}$ 为由于存在角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 使 $\boldsymbol{V}$ 相对于动坐标系方向发生变化而产生的加速度；$\mathrm{d}\boldsymbol{V}/\mathrm{d}t$ 则为质心的绝对加速度，即观察者在地面坐标系上所看到的加速度。

将上式代入式 (1.29)，得到在动坐标系中表示的质心动力学矢量形式为



$$m\left(\frac{\delta \boldsymbol{V}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{V}\right)=\boldsymbol{F} \tag{1.34}$$

同样将合力矢量 $\boldsymbol{F}$ 用动坐标系上的投影表示为

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

于是式(1.34)在动坐标系 $Oxyz$ 上投影的质心动力学标量有如下形式：

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}+V_z\omega_y-V_y\omega_z\right)&=F_x\\ m\left(\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}+V_x\omega_z-V_z\omega_x\right)&=F_y\\ m\left(\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}+V_y\omega_x-V_x\omega_y\right)&=F_z \end{aligned}\right\} \tag{1.35}$$

显然，上述方程组适用于任何动坐标系。在研究飞行器性能、轨迹特性时，常采用航迹坐标系上投影的质心动力学方程。

1.4.2 航迹坐标系中质心动力学方程

在推导航迹坐标系中的质心动力学方程时，只要将速度、角速度及合外力在航迹坐标系 $Ox_ky_kz_k$ 中的投影直接代入式(1.35)即可。根据航迹轴系定义，Ox_k 轴取飞行器质心运动方向，故

$$V_x=V,\qquad V_y=V_z=0$$

航迹坐标系与地面坐标系的相对位置，可先以角速度 $\dot{\psi}_a$ 绕 Oz 轴转动，再绕当时的 Oy 轴(即 Oy_k)以角速度 $\dot{\theta}_a$ 转动而形成(见图 1.26)。因此航迹坐标系相对地面坐标系的角速度可表示为

$$\boldsymbol{\omega}=\dot{\boldsymbol{\psi}}_a+\dot{\boldsymbol{\theta}}_a$$

通过转换矩阵，上式在航迹轴系上的投影可表示为

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\ \omega_y\\ \omega_z\end{bmatrix}_k=\boldsymbol{L}_{kg}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ \dot{\psi}_a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \dot{\theta}_a\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\dot{\psi}_a\cos\theta_a\\ \dot{\theta}_a\\ \dot{\psi}_a\sin\theta_a\end{bmatrix}$$

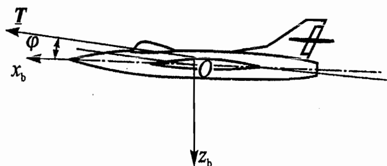


图 1.29 发动机推力矢量

作用在飞行器质心上的外力中，发动机推力 $\boldsymbol{T}$ 一般位于飞行器对称平面内，有时会与机体轴 Ox_b 构成安装角 φ。为此先将 $\boldsymbol{T}$ 投影在机体轴系上(见图 1.29)，可表示为

$$[T_x\quad T_y\quad T_z]_k^{\mathrm{T}}=[T\cos\varphi\quad 0\quad -T\sin\varphi]^{\mathrm{T}}$$



随后通过转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{kb}=\boldsymbol{L}_{ka}\boldsymbol{L}_{ab}=\boldsymbol{L}_{ak}^{T}\boldsymbol{L}_{ab}$，得到推力 $\boldsymbol{T}$ 在航迹坐标系上投影

$$\begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}_k = L_{kb}\begin{bmatrix} T\cos\varphi \\ 0 \\ -T\sin\varphi \end{bmatrix} = T\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\varphi)\cos\beta \\ \sin(\alpha+\varphi)\sin\phi_a-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\cos\phi_a \\ -\sin(\alpha+\varphi)\cos\phi_a-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\sin\phi_a \end{bmatrix}$$

空气动力 $\boldsymbol{A}$ 一般在气流坐标系中定义，分别用升力 L、阻力 D 和侧力 C 表示，即

$$[A_x \quad A_y \quad A_z]_a^T=[-D \quad C \quad -L]^T$$

同样，通过转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{ka}=\boldsymbol{L}_{ak}^{T}$ 得到气动力在航迹坐标系上的投影

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}_k = \boldsymbol{L}_{ka}\begin{bmatrix} -D \\ C \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D \\ C\cos\phi_a+L\sin\phi_a \\ C\sin\phi_a-L\cos\phi_a \end{bmatrix}$$

重力 mg 的方向沿着地面坐标系 Oz_g 方向给出，再用转换矩阵可得在航迹坐标系上的投影

$$m\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_k = \boldsymbol{L}_{kg}m\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} -g\sin\theta_a \\ 0 \\ g\cos\theta_a \end{bmatrix}$$

将速度、角速度和各外力的投影式均代入式(1.35)后，最终得出航迹坐标系中的飞行器质心动力学方程组的标量形式

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{dV}{dt}=T\cos(\alpha+\varphi)\cos\beta-D-mg\sin\gamma \\ & mV\cos\gamma\frac{d\chi}{dt}=T[\sin(\alpha+\varphi)\sin\mu-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\cos\mu]+C\cos\mu+L\sin\mu \\ & -mV\frac{d\gamma}{dt}=T[-\sin(\alpha+\varphi)\cos\mu-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\sin\mu]+C\sin\mu-L\cos\mu+mg\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.36}$$

注意：式中(ψ_a,θ_a,ϕ_a)已用(χ,γ,μ)来表示。

1.4.3　飞行器质心运动学方程

为确定飞行器在空间的飞行轨迹，还需要建立飞行器质心的运动学方程。首先将由式(1.36)求得的飞行速度 V 投影至地面坐标系

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix}_g = \boldsymbol{L}_{gk}\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}_{kg}^{T}\begin{bmatrix} V \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

随后考虑到地轴系速度分速分别是质心空间坐标的微分，如 $\dfrac{dx_g}{dt}=V_g$ 等，并利用转换矩阵式(1.25)，即可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma\cos\chi\\\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma\sin\chi\\\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t}&=-V\sin\gamma\end{aligned}\right\}\tag{1.37}$$

该方程组描述了质心空间位置随时间的变化规律。

1.4.4 飞行器质心运动方程讨论

1. 方程的封闭情况

从上面导出的飞行器质心运动方程组共由六个方程组成，即三个质心动力学方程和三个质心运动学方程。而方程组的未知数由式(1.36)和式(1.37)可见，有表示速度大小和方向的(V,χ,γ)、质心在空间位置的(x_g,y_g,z_g)、航迹轴系与体轴系之间相互位置的(α,β,μ)。作用在飞行器质心上的外力，是一些参数的函数。其中

气动力 $$A=f(V,H,\alpha,\beta,\delta_a,\delta_r,\delta_e)$$

式中 δ_a 为副翼偏角，δ_r 为方向舵偏角，δ_e 为升降舵偏角；

发动机推力 $$T=f(V,H,\delta_p)$$

式中 δ_p 为油门杆位置；

重力 $$W=f(H)$$

可见，这些外力除了与已列出的运动参数有关外，还与操纵机构偏角$(\delta_a,\delta_r,\delta_e,\delta_p)$有关。因此整个质心运动方程组共有未知数十三个。显然未知数与方程式的个数不封闭，必须补充其他方程，才能求解得出运动轨迹。

这里应指出的是，在研究飞行器性能、轨迹时，飞行器是近似作为一个质点来处理的，认为作用在飞行器的外力矩始终处于平衡状态，实际上隐含了三个关系式，即力矩平衡方程$\sum L=0,\sum M=0,\sum N=0$。余下的四个未知数，显然与飞行器的操纵有关。对于无控飞行器来说，操纵变量为零或为常值，此时在给定初始条件下，即可通过方程组联立求解，得出相应的轨迹运动。但对于可控飞行器来说，则必须根据其操纵特点，给出相应的附加关系式，才能保证未知数和方程式封闭。

2. 理想操纵关系式

飞行器的操纵过程是通过操纵机构(舵面、油门杆)偏转，改变法向力和切向力大小来实现的。当飞行器期望的运动参数与实际的瞬态运动参数不相符时，即存有误差时，就发出控制信号。例如控制飞行器的俯仰角系统，其误差可写成

$$\Delta\theta=\theta_*-\theta$$

式中 θ_* 为所期望的值，θ 为实际瞬态值，此时通过偏转升降舵来消除误差，可近似地表示为

$$\Delta\delta_e=K_\theta(\theta_*-\theta)\tag{1.38}$$



式中 K_θ 为操纵系统的传递系数。

由此可知，与操纵有关的方程应该是操纵机构与运动参数之间的关系。在研究飞行器性能，初步设计飞行轨迹时，可假设操纵系统能无误差地工作，飞行器的运动参数能按所期望的规律变化。这样，其误差关系式表示为

$$\varepsilon_i = x_* - x = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4) \tag{1.39}$$

式中 x_* 和 x 分别表示期望的和瞬态的运动参数。

这些关系式称为理想操纵关系式。它保证飞行器沿着预定轨迹飞行。习惯上，常用第一和第二个理想操纵关系式来控制飞行器的飞行速度方向；第三个理想操纵关系式用来保持正常操纵的协调关系；第四个操纵关系式则用来控制飞行器飞行速度的大小。

例如，轴对称飞行器的导弹保持等速直线飞行时，其理想操纵关系可表示为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \gamma_* - \gamma = 0 \\ \varepsilon_2 &= \chi_* - \chi = 0 \\ \varepsilon_3 &= \mu = 0 \\ \varepsilon_4 &= V_* - V = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

式中第一式为俯仰方向控制；第二式为偏航方向控制；第三式保持滚转姿态，即保证操纵机构正常工作；第四式控制飞行速度。

又如，面对称飞行器作正常盘旋时，其理想操纵关系为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \gamma = 0 \\ \varepsilon_2 &= \mu_* - \mu = 0 \\ \varepsilon_3 &= \beta = 0 \\ \varepsilon_4 &= V_* - V = 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.41}$$

显然，式中第一式保持俯仰方向不变；第二式为通过倾斜实现偏航方向控制；第三式保持无侧滑的协调操纵；第四式控制飞行速度。

实际飞行过程中，要实现无误差操纵，则要求操纵系统的传递系数（如式(1.38)中的 K_θ）为无穷大，这是不可能的。但其操纵方程仍然是操纵机构与运动参数之间的关系，写成一般约束方程形式为

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(\cdots\varepsilon_i\cdots\delta_i\cdots) &= 0 \\ \varphi_2(\cdots\varepsilon_i\cdots\delta_i\cdots) &= 0 \\ \varphi_3(\cdots\varepsilon_i\cdots\delta_i\cdots) &= 0 \\ \varphi_4(\cdots\varepsilon_i\cdots\delta_i\cdots) &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{1.42}$$

操纵方程的具体形式，决定于飞行操纵任务，详细内容见第 9～12 章。

3. 质量变化方程

对于大型飞行器，特别是某些导弹，其燃油量很大，因此在飞行过程中飞行器质量变化较大；一方面新的空气不断地进入发动机，另一方面燃气流又连续地向后喷出，随之飞行器质量、

构形都随着时间变化。此时飞行器运动规律应由变质量动力学来确定,比起刚体飞行器动力学要复杂些。

但在工程上常采用所谓“固化原理”处理,即在任意瞬时,把变质量物体设想为虚拟刚体,所有的质点被固化在虚拟刚体上,刚体将由瞬时的所有质点组成。采用“固化原理”假设后,就可把所研究的瞬态变质量物体的运动方程写成常质量刚体的运动方程形式。于是,在略去一些次要因素后,上述推得方程式(1.36)、式(1.37)可直接使用。此时飞行器质量则应视作变量,其变化规律为

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}=m_{\mathrm{f}}=\frac{c_{\mathrm{f}}T}{g} \tag{1.43}$$

式中 m_{f} 为燃料的单位时间质量消耗量。

综上所述,描述飞行器的质心运动方程应由式(1.36)、式(1.37)、式(1.39)和式(1.43)组成。

1.4.5 质心在铅垂平面内的运动方程

在研究飞行器性能和轨迹特性时,常把飞行器质心运动分为在铅垂平面内的运动和在水平平面内的运动两部分。所谓飞行器质心在铅垂平面的飞行是指飞行器不倾斜、无侧滑,飞行器对称平面与质心运动轨迹所在的铅垂平面相重合的飞行。此时飞行速度矢量和作用于质心上的外力均位于对称平面内,故这种飞行又称对称飞行。在此条件下,前面建立的方程可相应地简化。

1. 动力学方程

显然,对称飞行条件可表示为

$$\phi=\mu=0,\qquad \beta=0,\qquad \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=0$$

于是式(1.36)可简化为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=T\cos(\alpha+\varphi)-D-mg\sin\gamma\\ -mV\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}&=-T\sin(\alpha+\varphi)-L+mg\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.44}$$

当飞行迎角不太大时,$\cos(\alpha+\varphi)\approx1$,$\sin(\alpha+\varphi)\approx0$ 上述方程组可进一步简化为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=T-D-mg\sin\gamma\\ -mV\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}&=-L+mg\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.45}$$

式(1.44)和式(1.45)可用于分析飞行器在铅垂平面内作机动飞行(如俯冲、跃升和筋斗等)时的性能。



若飞行器在铅垂面内作非定常直线飞行，则$\frac{d\gamma}{dt}=0$，式(1.45)可再简化为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= T-D-mg\sin\gamma \\ L &= mg\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.46}$$

式(1.46)可用于研究飞行器非定常直线上升和非定常直线下降等性能。

若令上式$\gamma=0$，则是式(1.46)的特例，可表示为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{dV}{dt} &= T-D \\ L &= mg \end{aligned}\right\} \tag{1.47}$$

式(1.47)可用于研究飞行器的平飞加减速性能。

若飞行器作等速直线飞行，即$\frac{dV}{dt}=0$，$\frac{d\gamma}{dt}=0$，则式(1.44)可简化为

$$\left.\begin{aligned} T\cos(\alpha+\varphi) &= D+mg\sin\gamma \\ T\sin(\alpha+\varphi)+L &= mg\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.48}$$

当γ，α等不太大时，又可近似成

$$\left.\begin{aligned} T &= D+mg\sin\gamma \\ L &= mg \end{aligned}\right\} \tag{1.49}$$

上述方程可用于研究飞行器等速直线爬升或下滑性能。若$\gamma=0$，则得最简单的形式

$$\left.\begin{aligned} T &= D \\ L &= mg \end{aligned}\right\} \tag{1.50}$$

式(1.50)用来估算飞行器等速直线平飞性能。

2. 运动学方程

假设飞行器运动开始时，航迹偏角$\chi=0$，则在铅垂平面内飞行时的质心运动学方程由式(1.37)可简化为

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx_g}{dt} &= V\cos\gamma \\ \frac{dz_g}{dt} &= -V\sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{1.51}$$

3. 理想操纵关系方程

由于飞行器质心运动限制在铅垂平面内，故飞行操纵将可简化成仅是速度垂直方向的控制和飞行速度大小的控制，即

$$\varepsilon_1=0,\qquad \varepsilon_4=0 \tag{1.52}$$

具体形式由飞行状态而定。对于等速水平飞行状态，理想操纵关系很简单，应为

$$\left.\begin{aligned} \gamma_* &= \gamma = 0 \\ V_* &= V = C \end{aligned}\right\} \tag{1.53}$$

对于等速直线爬升飞行状态，则为

$$\left.\begin{aligned} \gamma_* &= \gamma = C \\ V_* &= V = C \end{aligned}\right\} \tag{1.54}$$

飞行器质心在铅垂面内的运动方程，一般应由式(1.44)、式(1.51)和式(1.52)组成。方程中未知数有 $V,\gamma,x_g,z_g,\alpha,\delta_e,\delta_p$ 共七个，而方程式仅有六个。但由于同样原因，考虑铅垂面质心运动时，隐含了纵向力矩始终处于平衡的条件，即 $\sum M=0$，它确定了飞行器迎角与升降舵面偏角间的关系。因此，方程组是封闭的，可以求解得出相应的运动规律。

1.4.6 质心在水平面内的运动方程

飞行器质心在水平面内的运动，是指飞行器质心的运动轨迹始终位于与海平面平行的某一空间水平面内。与质心在铅垂面内的运动相比要复杂些。在此条件下质心运动方程也可相应地简化。

1. 动力学方程

飞行器质心在水平面内的运动条件可表示为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = 0, \qquad \gamma = 0$$

于是式(1.36)可简化为

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T\cos(\alpha+\varphi)\cos\beta - D \\ & mV\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = T[\sin(\alpha+\varphi)\sin\mu - \cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\cos\mu] + C\cos\mu + L\sin\mu \\ & T[\sin(\alpha+\varphi)\cos\mu - \cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\sin\mu] + L\cos\mu = C\sin\mu + mg \end{aligned}\right\} \tag{1.55}$$

式中第三式表示法向力处于平衡状态，保持飞行器质心在水平面内运动。该方程组适用于研究飞行器在水平面的机动飞行性能，如水平转弯、盘旋等。

若飞行器作无侧滑盘旋，即 $\beta=0$ $(C=0)$，则上式可进一步简化为

$$\left.\begin{aligned} & m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = T\cos(\alpha+\varphi) - D \\ & mV\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} = T[\sin(\alpha+\varphi) + L]\sin\mu \\ & T[\sin(\alpha+\varphi) + L]\cos\mu = mg \end{aligned}\right\} \tag{1.56}$$

若飞行器作无侧滑等速盘旋，即 $\beta=0$，且 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，式(1.56)又可简化为



$$\left.\begin{aligned}&T\cos(\alpha+\varphi)=D\\&mV\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=[T\sin(\alpha+\varphi)+L]\sin\mu\\&[T\sin(\alpha+\varphi)+L]\cos\mu=mg\end{aligned}\right\}\tag{1.57}$$

方程中，若考虑到平飞中α不太大，可以略去推力法向分量$T\sin(\alpha+\varphi)\approx 0$，而$T\cos(\alpha+\varphi)\approx T$，于是可得更简化形式

$$\left.\begin{aligned}&T=D\\&mV\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=L\sin\mu\\&L\cos\mu=mg\end{aligned}\right\}\tag{1.58}$$

上式将用来讨论飞行器正常盘旋运动特性。

对于某些轴对称飞行器(如空-空导弹)，要求在水平面内无倾斜、带侧滑运动，即$\mu=\phi=0$，则式(1.55)可简化为

$$\left.\begin{aligned}&m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=T\cos(\alpha+\varphi)\cos\beta-D\\&mV\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=-T\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta+C\\&T\sin(\alpha+\varphi)+L=mg\end{aligned}\right\}\tag{1.59}$$

2. 运动学方程

飞行器质心在水平面内运动，飞行高度将不变，故其运动学方程由式(1.37)简化为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t}=V\cos\chi\\&\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}t}=V\sin\chi\end{aligned}\right\}\tag{1.60}$$

3. 理想操纵关系方程

飞行器质心限于在水平面内运动，故可除去速度垂直方向的控制，保留速度水平方向、正常协调和飞行速度大小的控制关系式，即

$$\varepsilon_i=0\qquad(i=2,3,4)\tag{1.61}$$

具体形式由飞行状态而定。例如，对于无侧滑等速盘旋，其理想操纵关系可表示为

$$\left.\begin{aligned}&\beta_*=\beta=0\\&\mu_*=\mu=0\qquad(\text{或 }\phi_*=\phi=0)\\&V_*=V=C\end{aligned}\right\}\tag{1.62}$$

飞行器质心在水平面内运动的一般方程组，应由式(1.55)、式(1.60)和式(1.61)组成。式中的未知数有$V,\chi,x_g,y_g,\alpha,\beta,\mu,\delta_a,\delta_r,\delta_e$和$\delta_p$共十一个，而方程仅有八个。同样的理由，研究质心运动时隐含的三个力矩平衡方程$\sum L=0,\sum M=0,\sum N=0$，确定了$\alpha,\beta,\mu$与舵面偏角



之间关系，故方程组是封闭的。

复习思考题

1.1　研究飞行器性能和飞行轨迹特性时，将飞行器视作可控质点来处理的基本前提是什么？

1.2　飞行器的最大允许升力系数主要受哪些因素的限制？

1.3　说明零升阻力系数 C_{D0}、升致阻力系数因子 A 随马赫数 Ma 的变化规律。

1.4　何谓飞行器极曲线？极曲线形状受哪些因素的影响？

1.5　简要说明涡轮喷气发动机的速度特性、高度特性和转速特性。

1.6　说明常规的面对称飞行器（如飞机、飞航导弹）飞行操纵过程及其特点。轴对称飞行器、直接力控制飞行器的飞行操纵又有什么特点？

1.7　试导出在机体坐标系 $Ox_by_bz_b$ 中投影的质心动力学方程。

1.8　试导出在地面坐标系 $Ox_gy_gz_g$ 中投影的质心动力学方程。

1.9　分析机体坐标系与航迹坐标系之间的相互关系，并导出转换矩阵 L_{bk}。

1.10　飞行器在铅垂平面内作非定常曲线飞行时，作用在其上的外力如图 1-30 所示。试直接按图示列出质心动力学方程。

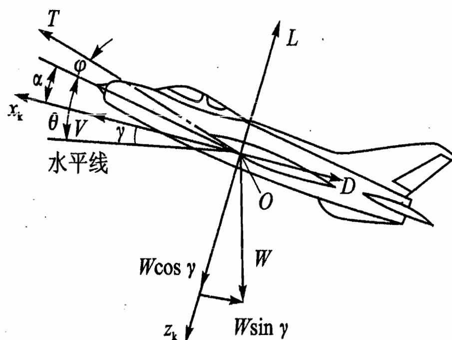


图 1.30　纵向运动时作用在飞机上的外力

1.11　可控飞行器为什么要引入四个理想操纵关系式？每一个操纵关系式代表什么含义？

第 2 章　飞机的飞行性能

本章所述的飞机飞行性能(不包括机动性能)是指飞机最基本的一些定常或非定常直线运动的性能。可以将飞机作为一个可控质心处理,用第 1 章中建立的运动方程来描述。按不同的飞行状态,飞机的飞行性能包括平飞性能、上升性能、续航性能和起落性能。

定常直线运动是指运动参数不随时间而改变的运动。严格地讲,定常直线运动是不存在的。随着燃油消耗,飞机重量将不断减小,从而飞机的速度、迎角会随之变化。但当飞机的运动参数随时间的变化十分缓慢时,可以认为一段时间内运动参数不变,则称之为"准定常"运动。飞机的平飞性能、上升性能,有时称其为基本飞行性能,就是在这个假设下确定的。

对于现代高速飞机,由于在爬升过程中速度变化较大,此时的上升性能需用非定常运动来确定。飞机起落性能,无论是在地面滑跑,还是在爬升或下滑过程中,飞行速度变化较大,其性能均按非定常运动来确定。

在本章的最后,还简要介绍无动力飞行器——滑翔机的飞行性能。

2.1　平飞性能

飞机平飞运动中最常见的一种运动是等速水平直线飞行,由于运动中飞机运动参数均不随时间变化,故又称定常平飞运动。这种运动无论是军用机,还是民用机都占据了飞行的大部分时间,研究它具有重要意义。飞机平飞性能的好坏通常用飞机最大平飞速度 V_{max}、最小平飞速度 V_{min} 和可能平飞的速度范围来评价。

2.1.1　定常平飞时的运动方程

定常平飞时,$\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0$,$\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t=\gamma=0$,由方程式(1.44)可知,其相应的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} T\cos(\alpha+\varphi) &= D \\ L+T\sin(\alpha+\varphi) &= mg = W \end{aligned}\right\}$$

假设推力矢量沿着机体轴 Ox_b 方向,一般情况下迎角足够小,上述方程可简化为

$$\left.\begin{aligned} T &= D \\ L &= W \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

可见,飞机作定常水平飞行时,推力等于阻力,升力等于重力,飞机处于平衡状态。这种近似,在工程中确定飞机平飞性能时是允许的。

满足式(2.1)条件的飞机推力,称为定常平飞需用推力,以 T_R 表示。飞机在不同高度、不

同速度作定常平飞时,需要不同的平飞需用推力。

由式(2.1)可知,平飞需用推力实际上等于飞机作等速直线平飞时的迎面阻力,即

$$T_R = D = C_D \frac{1}{2}\rho V^2 S \tag{2.2}$$

其相应的升力为

$$W = L = C_L \frac{1}{2}\rho V^2 S \tag{2.3}$$

式(2.2)除以式(2.3),得到

$$\frac{T_R}{W} = \frac{D}{L} = \frac{C_D}{C_L} = \frac{1}{K}$$

故平飞需用推力为

$$T_R = \frac{W}{K} \tag{2.4}$$

式中升阻比 K 是飞行速度 V 或 Ma 的函数。因此,在给定飞机重量和飞行高度的条件下,平飞需用推力只是速度 V 或 Ma 的函数,其相应的曲线称平飞需用推力曲线。

具体的平飞需用推力曲线,在重量和高度给定时可按如下步骤计算得出。

① 给出一系列 Ma,并算出速度 V。

② 根据平飞公式算出升力系数,即

$$W = C_L \frac{1}{2}\rho V^2 S$$

$$C_L = \frac{2W}{\rho V^2 S} = \frac{2W}{\rho Ma^2 c^2 S} = \frac{C}{Ma^2}$$

式中 $C=2W/\rho S c^2$ 为常数。

③ 根据飞机极曲线,查出每一升力系数 C_L 对应的阻力系数 C_D,计算出相应的升阻比 $K=C_L/C_D$;当已知 C_{D0} 和 A 时,也可根据公式 $C_D=C_{D0}+AC_L^2$ 求出 C_D,随后算出 K。

④ 根据已知重力和每个 Ma 下的 K,算出平飞需用推力,即 $T_R=W/K$。

⑤ 以 V 或 Ma 为横坐标,T_R 为纵坐标,绘出平飞需用推力曲线。

例: 计算某超声速歼击机在 $H=8$ km 高度上飞行时的平飞需用推力曲线。其原始数据如下:

$H=8\ 000$ m,$S=23$ m^2,$W=64\ 778$ N。由标准大气表查得 $\rho=0.525\ 2$ kg/m^3,$c=308$ m/s。

计算得
$$C = \frac{2W}{\rho S c^2} = 0.113$$

总结果见表 2.1。平飞需用推力曲线如图 2.1 所示。

由表 2.1 可知,飞机在一定飞行高度作等速直线平飞时,为满足平衡条件式(2.1),一定的飞行速度必须有一定的迎角和一定的推力与之对应。由于平飞所需升力系数随 Ma 的增加而减小,所以迎角随速度增加而减小。



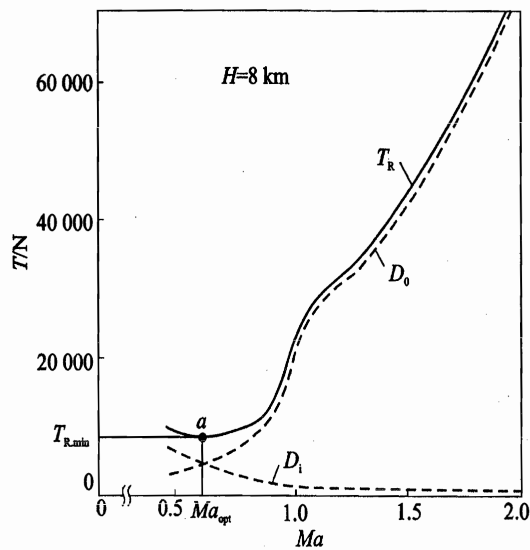


图 2.1　飞机平飞需用推力曲线

表 2.1　飞机平飞需用推力计算列表(H=8 km)

1	2	3	4	5	6	7	8	9
Ma	$V/(\text{km}\cdot\text{h}^{-1})$	Ma^2	C_L	C	K	T_R/N	D_0/N	D_i/N
给定	$V=cMa$		C/Ma^2	查极曲线	C_L/C_D	W/K		
0.5	554	0.25	0.452 0	0.060 4	7.478	8 669	1 716	6 953
0.6	665	0.36	0.314 0	0.038 1	8.240	7 865	3 021	4 844
0.7	776	0.49	0.231 0	0.028 8	8.032	8 071	4 511	3 560
0.8	887	0.64	0.177 0	0.024 5	7.239	8 954	6 208	2 746
0.9	998	0.81	0.140 0	0.023 3	5.992	10 817	8 591	2 226
1.0	1 109	1.00	0.113 0	0.032 4	3.488	18 594	16 780	1 814
1.1	1 220	1.21	0.093 0	0.039 6	2.349	27 307	26 096	1 510
1.2	1 330	1.44	0.078 0	0.037 1	2.100	30 872	29 598	1 274
1.3	1 441	1.69	0.066 9	0.036 0	1.861	34 834	33 667	1 167
1.4	1 552	1.96	0.057 6	0.034 8	1.657	39 130	38 041	1 089
1.5	1 663	2.25	0.050 2	0.034 0	1.476	43 926	42 886	1 040
1.6	1 774	2.56	0.044 0	0.033 2	1.324	48 966	48 005	961
1.7	1 885	2.89	0.039 0	0.032 7	1.193	54 350	53 438	912
1.8	1 995	3.24	0.035 0	0.032 4	1.081	59 980	59 117	863



1. 平飞需用推力曲线的组成

T_R的变化规律从本质上讲是飞机平飞时阻力 D 的变化规律。将飞机总阻力分成零升阻力和升致阻力两部分，于是

$$T_R = D = D_0 + D_i = C_{D0}\frac{1}{2}\rho V^2 S + AC_L^2\frac{1}{2}\rho V^2 S$$

式中 C_L应满足平飞条件 $C_L=\dfrac{2W}{\rho V^2 S}$，并考虑到 $Ma=\dfrac{V}{c}$，$c^2=\dfrac{kp}{\rho}$后，代入上式得

$$T_R = C_{D0}\frac{1}{2}\rho V^2 S + \frac{AW^2}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = K_0 C_{D0} Ma^2 + K_i\frac{A}{Ma^2} \qquad (2.5)$$

式中系数 $K_0=\dfrac{1}{2}kpS$，$K_i=\dfrac{W^2}{\frac{1}{2}kpS}$。对于给定飞机，$W$，$S$ 一定，则系数 K_0，K_i仅是飞行高度(或压强 p)的函数。

由式(2.5)可见，平飞需用推力除直接与飞行 Ma 有关外，还与高度、零升阻力系数 C_{D0}和升致阻力因子 A 随 Ma 的变化规律有关。所以，在不同的飞行速度范围和不同的高度范围内，平飞需用推力曲线随飞行速度和高度的变化也不尽相同。

2. 平飞需用推力随飞行速度(Ma)的变化

为便于说明，将第 1 章中某超声速飞机的零升阻力系数 C_{D0}和升致阻力因子 A 随 Ma 变化曲线重新画在图 2.2 上。当飞机在一定的高度上作亚声速飞行时，C_{D0}和 A 基本上不随 Ma 变化，因而，零升阻力 D_0与 Ma 的平方成正比，升致阻力 D_i与 Ma 的平方成反比。飞机总阻力是两者之和，随 Ma 变化规律如图 2.1 所示。

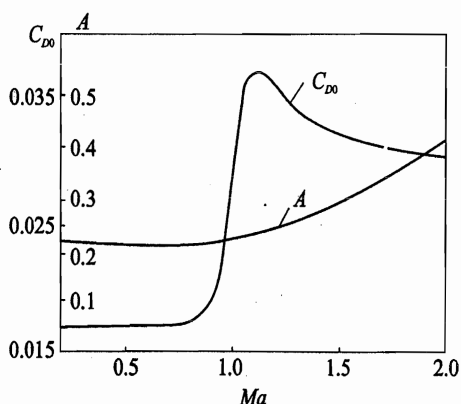


图 2.2　某超声速飞机 C_{D0}和 A 随 Ma 变化曲线

其变化原因可解释如下：飞行 Ma 较低时，由于升力系数 C_L较大，升致阻力 D_i在平飞阻力中占主要地位。随着 Ma 的增加，C_L逐渐降低，升致阻力 D_i也逐渐减小，而零升阻力 D_0则越来越大，在某个飞行 Ma 下，两者恰好相等，此种状态飞机的总阻力最小，即平飞需用推力最小(为 $T_{R.min}$)，升阻比为最大(为 K_{max})，见图 2.1 中 a 点状态。该平飞状态称为有利状态，相应的飞行速度和迎角分别称为有利速度 V_{opt}和有利迎角 α_{opt}。当飞行速度超过有利速度后，零升阻力大于升致阻力，并逐渐在总阻力中占主要地位，随 Ma 逐渐增加。

当飞行 Ma 超过临界 Ma(Ma_{cr})进入跨声速范围($Ma_{cr}<Ma<1.2\sim1.3$)后，由于波阻的出现，使零升阻力系数 C_{D0}开始随 Ma 的增加而急剧增加(通常在 $Ma=1.05\sim1.20$ 之间，大致



按 $Ma^2 \sim Ma^4$ 的比例变化）。这种造成 T_R 曲线的斜率陡增的现象，通常称为声障。为了突破声障，除了采用大推力的喷气发动机外，还需采用低波阻气动布局的飞机。故除了采用大长细比的机身和薄翼型外，应采用小展弦比、大后掠或三角翼平面形状的机翼等。随着 Ma 继续增加，零升阻力系数 C_{D0} 随 Ma 增加而减小，于是平飞需用推力增加又比较平缓。

当飞机进入超声速范围（$Ma > 1.2 \sim 1.3$）时，升致阻力 D_i 因升力系数越来越小，故在总阻力中所占比例也越来越小，总阻力中主要是零升阻力 D_0。由于 C_{D0} 大致与 $1/\sqrt{Ma^2-1}$ 成比例，之后大致与 $1/Ma$ 成比例，所以平飞需用推力大致与 Ma 的一次方成比例继续增加。

3. 平飞需用推力随飞行高度的变化

图 2.3 给出了某超声速歼击机在不同高度上的平飞需用推力曲线。由图 2.3 可见，平飞需用推力曲线随着高度的增加而向右移动。

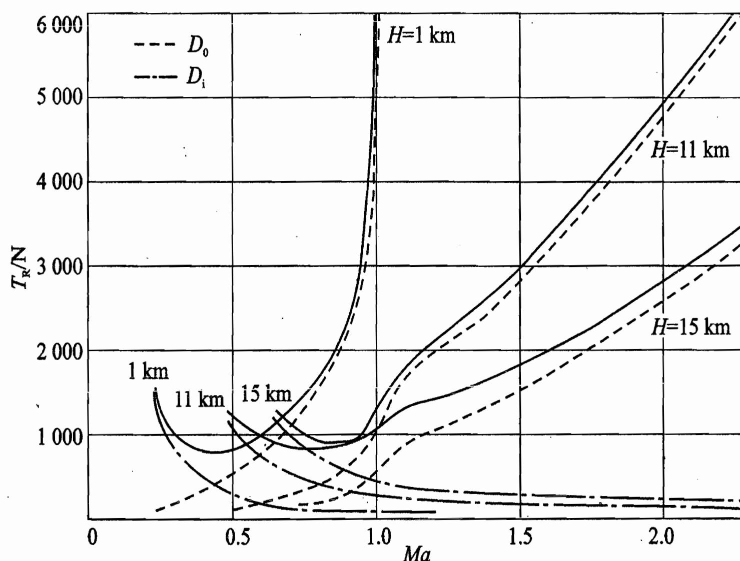


图 2.3　平飞需用推力曲线随高度的变化

其原因是，对于给定的飞机（W 和外形一定），随着飞行高度的增加，系数 K_0 减小，K_i 增加，这样零升阻力越来越小，升致阻力越来越大，从而导致平飞需用推力曲线最低点（$T_{R.min}$）向右移动，相应的有利马赫数 Ma_{opt}（与有利速度 V_{opt} 对应）将随高度增加而增大。在亚声速范围内飞行时，由于最大升阻比 K_{max} 基本上为常数，故 $T_{R.min}$ 基本上不随高度变化而变化。随着高度的增加，Ma_{opt} 逐渐加大，到达某一高度时，有利马赫数可能大于临界马赫数，即 $Ma_{opt} > Ma_{cr}$。在此情况下，飞机出现了波阻，使得总阻力增加，K_{max} 降低，造成 $T_{R.min}$ 增大，因此超声速飞机的平飞需用推力曲线稍微向上移动。

从图 2.3 上还可看出，在超声速范围内，随着飞行高度的增加，平飞需用推力曲线变得比较平缓。这主要是零升阻力在总阻力中总占主要地位，且随飞行高度增加而减小所致。

当然，飞机能否实现定常平飞运动，还取决于发动机能够提供的推力，称为发动机的可用推力 T_a。第1章已介绍过它同样随飞行速度和高度变化，且还与发动机工作状态（油门大小）有关。飞机实现定直平飞时，必须使可用推力 T_a 等于平飞需用推力 T_R，即

$$T_a = T_R \tag{2.6}$$

按上述条件，就可确定飞机的平飞性能。工程上常把可用推力曲线和需用推力曲线画在一张图上，如图2.4和图2.5所示。前者为某跨声速飞机推力曲线图，后者为某超声速飞机推力曲线图。

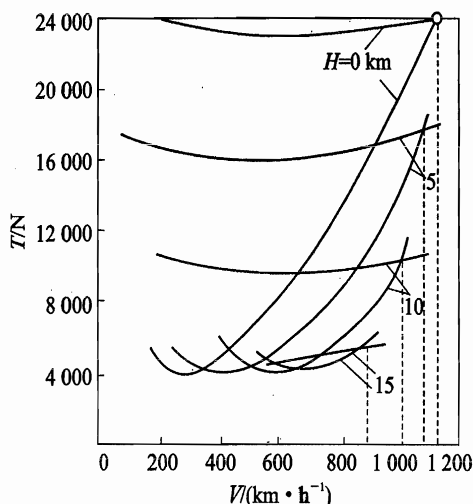


图 2.4　某跨声速飞机推力曲线图

利用推力曲线图来确定飞机飞行性能的方法通常称为简单推力法。

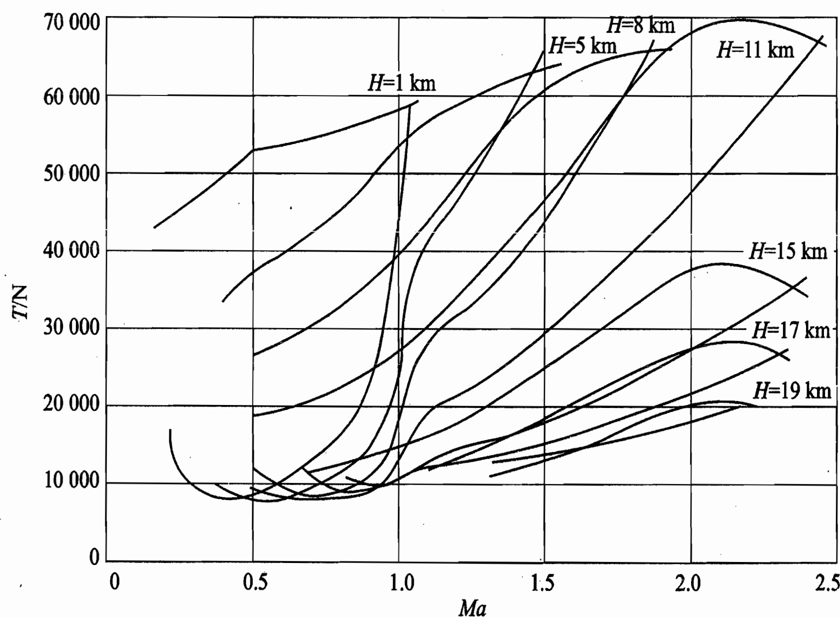


图 2.5　某超声速飞机推力曲线图

2.1.2　最大平飞速度 V_{max}

最大平飞速度 V_{max} 是衡量一架飞机飞行速度大小的指标，是飞机性能的主要指标之一。无论是军用机还是民用机都需要大的 V_{max}，不过对于歼击机来讲更为重要，常常是以 V_{max} 来追击敌机。



最大平飞速度 V_{max} 可由对应各高度上的可用推力曲线和平飞需用推力曲线在右方的交点来确定，此时满足实现定常平飞条件 $T_a=T_R$。在交点右方即 $V>V_{max}$ 区域，$T_a<T_R$，飞机不能保持等速平飞；而在交点左方即 $V<V_{max}$ 区域，$T_a>T_R$，此时可以通过关小油门，降低 T_a 使之等于 T_R 来实现平飞，但速度不是最大。

如果飞机在飞行中使用发动机加力状态，则因可用推力 T_a 加大，T_a 和 T_R 两条曲线的交点将向右移动，V_{max} 随之增大，如图 2.6 所示。对于跨声速飞机，在声速附近，飞机阻力（即需用推力 T_R）随飞行速度急剧增加；打开加力状态后，V_{max} 增加不多。例如某机在 11 km 处，发动机在最大工作状态时，$Ma_{max}=0.97$；而在加力状态时，Ma_{max} 仅达到 1.12（示意图见图 2.6(a)）。对于超声速飞机，V_{max} 处于需用推力曲线变化较平缓的部分；打开加力状态后，V_{max} 可能增大很多。如某机加力状态时 Ma_{max} 可达 2.05（示意图见图 2.6(b)）。

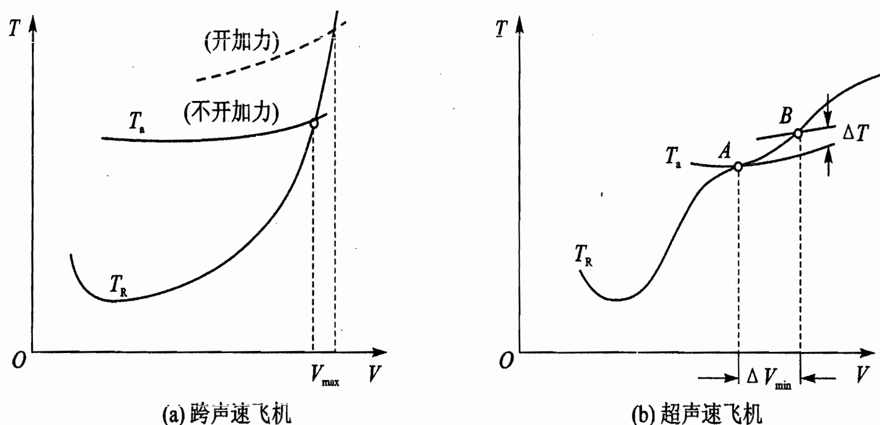


图 2.6　V_{max} 随 T_a 增加的变化

找出不同高度下的 V_{max}，画出其随 H 的变化曲线，如图 2.7 所示。其变化原因可由实现定常平飞条件的关系式(2.6)得出。

$$V_{max}=\sqrt{\frac{2T_a}{C_D\rho S}} \tag{2.7}$$

式中除 S 外，其他三个参数 T_a, C_D, ρ 均随高度变化。对于跨声速飞机，在接近声速时，随高度增加，声速 c 减小，同一飞行速度下 Ma 增加，波阻系数较大，加上 T_a 随高度增加而减小，因而 V_{max} 随高度增加一直减小（图 2.7 中虽然 Ma_{max} 在中低空时略有增加，由于 c 下降显著，故 V_{max} 仍是减小的）。

对于超声速飞机，V_{max} 应在超声速区。在对流层（$H<11$ km）内随着高度增加，同样的原因声速减小导致 Ma 增加，波阻系数减小，加上密度减小，其乘积（$C_D\rho$）减小起主要作用，故 V_{max} 随高度增加而增大。在平流层内，声速不随高度变化，同一飞行速度下，Ma 不随高度而变，故波阻系数不变；而密度仍随高度增加继续减小，为保持平飞，需增加迎角，阻力系数随之增加，其乘积（$C_D\rho$）的减小变得缓慢，T_a 又继续下降，故 V_{max} 又随 H 增加而减小。

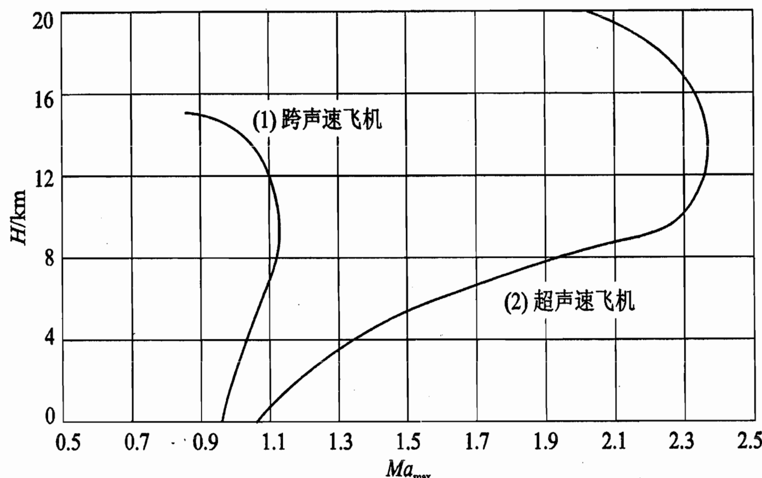


图 2.7 最大平飞速度随高度的变化曲线

实际 V_{max} 还要受到其他一些因素的限制。如超声速飞行时，由于气动力加热，飞机结构温度可能会超过允许承受能力，必须限制温度，通常可通过限制 Ma_{max} 来实现。再如低空大速度飞行时，气动载荷过大会造成飞机结构强度受损，必须受到限制，通常可通过限制 q_{max} 来实现。

2.1.3 最小平飞速度 V_{min}

最小平飞速度是指飞机在某一高度上能作定直平飞的最小速度。可由对应各高度上的可用推力曲线和平飞需用推力曲线在左面的交点来确定。但实际的 V_{min} 会受到其他一些因素的限制，主要是从飞行安全考虑，飞机在低速飞行时，要求迎角较大，此时的升力系数能否满足平飞的要求。因此有受 C_{Lmax} 限制的理想最小平飞速度

$$V_{min}=\sqrt{\frac{2W}{C_{Lmax}\rho S}} \tag{2.8}$$

受允许升力系数 $C_{L.a}$ 限制的最小允许使用平飞速度

$$V_{a}=\sqrt{\frac{2W}{C_{L.a}\rho S}} \tag{2.9}$$

受抖动升力系数限制的抖动最小平飞速度

$$V_{sh}=\sqrt{\frac{2W}{C_{L.sh}\rho S}} \tag{2.10}$$

受最大平尾偏角限制的最小平飞速度

$$(V_{min})_{\delta_{max}}=\sqrt{\frac{2W}{C_{L.\delta_{max}}\rho S}} \tag{2.11}$$

以上的升力系数限制值对于超声速飞机，是飞行 Ma 的函数，如图 1.5 所示。因此，确定最小平飞速度时只能采用图解法。具体步骤是：对于给定飞行高度，取一系列 Ma，计算出平



飞需用升力系数

$$C_{L.R}=\frac{2W}{\rho Sc^2Ma^2} \tag{2.12}$$

得 $C_{L.R}\sim Ma$ 曲线，随后绘制在上述升力系数限制值随 Ma 变化曲线图上，如图 2.8 中 abc 点的连线。连线与最大允许升力系数 $C_{L.a}$ 曲线交点所对应的马赫数为 Ma_{min}，即图中的 d 点。

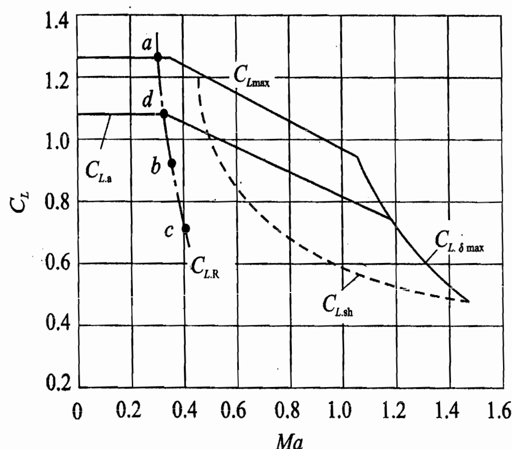


图 2.8 Ma_{min}的图解确定

最小平飞速度除了与上述升力系数有关外，还与发动机可用推力 T_a有关。一般情况下，高空飞行时由于 T_a的下降，V_{min}往往受到 T_a的限制；在低空飞行时，V_{min}由最大允许升力系数 $C_{L.a}$来确定。

2.1.4 平飞速度范围

各高度的定常平飞速度范围介于最大平飞速度和最小平飞速度之间。定常平飞的速度-高度边界称为飞行包线。

对于定常平飞的边界图的确定，首先将实现定直平飞条件式(2.4)改写成

$$\frac{T_R}{W}-\frac{1}{K}=\frac{T_R-D}{W}=n_x=0 \tag{2.13}$$

式中 n_x称切向过载系数，为飞机上的切向可控力与重量之比，详细介绍在第 3 章。

然而按式(2.13)计算出飞机在每一个高度上不同 Ma 的 n_x值，绘成曲线如图 2.9 所示。再令 $n_x=0$，得出 n_x曲线与横轴交点，将这些点的坐标标在纵轴为 H、横轴为 Ma 的坐标系内，且连成曲线，即是飞行包线，如图 2.10 所示。最后将 V_{max}和 V_{min}限制条件附加上，就得出飞机的可用飞行包线。

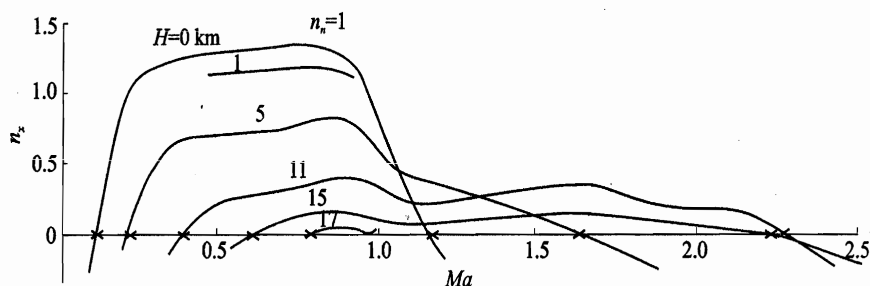


图 2.9 飞机的 $n_x = f(Ma, H)$ 曲线

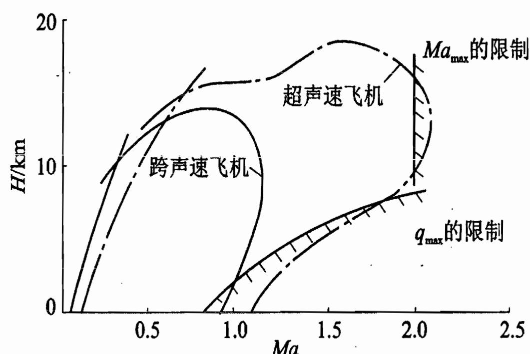


图 2.10 飞机的飞行包线

2.2 上升、下滑性能

2.2.1 定常直线上升运动方程

此时 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t=0$，$\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t=0$，运动方程式(1.44)可简化为

$$\left.\begin{aligned} T &= D + W\sin\gamma \\ L &= W\cos\gamma \end{aligned}\right\}$$

显然，定直上升飞行时的升力比定直平飞时所需升力小，因而定直上升时的阻力 D 也小于定直平飞需用推力 T_R。考虑到定直上升时 γ 角不很大，为实现定直上升，上式可改写成

$$\left.\begin{aligned} T_a &= T_R + W\sin\gamma \\ L &= W \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

这样就可利用推力曲线图(见图 2.4 和图 2.5)，来确定飞机的定直上升性能。

定直上升性能通常用上升角 γ、上升率 V_v、升限 H_{max}、上升时间 t_c 和上升水平距离 R_c 来评价。



2.2.2　定常直线上升运动性能

1. 上升角 γ 和最大上升角 γ_{max}

由方程式(2.14)可得

$$\gamma = \arcsin \frac{(T_a - T_R)}{W} = \arcsin \frac{\Delta T}{W} = \arcsin \left(\frac{T_a}{W} - \frac{1}{K}\right) \tag{2.15}$$

式中 $\Delta T = T_a - T_R$ 称为剩余推力。从推力曲线图上可以看出，不同飞行速度，其剩余推力不同。飞机在 ΔT_{max} 下爬升时，显然

$$\gamma_{max} = \arcsin \frac{\Delta T_{max}}{W}$$

对应的飞行速度称为最陡上升速度 V_γ，该速度与有利速度 V_{opt} 十分接近。

2. 上升率 V_v 和最大上升率 $V_{v,max}$

上升率是指飞机以特定的重量和给定发动机工作状态进行定常上升时在单位时间内上升的高度，也称上升垂直速度，以 V_v 表示。

$$V_v = \frac{dH}{dt} = V\sin\gamma$$

将上升角 γ 变化公式代入，上式又可表示为

$$V_v = \frac{\Delta TV}{W} = \mathrm{SEP} = \left[\frac{T_a}{W} - \frac{1}{K}\right]V \tag{2.16}$$

飞机的上升率 V_v 即为单位重量剩余功率 SEP。从推力曲线图上可得到任一给定 Ma 下剩余推力 ΔT，通过计算可得出上升率随 V，H 的变化规律。每一条曲线最高点代表该高度的最大上升率

$$V_{v,max} = \frac{(\Delta TV)_{max}}{W} \tag{2.17}$$

相应的飞行速度称快升速度 V_{qc}。一般情况下快升速度要稍大于最陡上升速度，即 $V_{qc} > V_\gamma$。

显然，对于歼击机来讲，上升率是一项重要的性能指标。上升率高，表明飞机在空战中能迅速获得高度优势。

由于剩余推力 ΔT 与飞行速度和飞行高度有关（当油门状态一定时），$V_{v,max}$ 难以用式(2.17)解析求得，故在工程计算中常采用图解分析法。

例： 已知某机重力 W=64 800 N，试按图 2.11 所示的飞机在 8 km 高度上的推力曲线，确定其在该高度上的上升性能。

按表 2.2 所示步骤进行计算，并将结果列于表中。再将结果绘出 $\Delta T \sim Ma$ 和 $V_v \sim Ma$ 曲线，如图 2.12 和图 2.13 所示。从这些曲线图上可直接求出定直上升运动的各项性能，列于表 2.3 中。最后可得飞机的快升速度（对应 Ma_{qc}）曲线和最大上升率随高度的变化曲线，如图 2.14和图 2.15 所示。



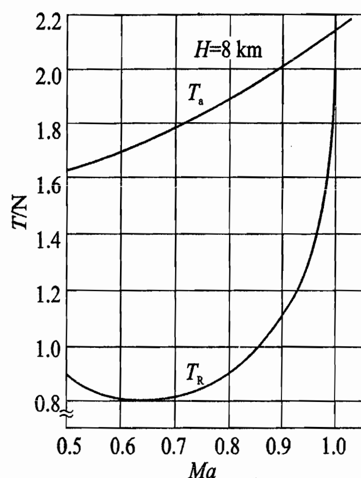


图 2.11 算例在 $H=8$ km 上的推力曲线图

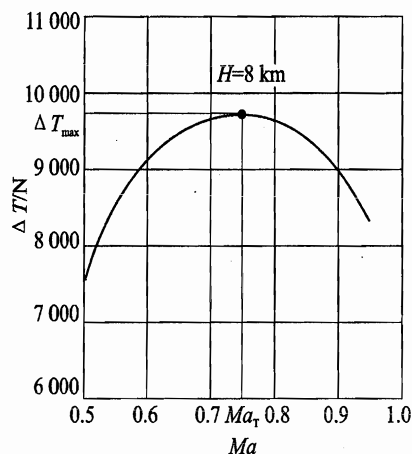


图 2.12 剩余推力随 Ma 变化曲线

表 2.2 上升性能计算示例

Ma	$V/(m \cdot s^{-1})$	$\Delta T/N$	$\sin\gamma$	$V_v/(m \cdot s^{-1})$
选　定	cMa	查图 2.11	$\Delta T/mg$	$\Delta(TV)/mg$
0.5	154	7 512	0.114	17.6
0.6	185	8 904	0.137	25.4
0.7	216	9 532	0.147	31.7
0.8	246	9 483	0.146	36.0
0.9	277	8 846	0.136	37.8
1.0	308	3 020	0.037	11.4

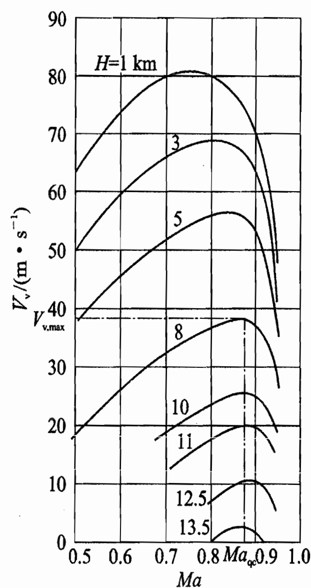


图 2.13 上升率随 Ma,H 变化曲线

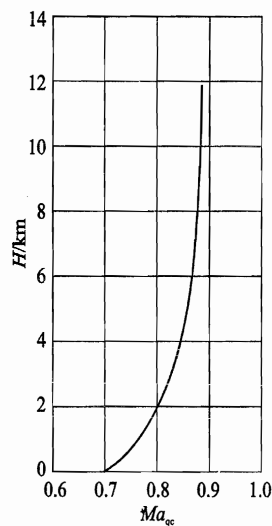


图 2.14 快升速度(对应 Ma_{qc})随高度变化曲线



表 2.3 上升性能各项指标(H=8 000 m)

项 目	$\gamma_{max}/(°)$	Ma_γ	$V_\gamma/(m \cdot s^{-1})$	$V_{vmax}/(m \cdot s^{-1})$	Ma_{qc}	$V_{qc}/(m \cdot s^{-1})$
结 果	8.5	0.75	231	38	0.875	270

3. 静升限

理论静升限是指飞机以特定的重量和给定发动机工作状态能够保持等速直线平飞的最大高度,也就是最大上升率 $V_{v.max}$ 等于零的飞行高度,以 $H_{max.a}$ 表示。

由推力曲线图(如图 2.4)可知,当高度增加时,发动机可用推力曲线下移,平飞需用推力曲线右移。飞机上升至某一极限高度,可用推力曲线恰与需用推力曲线在某点相切。此时,切点处 $\Delta T=0$,因而 $V_{v.max}=0$,飞机只能以一个速度进行等速平飞。该极限高度即是理论静升限。它所对应的速度在通常情况下接近有利速度 V_{opt}。

从上升率公式可见,若改写成 $\Delta t=\Delta H/V_v$,则当飞机接近理论静升限时,由于 V_v 接近零,上升某一段高度所需时间 Δt 趋于无穷大,这是不现实的。为此又定义实用静升限。

实用静升限定义为飞机以特定的重量和给定发动机工作状态作等速直线平飞时,还具有最大上升速率为 5 m/s 或 0.5 m/s 的飞行高度,以 $H_{max.s}$ 表示。前者为对超声速飞机的取值,后者为对亚声速飞机的取值。

若已给出了如图 2.15 所示的 $V_{v.max}$ 随 H 的变化曲线,则理论静升限 $H_{max.a}$ 和实用静升限 $H_{max.s}$ 从图上很容易确定。

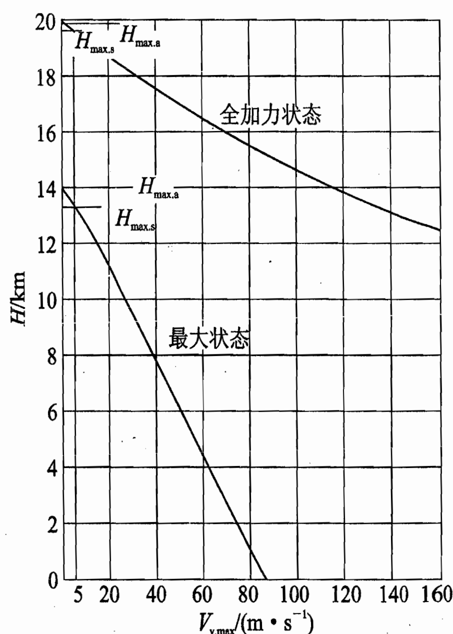


图 2.15 $V_{v.max}$ 随 H 的变化曲线

4. 上升时间

如飞机按最大上升率 V_{max} 的快升速度上升到预定高度,则所需的上升时间最短。显然上升时间愈短,性能愈好。从海平面($H=0$)上升到预定高度的最短上升时间可由运动学方程式(1.51)得出

$$t_{c.min}=\int_0^H \frac{dH}{V_{v.max}} \tag{2.18}$$

式中 $V_{v.max}$ 是飞行高度的函数。因此不能求得解析解,只能采用数值或图解积分法求 $t_{c.min}$。

用数值积分法时,先将 $V_{v.max}(H)$ 转绘成 $1/V_{v.max}(H)$,如图 2.16 所示。再将高度分成若干个小区段 ΔH,则第 i 个区段上升时间为



$$\Delta t_i = \left(\frac{\Delta H}{V_{\text{v.max}}}\right)_i$$

式中$1/V_{\text{v.max}}$取 i 区段的平均值。于是最短上升时间近似为各区段上升时间之和，即

$$t_{\text{c.min}} = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\Delta H}{V_{\text{v.max}}}\right)_i \tag{2.19}$$

式(2.18)的精确积分应是图 2.16 曲线下面的面积，而式(2.19)则是用各区段 ΔH_i 的梯形面积来代替，故为近似值。但在工程计算时，只要取有限个区段进行计算就可得到满意结果。最后可画出上升时间 t 随 H 的变化曲线，如图 2.17 所示。图中直线即为理论静升限。

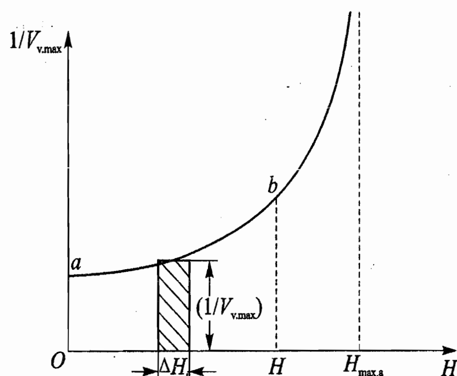


图 2.16　$1/V_{\text{v.max}}$随 H 变化曲线

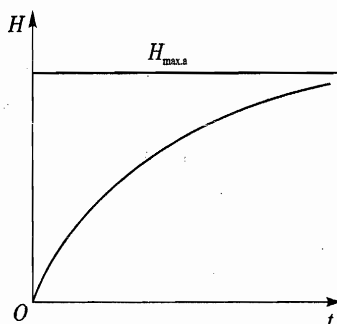


图 2.17　上升时间 t 随 H 的变化曲线

从确定最短上升时间 $t_{\text{c.min}}$可知，飞机应按每个高度的 $V_{\text{v.max}}$上升，而与其相对应的飞行速度即快升速度 V_{qc}也是随高度变化的，见图 2.14。因此飞机在上升过程中，有速度梯度存在，即

$$\frac{\mathrm{d}V_{\text{qc}}}{\mathrm{d}H} = \frac{\mathrm{d}V_{\text{qc}}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}H} = \frac{1}{V_{\text{v.max}}} \cdot \frac{\mathrm{d}V_{\text{qc}}}{\mathrm{d}t} \tag{2.20}$$

这就意味着上升过程中有加速度 $\mathrm{d}V_{\text{qc}}/\mathrm{d}t$ 存在，即有动能变化。而确定 $t_{\text{c.min}}$时的 $V_{\text{v.max}}$则是按定常假设确定的。因此，对于低亚声速飞机来说，其快升速度 V_{qc}随高度变化很小，按定常假设确定最短上升时间有一定精度。但对高机动性飞机，例如超声速歼击机在上升过程中快升速度 V_{qc}变化的影响，必须加以考虑，也就是必须考虑动能变化的影响。

5. 上升水平距离

飞机从海平面以最大上升率上升至预定高度所经过的水平距离，以 R_{c}表示。由运动学方程式(1.51)可得

$$R_{\text{c}} = \int_0^H \cot \gamma \mathrm{d}H \tag{2.21}$$

式中因 $\gamma = \arcsin \dfrac{\Delta T}{W}$，$\Delta T$ 随高度而变，所以 γ 亦是飞行高度的函数。故式(2.21)亦只能用数值或图解积分求解。



2.2.3 非定常上升运动性能

对于超声速飞机，由于上升过程中飞行速度随高度变化较大，用 2.2.2 节介绍的方法计算上升性能，会引起较大的误差，故必须计及上升过程中速度变化(即动能变化)。此时，可认为飞机作非定常直线上升运动，其运动方程采用式(1.46)的简化形式，即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=T_{\mathrm{a}}-D-W\sin\gamma \\ &L=W \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

1. 上升率

由式(2.22)中第一式两边乘以 V，并注意到 $\Delta T=T_{\mathrm{a}}-D, V_{\mathrm{v}}=\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=V\sin\gamma$，则考虑动能变化的上升率为

$$V_{\mathrm{v}}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\Delta TV}{W}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \tag{2.23}$$

式中$\dfrac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}t}$可改写为

$$\frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}H}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}H}V_{\mathrm{v}}$$

代入上式后得

$$V_{\mathrm{v}}=\frac{\Delta TV}{W}\frac{1}{1+\dfrac{1}{2g}\dfrac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}H}}=V_{\mathrm{v}}^{*}\cdot\chi \tag{2.24}$$

$$\chi=\frac{1}{1+\dfrac{1}{2g}\dfrac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}H}}=\frac{1}{1+\dfrac{V}{g}\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}H}}$$

式中 $V_{\mathrm{v}}^{*}=\dfrac{\Delta TV}{W}$为未计及动能变化的定常上升率，$\chi$ 为考虑动能变化所引起的修正系数。考虑动能变化的上升率等于定常上升率乘以修正系数，将式(2.23)改写成如下形式：

$$\frac{\Delta TV}{W}=\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \tag{2.25}$$

可以看出，等式左边表示单位飞机重量的剩余功率；右边第一项表示位能变化率，第二项表示动能变化率。当加速爬升时，即$\dfrac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}H}$为正值，$\chi<1$，故 $V_{\mathrm{v}}<V_{\mathrm{v}}^{*}$。这是因为加速爬升时，有一部分发动机剩余功率转化为飞机的动能，余下转化位能的功率减少了，上升角就减小，所以飞机的实际上升率就比定常上升率小。当减速爬升时，即$\dfrac{\mathrm{d}V^2}{\mathrm{d}H}$为负值，$\chi>1$，故 $V_{\mathrm{v}}>V_{\mathrm{v}}^{*}$。这是因为在减速爬升中，有一部分动能转化为飞机的位能，上升角加大，飞机实际上升率就大于定常上升率。



2. 上升时间

式(2.25)表明，飞机在上升过程中所具有的剩余功率，既可用于提高飞机的位能，也可增加飞机的动能。如假设飞机在上升过程中总能量不变，即没有能量损失，总能量始终等于位能和动能之和，且能相互转换，则在此情况下，飞机所具有的总能量为

$$E = WH + \frac{1}{2}\frac{W}{g}V^2$$

飞机单位重量所具有的总能量用 H_e表示，则为

$$H_e = H + \frac{V^2}{2g} \tag{2.26}$$

因为它的单位与高度单位相同，故 H_e又称为能量高度。相应的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}H_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \tag{2.27}$$

比较式(2.25)和式(2.27)，得

$$\frac{\mathrm{d}H_e}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta TV}{W} = V_v^*$$

由上式积分可得最短上升时间

$$t_{c.\min} = \int_{H_{e.1}}^{H_{e.2}} \frac{\mathrm{d}H_e}{V_{v.\max}^*} \tag{2.28}$$

式中 $V_{v.\max}^* = f(H_e)$。与定常的最短上升时间式(2.18)相比，公式的形式是相同的，差别仅在于动能变化的上升时间应按能量高度计算。同样，具体计算仍只能用数值或图解积分进行。

3. 最快上升轨迹

飞机从一个速度、高度上升到另一个速度、高度的最快轨迹，是一个优化问题。这里仅用近似方法来确定。如果飞机在上升过程中，在每个能量高度(即每个速度、高度)上，用最大上升率 $V_{v.\max}^*$爬升，则式(2.28)表明，飞机肯定上升最快。因此只要绘出以高度 H 和马赫数 Ma 为函数的等 H_e曲线族和等 $V_{v.\max}^*$ 曲线族，两族曲线相切点所形成的轨迹即是最快上升轨迹。具体的确定方法简要叙述如下：

① 在上升率随 Ma，H 变化曲线(见图 2.13)上作水平线，读出与曲线相交的各点上的 Ma，H 值，并转绘成等 V_v^* 曲线族，如图 2.18 所示。

② 按式(2.26)计算得等 H_e曲线族，也绘在图 2.18 上。

③ 在图 2.18 中画与各等 H_e曲线平行的曲线族(图中虚线)，使其与各等 V_v^* 曲线相切。显然，切点上的 V_v^* 值为在该能量高度和 Ma 上的最大可能值 $V_{v.\max}^*$。

④ 由切点的 $V_{v.\max}^*$和 H_e可转绘出 $1/V_{v.\max}^* \sim H_e$曲线，用图解积分法按式(2.28)可计算出最短上升时间。

⑤ 连接各切点，即得所求的最快上升轨迹。图 2.18 中画出了从海平面高度以一定的 Ma (A 点)上升到给定终点 B 所经的最短时间轨迹。很明显，图 2.18 反映的是亚声速飞机的



情况。

对于超声速飞机，在从亚声速到超声速飞行过程中，由于上升率变化较大，出现两个峰值等，如图 2.19 所示。因此绘制的等 $V^*_{v.max}$ 曲线不很规则，再加上跨声速区飞行时阻力陡增，发动机可用推力可能处于临界状态，故最快上升轨迹在亚声速和超声速区可仍按每个能量高度上的最大上升率 $V^*_{v.max}$ 爬升；在跨声速区可以下降加速飞行，让飞机尽快通过。其上升轨迹如图 2.20 中点画线所示。

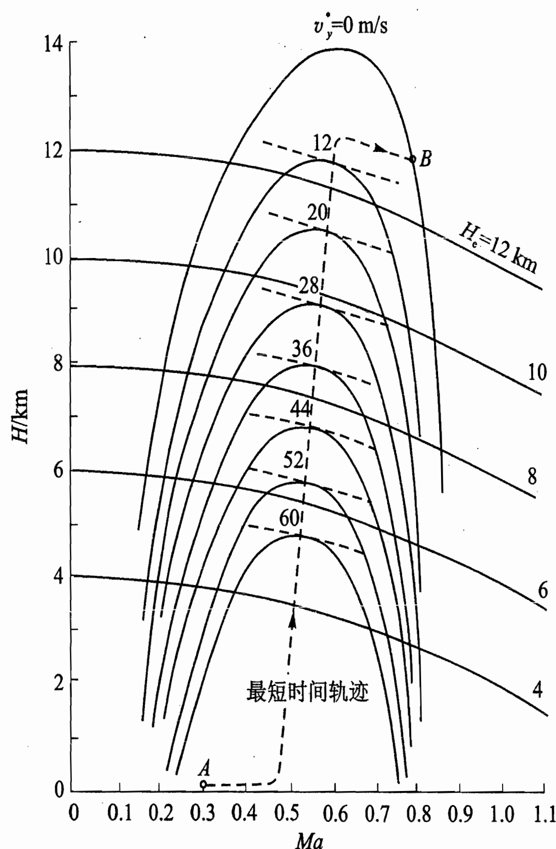


图 2.18　亚声速飞机最快上升轨迹示意图

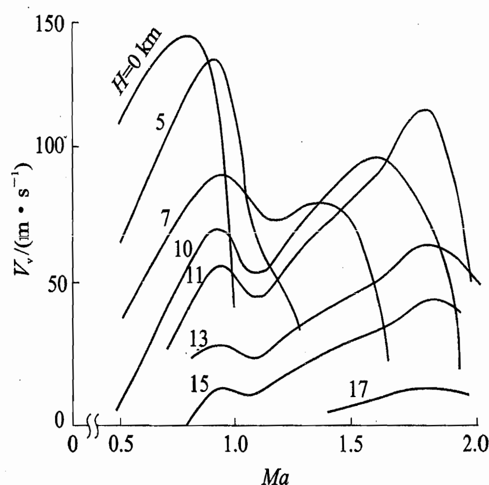


图 2.19　超声速飞机上升率随 Ma,H 变化规律

显然，这种最快上升轨迹在实际飞行过程中有时难以控制。如图中实际的超声速飞机最佳上升轨迹，可以先按等 Ma 以亚声速 Ma= 0.75 爬升至 H=7 800 m，再下降加速通过阻力陡增的跨声速区，一直下降到 H=7 500 m，速度增至 Ma= 1.25；然后加速爬升到 H=12 600 m，Ma 加大到 2.28，再以等 Ma 爬升至 H=17 800 m 高度。可见其实际最佳上升轨迹与最快上升轨迹是接近的。



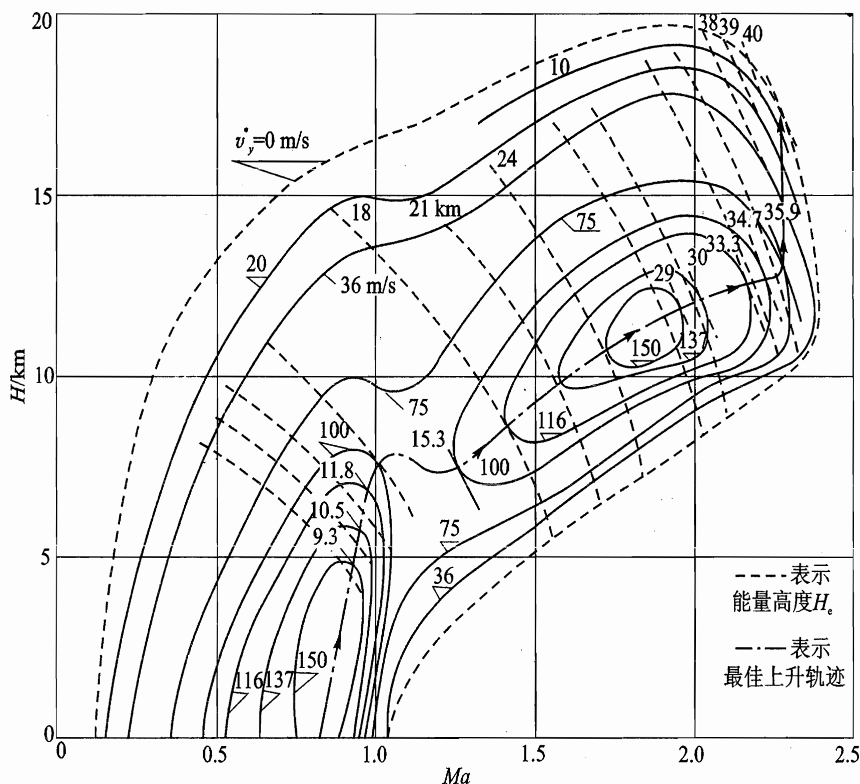


图 2.20　超声速飞机最快上升轨迹示意图

2.2.4　定常下滑运动性能

飞机的飞行轨迹向下倾斜，但倾斜度不大的接近直线的飞行称为下滑。确定下滑时经过的水平距离、下滑角和下滑时间等，对于计算续航性能和着陆性能有重要意义。此时的轨迹倾角 $\gamma<0$。

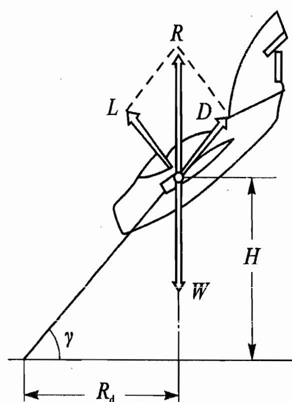


图 2.21　定常下滑时的力平衡关系

这里假设飞机的定常下滑是等速直线运动，下滑角不变，此时发动机处于慢车状态，发动机推力近于零。其运动方程由式(1.48)可简化为

$$\left.\begin{aligned} D &= W\sin\gamma \\ L &= W\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2.29}$$

即气动力刚好与重力平衡，即 $R=W$，如图 2.21 所示。于是下滑角 γ 等于

$$\gamma = \arctan\frac{D}{L} = \arctan\frac{C_D}{C_L} = \arctan\frac{1}{K} \tag{2.30}$$

若开始下滑时飞行高度为 H，则下滑过程中飞机所经过的水平距离为



$$R_d = \frac{H}{\tan\gamma} = HK \tag{2.31}$$

可见，从一定高度开始下滑，R_d的大小取决于升阻比 K。若飞机以 K_{max}状态下滑，则下滑角最小，所经过的水平距离最长。

下滑时由于 $T_a \approx 0$，故飞机下降率为

$$V_v = -\frac{DV_d}{W} \tag{2.32}$$

式中下滑速度可由力的平衡方程求得，即

$$V_d = \sqrt{\frac{2W}{C_R \rho S}} \tag{2.33}$$

式中 $C_R = \sqrt{C_D^2 + C_L^2}$，为空气动力系数。飞机以 K_{max}状态下滑，其下滑速度为有利速度 V_{opt}。

下滑时间可由下滑速度水平分量除以下滑时经过的水平距离得

$$t_d = \frac{R_d}{V_d \cos\gamma} \tag{2.34}$$

如果下滑时要考虑发动机推力，则可近似地用C'_D代替上述各式中的C_D进行计算，即

$$C'_D = C_D - C_T$$

式中 $C_T = 2T_a/\rho V^2 S$。

2.3　定常飞行状态及其与操纵的关系

2.3.1　平飞范围的划分

在 2.1.4 节确定的飞行包线内，飞机可以作定常直线平飞、直线加减速平飞和定常直线上升等各种状态的飞行。这些飞行状态的实现或改变是由驾驶员通过操纵油门大小和改变飞机迎角的大小来完成的。实现上述飞行状态的操纵方法与飞机所处的平飞范围有关。

常把飞行包线分为第一平飞范围和第二平飞范围，如图 2.22 所示。其分界点相应于最大剩余推力 ΔT_{max}所对应的最陡上升速度 V_v。由于一般情况下 V_v 与有利速度 V_{opt}接近，所以常以有利速度 V_{opt}（或 Ma_{opt}）作为划分第一和第二飞行范围的分界点。各飞行高度上的有利速度连线如图 2.22(a)上虚线所示，将飞行包线分为两个区。在有利速度曲线右方区域（相当于 T_R曲线正斜率段）称为第一平飞范围；在有利速度曲线左方区域（相当于 T_R曲线负斜率段）称为第二平飞范围。

显然，在第一平飞范围内，若飞机由高速平飞转到低速平飞时（图 2.22(b)中 1 点至 1′点），则需增大迎角和减小可用推力，此时驾驶员应同时后拉驾驶杆和油门杆；若飞机由低速平飞转到高速平飞时（图 2.22(b)中 1′点至 1 点），则必须减小迎角和增大可用推力，此时驾驶



员应同时向前推驾驶杆和油门杆。这种操纵动作符合驾驶员操纵习惯，故第一平飞范围属于正操纵区。然而，在第二平飞范围内，操纵动作却不同。同样飞机由高速平飞转到低速平飞时(图 2.22(b)中 2 点至 2′点)，驾驶员要拉杆以增加迎角，同时推油门杆以增加发动机可用推力 T_a，达到与平飞需用推力 T_R 相等，实现等速平飞；而飞机由低速转到高速平飞时(图中 2′点至 2 点)，则驾驶员应前推驾驶杆和后拉油门杆。这种操纵动作与驾驶员操纵习惯相反，故第二平飞范围属于反操纵区。

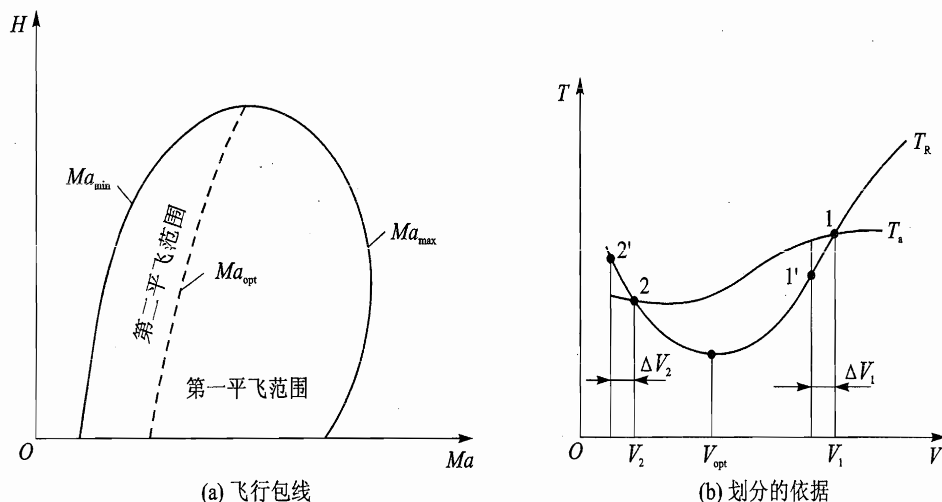


图 2.22　平飞范围区的划分

对于超声速飞机，由于跨声速波阻影响，平飞需用推力 T_R 特性曲线的变化可能在某些飞行高度上与 T_a 曲线出现几个交点。如图 2.23 所示的是某机 $H = 17$ km 的推力曲线图。图中每个交点对应一个平飞速度，其中 Ma_A 和 Ma_B 分别为亚声速区最小和最大平飞速度，Ma_C 和 Ma_D 分别为超声速区最小和最大平飞速度。因而在飞行包线上出现两个平飞速度范围。对应每个平飞速度范围都存在一个相应的 ΔT_{max} 和最陡上升速度 V_γ，故飞机有两个最大上升率 $V_{v.max}$，超声速区的上升率比亚声速区的大。按理论静升限定义，飞机将有两个理论升限，超声速区的理论升限比亚声速区的高得多。同样的超声速平飞区也可被相应的最陡上升速率 V_γ 分成两个区，其右面为正操纵区，左面为反操纵区。当然，随着飞行高度增加到某一高度后，亚声速平飞区将消失，飞机只能用超声速飞行。

一般来说，在高空超声速飞行时，由于有较大的速度和高度储备，在反操纵区飞行危险不大，虽会导致高度损失，但还来得及补救。但在低空低速飞行时，在反操纵区飞行就比较危险，故第一平飞范围成为低空低速时实际使用的平飞范围，有利速度 V_{opt} 就成为该区飞行状态的最小允许平飞速度。



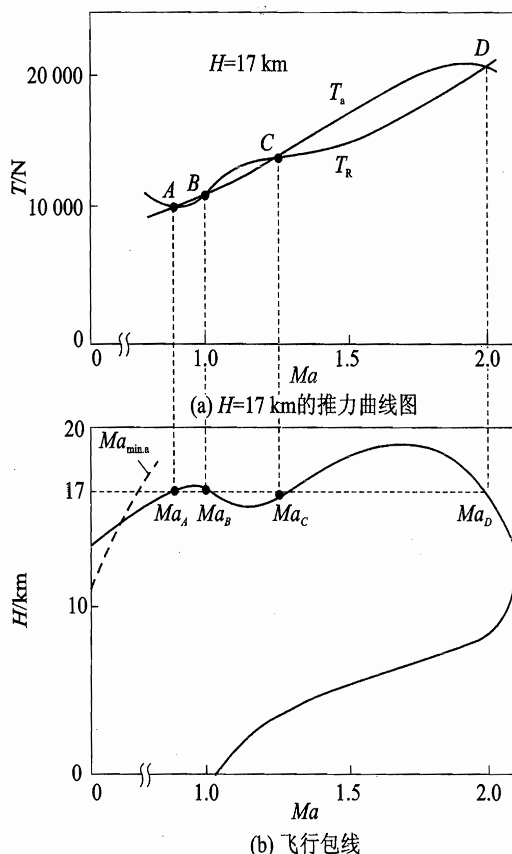


图 2.23　某超声速飞机平飞范围区的特点

2.3.2　飞行状态与操纵的关系

1. 定常平飞状态

所有位于平飞需用推力 T_R 曲线上的每一点，都表示飞机在某高度上的等速平飞所需推力，即是阻力，并且都有一定的平飞迎角和平飞速度与之对应。在同一个高度上，若改变油门位置，则可用推力曲线 T_a 将上下移动，与平飞需用推力曲线交于不同的点。这些交点处，因满足平衡条件 $T_a = T_R$，$L = W$，所以飞机能实现不同速度的等速平飞状态，故平飞需用推力曲线可称为平飞状态曲线。

下面进一步讨论飞机定直平飞状态的运动特性。当飞机在正操纵区定直平飞时，如图 2.22中的 1 点处，由于某种扰动，造成飞行速度减小 $\Delta V_1 < 0$，飞机力的平衡将破坏。若驾驶员仍保持原有操纵状态(即驾驶杆和油门固定不动)，由推力曲线图可见，将出现剩余推力 $\Delta T = T_a - T_R > 0$，飞机要加速飞行，其加速度为

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{\Delta T}{W} g$$

故其趋势定使飞机加速平飞，直至回到原来的平衡状态 1。同样，扰动引起速度增加 $\Delta V_1 > 0$，



则出现剩余推力 $\Delta T<0$,飞机将减速平飞运动,直至回到原平衡状态 1。因此,正操纵区的各点平飞状态是稳定的,或者说其力的平衡是稳定的。

而飞机在反操纵区定直平飞时,如图 2.22 中的 2 点处,同样原因造成速度减小 $\Delta V_2<0$,飞机力的平衡状态破坏。若驾驶员仍保持原有操纵,由推力曲线图上看到,出现剩余推力 $\Delta T<0$,飞机将要继续减速运动,偏离原平衡状态 2 会愈来愈远。扰动引起速度增加 $\Delta V_2>0$,则剩余推力 $\Delta T>0$,使飞机继续加速运动,同样偏离原平衡状态。因此,反操纵区的各点平飞状态是不稳定的,即其力的平衡是不稳定的。

正是由于反操纵区力的平衡状态不稳定,在该区实现不同速度的平飞操纵,必须是反操纵;低速平飞转高速平飞时,驾驶员需前推驾驶杆和后拉油门杆等。

2. 定常上升状态

先讨论仅操纵驾驶杆的情况。设飞机原在图 2.24 中的 a 点处平飞。若驾驶员只推驾驶杆使升降舵下偏而不动油门,则经过一短暂时间后,飞机迎角由 α_a 减小到 α_b。按平飞条件 $V=\sqrt{\dfrac{2W}{\rho SC_{L\alpha}\alpha}}$,飞行速度则由 V_a 增大到 V_b。由于未操纵油门,b 点处 $T_a<T_R$,剩余推力 ΔT 为负值,轨迹倾角 $\gamma=\arcsin\dfrac{\Delta T}{W}<0$,因此飞机处于以 V_b 速度的定常直线下滑状态。若驾驶员拉杆使升降舵上偏而不动油门,则经过一短暂时间后,迎角由 α_a 增大至 α_c,速度由 V_a 减小至 V_c,因油门未动,c 点处 $T_a>T_R$,剩余推力 ΔT 为正值,轨迹倾角 $\gamma>0$,因此飞机处于以速度 V_c 的定常直线爬升状态。

再讨论仅操纵油门杆的情况,同样只讨论正操纵区。设飞机原在图 2.25 中的 a 点处平飞,若驾驶员只推油门杆加大油门而不动驾驶杆,则飞机迎角和飞行速度未变,但因出现剩余推力 $\Delta T>0$,经过一短暂时间,飞机将以原速度 V_a 定常直线爬升。相反,如果收油门杆减小油门而不动驾驶杆,此时剩余推力 $\Delta T<0$,经过一短暂时间,飞机将以原速度 V_a 定常直线下滑。

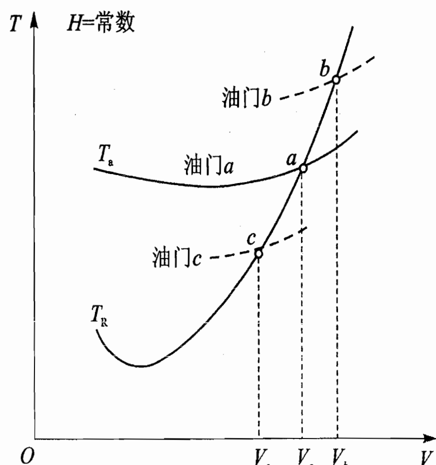


图 2.24 驾驶杆操纵时飞行状态变化

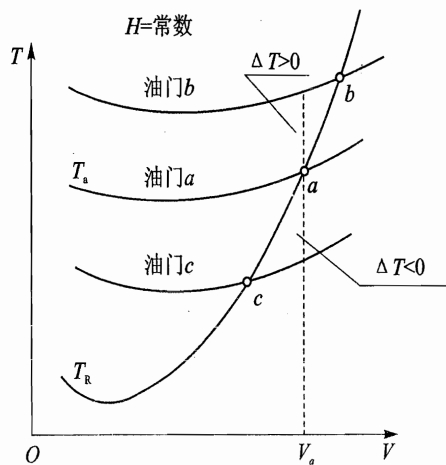


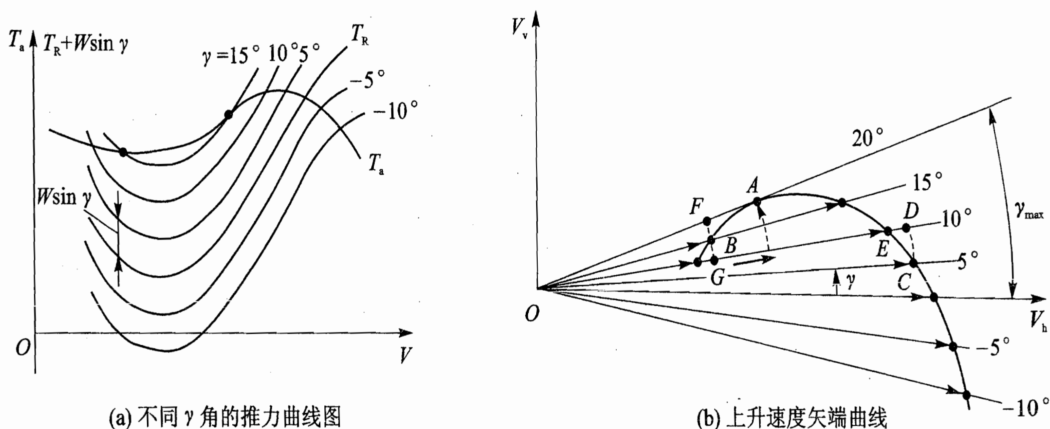
图 2.25 油门杆操纵时飞行状态变化



下面进一步讨论飞机定直上升、下滑状态的运动特性。由简化的运动方程式(1.49)可知，定常直线运动时力的平衡关系为

$$\left.\begin{aligned} T_a &= T_R + W\sin\gamma \\ L &= W \end{aligned}\right\} \tag{2.35}$$

现将重力的水平分力和平飞需用推力合在一起，求得不同轨迹倾角的推力需用曲线。对于给定γ角，由于$W\sin\gamma$是与速度无关的常量，故不同γ角的需用推力曲线仅是在T_R曲线处上下移动，如图2.26(a)所示。这些曲线族与可用推力曲线T_a相交的各点的飞行状态，均满足力平衡条件式(2.35)，飞机处于不同γ的定常直线上升或下滑状态。对每个γ角，这两条线最右交点对应的速度为定常上升或下滑的最大速度。随着γ角增大，上升的最大速度和上升的速度范围均在缩小。这些结果如将不同γ角时的最大速度转绘在V_v(垂直速度)和V_h(水平速度)平面内，则会看得更清楚。把速度矢端点连成光滑曲线，如图2.26(b)所示。这曲线称为上升速度矢端曲线，也称上升极线。



(a) 不同γ角的推力曲线图　　(b) 上升速度矢端曲线

图2.26　定直上升、下滑特性的确定图

对照图2.26(a)和(b)可知，矢端曲线上的A点对应最大上升角γ_{max}状态，近似为第一和第二飞行范围的分界点。矢端曲线上的各点代表飞机处在等速上升状态；矢端曲线以上的区域表示飞机处于减速上升状态；矢端曲线以下的区域则表示飞机处于快速上升状态。

利用矢端曲线讨论定直上升运动的特性是很方便的。在第一飞行范围(正操纵区)，观察矢端曲线上的C点，飞机以$\gamma=5°$作定直上升运动；当受到某个干扰，造成$\Delta V>0$时，飞机力的平衡状态受到破坏，若驾驶员保持原有操纵，由推力曲线图可见，出现剩余推力$\Delta T=T_a-(T_R+W\sin\gamma)<0$，飞机将处在减速上升区，最终能回到定直上升的$C$状态。当扰动引起$\Delta V<0$，则出现剩余推力$\Delta T>0$，飞机处在加速上升状态区，最终也回到$C$状态。因此，可以说第一飞行范围内矢端曲线上各点的定直上升状态是稳定的。

如果欲使飞机从C状态转至E状态($\gamma=10°$的定直上升状态)，此时，驾驶员只需拉杆即

可实现。尽管在操纵瞬时，速度尚来不及改变而位于图中 D 点，但由于 D 状态处 $\Delta T=T_a-(T_R+W\sin\gamma)<0$ 速度减小，飞机处于减速上升状态，最终会实现 $\gamma=10°$ 的定直上升状态。这表明在第一飞行范围内，操纵是正常的。

而在第二飞行范围(反操纵区)情况就不同了。观察矢端曲线上的 B 点，飞机以 $\gamma=15°$ 作定直上升运动，当受到某干扰出现 $\Delta V>0$，飞机力的平衡状态受到破坏，驾驶员不加操纵时，由于剩余推力 $\Delta T=T_a-(T_R+W\sin\gamma)>0$ 存在，飞机处于加速上升状态区，最终偏离定直上升的 B 状态。若扰动引起 $\Delta V<0$，则出现剩余推力 $\Delta T<0$，飞机处于减速上升状态区，最终也偏离原 B 状态。故第二飞行范围内矢端曲线上各点的定直上升状态是不稳定的。

在该区内欲使飞机从 B 状态转至 A 状态($\gamma=20°$ 的定直上升状态)，如仍按第一飞行范围的操纵方法，即后拉杆，则在开始瞬时速度尚来不及改变，而落在减速上升区的 F 点，因而速度继续减小，永远不可能进入速度较大的 A 状态。此时，欲实现转至 A 状态飞行，可以推杆使飞机转入 γ 较小的加速上升区的 G 状态，然后使飞机加速到 A 状态速度再拉杆。可见，在第二飞行范围内，按正常操纵是不可能实现预定上升状态改变的。

综上所述，由于第一和第二飞行范围作用于飞机上的力的平衡状态的不同特性，使保持和改变飞行状态的操纵规律也不相同。在第一飞行范围内，只动驾驶杆而不动油门，飞行状态将由定直平飞转至定常上升或下滑，且其飞行速度相应减小或增大；只动油门而不动驾驶杆，飞行状态将由定直平飞转至定常上升或下滑，但其飞行速度保持不变。只有同时协调操纵驾驶杆和油门，飞机才能从一个定直平飞状态转到另一个定直平飞状态。而第二飞行范围内，各定直飞行状态是不稳定的，实现不同状态的操纵必须是复杂的反操纵。因此，为了安全起见，尤其是在飞机没有足够的高度和速度储备的情况下，应避免在反操纵区飞行。

2.3.3 定常飞行状态的主要因素分析

前面讨论的平飞性能和上升性能，人们统称为飞机基本飞行性能，因为这些性能主要是根据推力曲线图来确定的。气动布局、飞机构形参数的改变，势必会影响平飞需用推力曲线；发动机特性改变，则会影响可用推力曲线，从而改变推力曲线图，导致飞行性能的变化。

从已经引出的平飞需用推力表达式

$$T_R=D_0+D_i=C_{D0}\frac{1}{2}\rho V^2S+\frac{AW^2}{\frac{1}{2}\rho V^2S}=\frac{W}{K}$$

和上升率表达式

$$V_v=\frac{\Delta TV}{W}=\left(\frac{T_a}{W}-\frac{1}{K}\right)V$$

可见，翼载 W/S、推重比 T/W 和升阻比 K 等综合参数对性能影响是很明显的，而且这些参数对飞机机动性能也有重要影响，因此在飞机设计时特别受到重视。但由于其中任一个参数的改变会对其他参数产生影响，因此不直接讨论这些综合参数，仅讨论每个单独因素的影

可实现。尽管在操纵瞬时，速度尚来不及改变而位于图中 D 点，但由于 D 状态处 $\Delta T=T_a-(T_R+W\sin\gamma)<0$ 速度减小，飞机处于减速上升状态，最终会实现 $\gamma=10°$ 的定直上升状态。这表明在第一飞行范围内，操纵是正常的。

而在第二飞行范围(反操纵区)情况就不同了。观察矢端曲线上的 B 点，飞机以 $\gamma=15°$ 作定直上升运动，当受到某干扰出现 $\Delta V>0$，飞机力的平衡状态受到破坏，驾驶员不加操纵时，由于剩余推力 $\Delta T=T_a-(T_R+W\sin\gamma)>0$ 存在，飞机处于加速上升状态区，最终偏离定直上升的 B 状态。若扰动引起 $\Delta V<0$，则出现剩余推力 $\Delta T<0$，飞机处于减速上升状态区，最终也偏离原 B 状态。故第二飞行范围内矢端曲线上各点的定直上升状态是不稳定的。

在该区内欲使飞机从 B 状态转至 A 状态($\gamma=20°$ 的定直上升状态)，如仍按第一飞行范围的操纵方法，即后拉杆，则在开始瞬时速度尚来不及改变，而落在减速上升区的 F 点，因而速度继续减小，永远不可能进入速度较大的 A 状态。此时，欲实现转至 A 状态飞行，可以推杆使飞机转入 γ 较小的加速上升区的 G 状态，然后使飞机加速到 A 状态速度再拉杆。可见，在第二飞行范围内，按正常操纵是不可能实现预定上升状态改变的。

综上所述，由于第一和第二飞行范围作用于飞机上的力的平衡状态的不同特性，使保持和改变飞行状态的操纵规律也不相同。在第一飞行范围内，只动驾驶杆而不动油门，飞行状态将由定直平飞转至定常上升或下滑，且其飞行速度相应减小或增大；只动油门而不动驾驶杆，飞行状态将由定直平飞转至定常上升或下滑，但其飞行速度保持不变。只有同时协调操纵驾驶杆和油门，飞机才能从一个定直平飞状态转到另一个定直平飞状态。而第二飞行范围内，各定直飞行状态是不稳定的，实现不同状态的操纵必须是复杂的反操纵。因此，为了安全起见，尤其是在飞机没有足够的高度和速度储备的情况下，应避免在反操纵区飞行。

2.3.3 定常飞行状态的主要因素分析

前面讨论的平飞性能和上升性能，人们统称为飞机基本飞行性能，因为这些性能主要是根据推力曲线图来确定的。气动布局、飞机构形参数的改变，势必会影响平飞需用推力曲线；发动机特性改变，则会影响可用推力曲线，从而改变推力曲线图，导致飞行性能的变化。

从已经引出的平飞需用推力表达式

$$T_R = D_0 + D_i = C_{D0}\,\frac{1}{2}\rho V^2 S + \frac{AW^2}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} = \frac{W}{K}$$

和上升率表达式

$$V_v = \frac{\Delta T V}{W} = \left(\frac{T_a}{W} - \frac{1}{K}\right)V$$

可见，翼载 W/S、推重比 T/W 和升阻比 K 等综合参数对性能影响是很明显的，而且这些参数对飞机机动性能也有重要影响，因此在飞机设计时特别受到重视。但由于其中任一个参数的改变会对其他参数产生影响，因此不直接讨论这些综合参数，仅讨论每个单独因素的影



对于超声速飞机，一方面由于高速飞行特性的需要，要求有较小的机翼面积；另一方面由于燃油消耗大，燃油量增多，飞机重量相应增大，使得翼载 W/S 大大增加(从低速飞机的 50～60 kg/m^{2}增加到 300 kg/m^{2}以上)。W/S 对飞机飞行性能的影响，可从 W 和 S 对飞行性能的单独影响中综合分析得出。

3. 发动机推力的影响

发动机推力增加，可用推力曲线 T_a在推力曲线图上往上移动，剩余推力 ΔT 增加，V_{max}和 V_v都会增加，对改善飞行性能有利。特别是对于超声速飞机，由于高空时平飞需用推力曲线比较平坦，故推力增加对增大 V_{max}的效果更加显著，如图 2.30 所示。

但必须指出，推力增加必然引起发动机重量的增加，故应考虑推重比 T/W 是否增加才有意义。T/W 对飞行性能的影响，应从 T 和 W 对飞机性能的单独影响中综合分析得出。

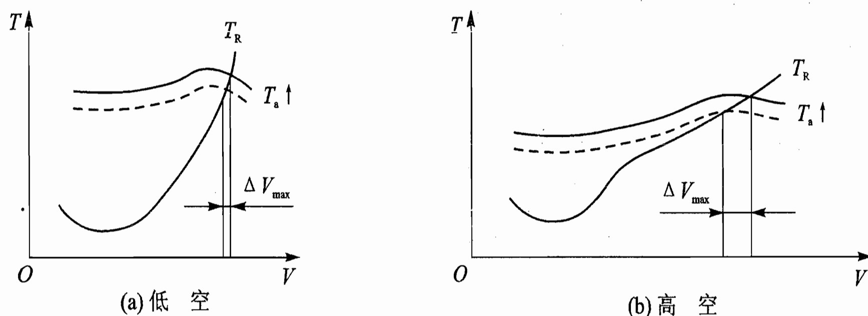


图 2.30　可用推力增加对飞行性能的影响

2.4　续航性能

飞机的续航性能包括航程和航时两个方面。它涉及到飞机能够飞得多远、多久的问题。对于军用飞机而言，航程远表示飞机活动范围大，远程作战能力强，可以直接威胁敌人的深远后方；航时久表示飞机留空活动时间长，既便于空中机动，又能减少出动架次。因此续航性能是飞机重要战术技术性能，也是评价飞机性能好坏的主要指标之一。对于民用机而言，航程和航时则影响运输的经济效益，更具有重要意义。

下面仍然只介绍军用机的续航性能，民用机的续航性能集中在 2.6 节扼要介绍。

2.4.1　航程和航时的基本关系式

航程 R 是指飞机携带有效装载，在标准大气和无风情况下，沿着预定航线飞行，耗尽其可用燃油量所经过的水平距离。带有可投放副油箱时，副油箱内燃油耗尽后应投掉。

航时 t 是指与航程同样条件下，耗尽可用燃料量所能持续飞行的时间。



飞机沿预定航线飞行，一般包括上升、巡航和下滑三个阶段，如图 2.31 所示。因此航程和航时应是三段分别的航程和航时之和。上升段和下滑段航程、航时，通常只占总航程和总航时的 10 %左右，且计算方法在飞机上升性能中已介绍过，因此这里仅介绍巡航段的续航性能。

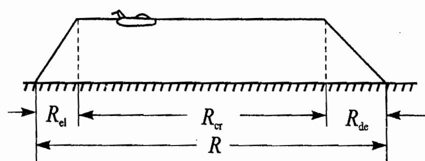


图 2.31　典型的飞机巡航飞行轨迹

计算航程和航时时，首先应确定可用燃油量 $Q_{f.a}$，其计算公式为

$$Q_{f.a} = Q_f - (Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4)$$

式中 Q_f 为飞机总燃油量，包括副油箱内的燃油量；Q_1 为地面试车和飞机滑行所消耗的燃油量；Q_2 为着陆航线和着陆时消耗的燃油量；Q_3 为油箱构造原因不能用尽的剩余燃油量；Q_4 为保证飞行安全的备用燃油量，占总燃油量的 5 %～10 %。这些燃油量均为质量，故以 kg 计。

其次确定燃油耗油量。下面引出两个耗油量的概念。

1. 小时耗油量和千米耗油量

小时耗油量 $c_{f.t}$(kg/h)公式为

$$c_{f.t} = c_f i T_i \tag{2.36}$$

式中 T_i 为每台发动机推力(N)；c_f 为发动机耗油率[kg/(N・h)]；i 为飞机上发动机台数。

千米耗油量 $c_{f.R}$(kg / km)公式为

$$c_{f.R} = \frac{c_{f.t}}{V} = \frac{c_f i T_i}{V} \tag{2.37}$$

式中 V 为相对地面的飞行速度，无风时，即为相对空气速度。

考虑到燃油消耗，飞机重量不断减轻，但变化缓慢，故可认为每瞬时飞机作定常水平飞行，即满足 $T_a = D, L = W$。又因 $T_a = \eta i T_i$，η 为发动机效率系数，于是 $c_{f.t}$ 和 $c_{f.R}$ 又可表示为

$$c_{f.t} = c_f i T_i = \frac{c_f T_a}{\eta} = \frac{c_f W}{\eta K} \tag{2.38}$$

$$c_{f.R} = \frac{c_{f.t}}{V} = \frac{c_f T_a}{\eta V} = \frac{c_f W}{\eta V K} \tag{2.39}$$

上式表明 $c_{f.t}$ 和 $c_{f.R}$ 将随飞行状态、发动机工作状态和飞机重量的改变而变化。图 2.32 分别为某发动机的 $c_{f.t}$ 和 $c_{f.R}$ 随 H，Ma 变化的曲线。

2. 巡航段航程和航时的基本公式

显然，飞机巡航段的航时和航程与燃油量及小时耗油量 $c_{f.t}$、千米耗油量 $c_{f.R}$ 有关。现设飞机的飞行速度为 V(km/h)，则在 dt 时间内消耗燃油 d$Q_f = c_{f.t}$dt，相应的飞机质量减轻了 dm，即 dm = − dQ_f。于是可得

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}Q_f}{c_{f.t}} = -\frac{\mathrm{d}m}{c_{f.t}} = -\frac{\mathrm{d}W}{g c_{f.t}} \tag{2.40}$$

飞机经过的水平距离为

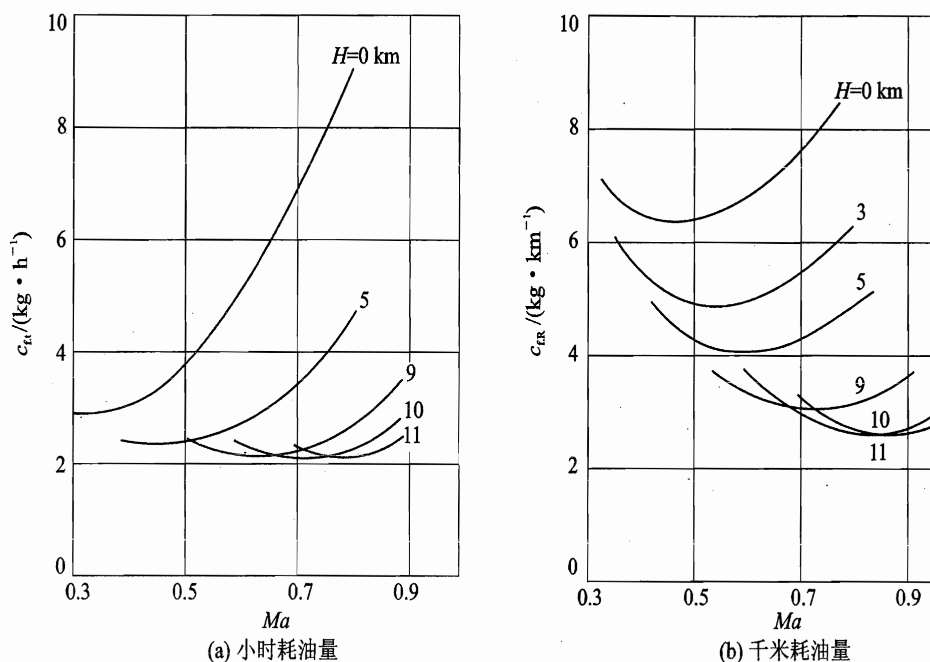


图 2.32　某发动机 $c_{f.t}$ 和 $c_{f.R}$ 随 H, Ma 的变化曲线

$$\mathrm{d}R = V\mathrm{d}t = -\frac{V\mathrm{d}W}{gc_{f.t}} = -\frac{\mathrm{d}W}{gc_{f.R}} \tag{2.41}$$

令巡航段开始时飞行重量为 W_1，终了时为 W_2，将式(2.38)、式(2.39)代入上式，并在 $W_1 \sim W_2$ 范围内积分，得到巡航段航时和航程的基本公式为

$$t_{cr} = -\int_{W_1}^{W_2} \frac{\mathrm{d}W}{gc_{f.t}} = \int_{W_2}^{W_1} \frac{\eta K}{gc_f} \frac{\mathrm{d}W}{W} \tag{2.42}$$

$$R_{cr} = -\int_{W_1}^{W_2} \frac{\mathrm{d}W}{gc_{f.R}} = \int_{W_2}^{W_1} \frac{\eta VK}{gc_f} \frac{\mathrm{d}W}{W} \tag{2.43}$$

上式中 K, c_f, η 与飞行状态有关，c_f, η 还与发动机工作状态有关。因此选择不同飞行状态和发动机工作状态，巡航段航时和航程是不同的。

2.4.2　等高等速巡航时的航程和航时

1. 给定高度与速度的航程和航时

在高度 H 和速度 V 都给定的情况下，随着燃油的消耗，飞机重量不断减小，为满足定常平飞要求，升阻比 K 和耗油率 c_f 应随重量的变化而改变。而发动机效率系数 η 主要是 Ma, H 的函数，基本不变。此时基本关系式(2.42)、式(2.43)无法解析求得，通常采用数值积分或图解积分法。

图解积分法的具体步骤如下：



① 将飞行重量由 $W_1 \sim W_2$ 分成若干区间，对每一区间取平均重量 W_{av}（若燃油装载量小于 W_1 的 35 %～40 %，则可以不分区间，整个巡航段取飞机平均重量 $W_{av}=W_1-\dfrac{Q_{f.a}\cdot g}{2}$）；

② 从标准大气表查得给定高度上的密度 ρ 和声速，计算 $Ma=V/c$；

③ 按 $W=C_L\dfrac{1}{2}\rho V^2 S$ 确定每一个 W 值下的 C_L；

④ 查飞机极曲线，确定与 C_L 和 Ma 对应的 C_D，计算 $K=C_L/C_D$；

⑤ 计算平飞需用推力 $T_R=W/K$；

⑥ 根据发动机工作状态，估算或查推力有效系数曲线确定 η，计算发动机推力 $T=T_R/\eta$；

⑦ 由发动机油门特性曲线（见图 2.33），查出对应 H，Ma，T 值的耗油率 c_f 和相应的转速 n；

⑧ 画出每一个 W 值下的 $\dfrac{\eta VK}{gc_f W}\sim W$ 曲线（见图 2.34）；

⑨ 按比例近似估算图中阴影线内面积，即得所求航程 R_{cr}；

⑩ 由于飞行速度 V 保持常值，比较式(2.42)和式(2.43)可知，巡航段的航时可直接由公式 $t_{cr}=R_{cr}/V$ 算出。

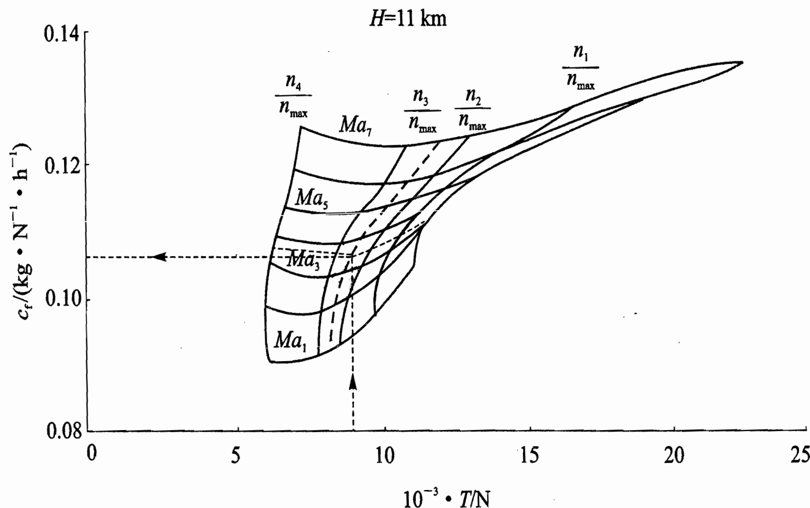


图 2.33　某发动机油门特性曲线

例： 某喷气式飞机在 $H=11$ km 上空以 $V=903$ km/h 作等速飞行。巡航开始时飞机重量 $W_1=73\ 500$ N，巡航段可用燃油量 $Q_{f.a}=1\ 500$ kg，机翼面积 $S=23\ m^2$。试求该飞机巡航段的航程和航时。

采用数值积分法求解。巡航开始时飞机重量为 $W_1=73\ 500$ N，巡航结束时飞机重量应为

$$W_2=W_1-Q_{f.a}\cdot g=58\ 800\ \text{N}$$

将飞行重量分为两个区间，即 73 500 N 和66 150 N，每一区间的平均重量为

$$W_{av.1}=[(73\ 500+66\ 150)/2]\ \text{N}=69\ 825\ \text{N}$$



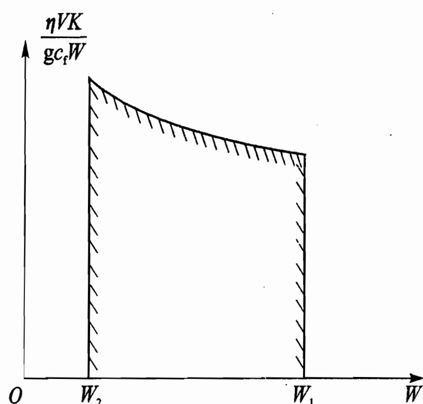


图 2.34　确定巡航段航程示意图

$$W_{av.2} = [(66\ 150 + 58\ 800)/2]\ \text{N} = 62\ 475\ \text{N}$$

查标准大气表得

$$\rho = 0.363\ 9\ \text{kg/m}^3, \qquad c = 295.1\ \text{m/s}$$

经计算得 $Ma=0.85$；查有关的特性曲线，推力有效系数 $\eta=0.9$。

随后按前面介绍的步骤进行计算，并将计算过程列于表 2.4 中。最后得巡航段航程和航时分别为

$$R_{cr} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\eta VK}{gc_f W_{av.i}}(W_i - W_{i+1}) = (629 + 704)\ \text{km} = 1\ 333\ \text{km}$$

$$t_{cr} = R_{cr}/V = (1\ 333/903)\ \text{h} = 1.476\ \text{h}$$

应当指出，为了实现给定高度、给定速度的巡航飞行，随着燃油消耗，飞行重量不断减轻，驾驶员应缓慢地推杆以减小迎角，同时逐渐降低发动机转速以减小推力，使飞机保持力的平衡。因此，要完成这样的操纵，严格保持给定高度、速度飞行，是比较困难的。

表 2.4　巡航段航程的计算

序　号	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨
项　目	W/N	C_L	C_D	K	T_R/N	T/N	c_f/(kg·N^{-1}·h^{-1})	$\frac{K\eta V}{gc_f W}$	$\frac{K\eta V}{gc_f W}(W_i - W_{i+1})$/km
公　式	$\frac{W_i+W_{i+1}}{2}$	$\frac{2W}{\rho V^2 S}$		$\frac{C_L}{C_D}$	$\frac{W}{K}$	$\frac{T_R}{\eta}$			
运　算	选定	0.379×10^{-5}×①	查飞机极曲线	②/③	①/④	⑤/0.9	查曲线	④×0.9×903 / 7×①×9.81	采用数值积分法
	69 825	0.266	0.033 1	8.03	8 704	9 672	0.111	0.839	629
	62 475	0.237	0.030	7.92	7 896	8 774	0.110	0.938	704

2. 久航速度和远航速度

飞机在什么高度和速度下作等高等速巡航飞行时，其航时最久、航程最远，是人们非常关心的。显然，用以上方法求得的航程和航时，不可能获得最大值。从图 2.32 可见，小时耗油量 $c_{f.t}$ 和千米耗油量 $c_{f.R}$，对每一个飞行高度都有一个 $(c_{f.t})_{min}$ 和 $(c_{f.R})_{min}$。故等高度上的最久航时(h)和最大航程(km)，可以近似按下式确定，即

$$t_{max} = \frac{Q_{f.a}}{(c_{f.t})_{min}}, \qquad R_{max} = \frac{Q_{f.a}}{(c_{f.R})_{min}}$$



式中 $Q_{f.a}$ 为飞机巡航段可用燃油量。对应 $(c_{f.t})_{min}$ 和 $(c_{f.R})_{min}$ 的飞行速度，分别称为某高度的久航速度 $V_{t.max}$ 和远航速度 $V_{R.max}$。

对于给定高度下的最久航时飞行状态，从式(2.42)可知，要求 $c_{f.t}$ 最小，也即要求组合参数 $\dfrac{\eta K}{gc_f W}$ 必须最大。若不考虑 c_f 和 η 的变化，则要求 K 最大，相应的 W/K 最小，即平飞需用推力 T_R 为最小($T_{R.min}=W/K_{max}$)，如图 2.35 上的 a 点。可见飞机的最久航时飞行状态就是有利飞行状态，久航速度 $V_{t.max}$ 即是有利速度 V_{opt}。

对于给定高度下的最大航程飞行状态，从式(2.43)可知，要求 $c_{f.R}$ 最小，也即要求组合参数 $\dfrac{\eta KV}{gc_f W}$ 必须最大。在不计 c_f 和 η 的变化的条件下，要求 $\left(\dfrac{W}{KV}\right)_{min}=\left(\dfrac{T_R}{V}\right)_{min}$，在平飞需用推力曲线图 2.35 上对应于 b 点，即由原点引出该曲线的切线的切点。与该点对应的飞行状态为最大航程飞行状态，相应的速度为远航速度 $V_{R.max}$。

超声速飞机在某些飞行高度上，由于平飞需用推力曲线的特点，由原点引出的直线有可能与平飞需用推力曲线两次相切，得到两个切点，如图 2.36 中 $H = 15\ 000$ m 的情况。因而有两个最小千米耗油量 $(c_{f.R})_{min}$，故有两个远航速度，分别在跨声速区和超声速区。

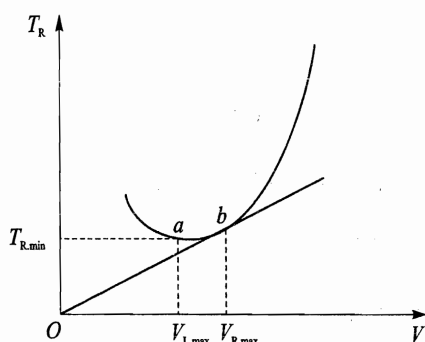


图 2.35 平飞需用推力曲线上对应久航和远航速度

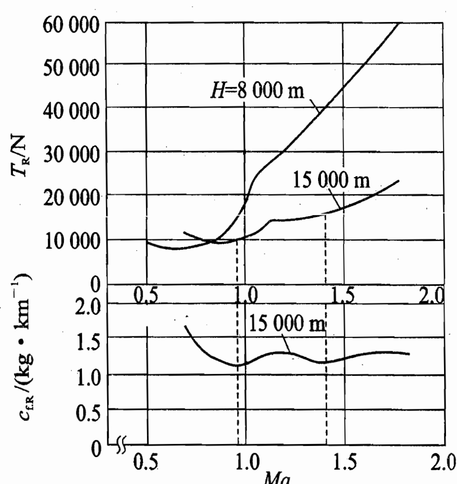


图 2.36 超声速飞机 T_R 和 $C_{f.R}$ 随 Ma 的变化曲线

3. 远航高度和久航高度

由图 2.32 可见，不同高度下 $(c_{f.R})_{min}$ 和 $(c_{f.t})_{min}$ 的值是不同的，显然高度不同时，R_{max} 和 t_{max} 的大小亦不同。因此如何确定飞机等高等速巡航情况下的最大可能航程和最大可能航时，可以首先求得 R_{max} 和 t_{max} 随 H 的变化曲线，然后取其最大值，如图 2.37 所示。图中 E,F 点所对应的横坐标即为最大可能航程 $R_{max.max}$ 和最大可能航时 $t_{max.max}$，对应的纵坐标分别为远航高度 $H_{R.max}$ 和久航高度 $H_{t.max}$。

但对于某些超声速飞机，由于对应跨声速和超声速区的远航速度飞行时，其千米耗油量



$c_{f.R}$变化较大，如图2.38所示，可以看出在低高度飞行时（图中H^*以下），超声速的$(c_{f.R})_{min}$值超过跨声速的$(c_{f.R})_{min}$；超过某高度H^*后，则相反。因此对于这类飞机要增大巡航段的航程，在某高度以下应以跨声速远航速度飞行，当超过该高度后，应采用超声速远航速度飞行。

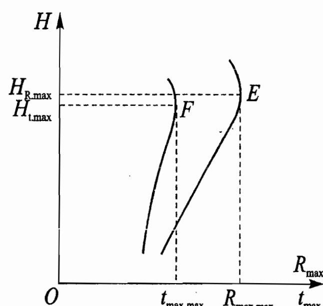


图2.37　确定给定高度、速度下的最大航程

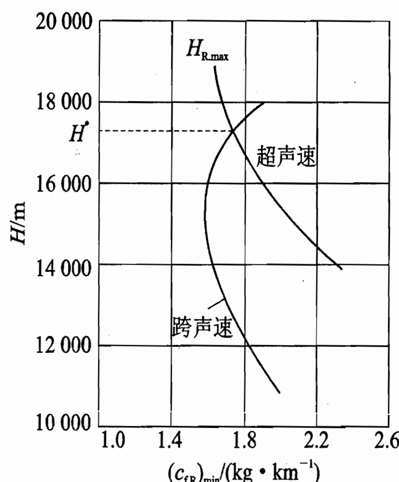


图2.38　超声速飞机远航时的$(c_{f.R})_{min}$随H变化曲线

2.4.3　飞机的最佳续航性能

上述讨论的最大航程和最久航时，由于飞行高度和速度选定后始终保持不变，因此发动机的转速和飞机的升阻比都将随着飞机重量变化而改变，以满足巡航飞行时平衡条件。此时航时和航程基本公式即式(2.42)、式(2.43)中，组合参数$\frac{\eta K}{c_f}$和$\frac{\eta KV}{c_f}$不可能始终保持最大值，换句话说，飞机气动效率和发动机经济效益的发挥都受到一定限制，不能始终处于最佳状态。如果允许巡航飞行中飞行高度随重量变化，同时选取最有利的飞行速度，那么有可能获得更大的航程和航时。

对于安装涡轮喷气发动机的飞机，一般的巡航飞行超过11 km，即在同温层中飞行，空气温度不随高度变化，则发动机耗油率c_f和发动机效率系数η均只是n和Ma的函数，即

$$c_{f.H} = c_{f.11} = f_1(n, Ma)$$

$$\eta_H = \eta_{11} = f_2(n, Ma)$$

根据巡航飞行时等速平飞条件，考虑到T_R和L均与密度ρ成正比，故飞机升阻比也只是n和Ma的函数，即

$$K = \frac{L}{T_R} = f_3(n, Ma)$$

于是航时和航程基本关系式在给定转速n和Ma的条件下，可以积分得出，即

$$t = \frac{\eta_{11} K}{g c_{f.11}} \ln \frac{W_1}{W_2} \tag{2.44}$$



$$R=\frac{\eta_{11}Kc_{11}Ma}{gc_{f.11}}\ln\frac{W_1}{W_2} \tag{2.45}$$

最佳航程和航时取决于组合参数$\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}}$和$\frac{\eta_{11}K}{c_{f.11}}$,应为最大值。由于该组合参数仅与 Ma 和 n 有关,因此计算最大航程和航时的问题就变成选取最有利飞行 Ma 和最有利的发动机转速 n。具体的计算步骤如下:

① 给定一组发动机的转速 n。

② 对应每一个转速 n 给出一组 Ma。

③ 由发动机特性曲线,确定与 n,Ma 相对应的 $T_{i.11}$和 $c_{f.11}$。

④ 估算或查推力有效系数曲线,确定 η_{11}。

⑤ 按下面公式计算 C_D,即

$$C_D=\frac{2T_{a.11}}{\rho_{11}c_{11}^2Ma^2S}=\frac{2iT_{i.11}\eta_{11}}{\rho_{11}c_{11}^2Ma^2S} \tag{2.46}$$

⑥ 查飞机极曲线,确定与 C_D和 Ma 相对应的 C_L,计算 $K=C_L/C_D$。

⑦ 计算每一个转速 n 下各 Ma 的$\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}$值,绘制成$\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}=(n,Ma)$曲线族(见图 2.39(a))。

⑧ 找出每一个转速 n 的$\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\sim Ma$ 曲线上最大值$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{\max}$和相应的远航马赫数 $Ma_{R.\max}$,并绘制$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{\max}\sim n$ 和 $Ma_{R.\max}\sim n$ 曲线(见图 2.39(b))。

⑨ 由$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{\max}\sim n$ 曲线,定出$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{\max.\max}$值和对应的转速 $n_{R.\max}$。该转速谓之远航转速,即为实现最佳航程所选定的转速。

⑩ 再由 $Ma_{R.\max}\sim n$ 曲线,按选定的 n 定出 $Ma_{R.\max}$值。该 Ma 谓之最佳远航 Ma,即为实现最佳航程所选定的 Ma。

⑪ 计算巡航段最佳航程:

$$R_{\max.\max}=\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{\max.\max}c_{11}\ln\frac{W_1}{W_2} \tag{2.47}$$

飞机在 $Ma_{R.\max}$和 $n_{R.\max}$下巡航飞行,高度没有限制,随着燃油的消耗,飞机重量逐渐减轻,每一瞬间的飞行高度,可按平衡条件 $L=W$ 确定,即

$$\rho_H=\frac{2W}{C_Lc_{11}^2Ma_{R.\max}^2S} \tag{2.48}$$

式中 C_L值按 C_D和 $Ma_{R.\max}$从极曲线查得。根据上式算得的 ρ_H 值,查标准大气表,可得随重量变化的瞬间高度 H。由于 W 逐渐减轻,ρ_H 逐渐减小,故飞行高度缓慢升高。这样,飞机将在不需要驾驶员操纵、自动等速变高的状态下飞行。

类似地可求得最佳航时为



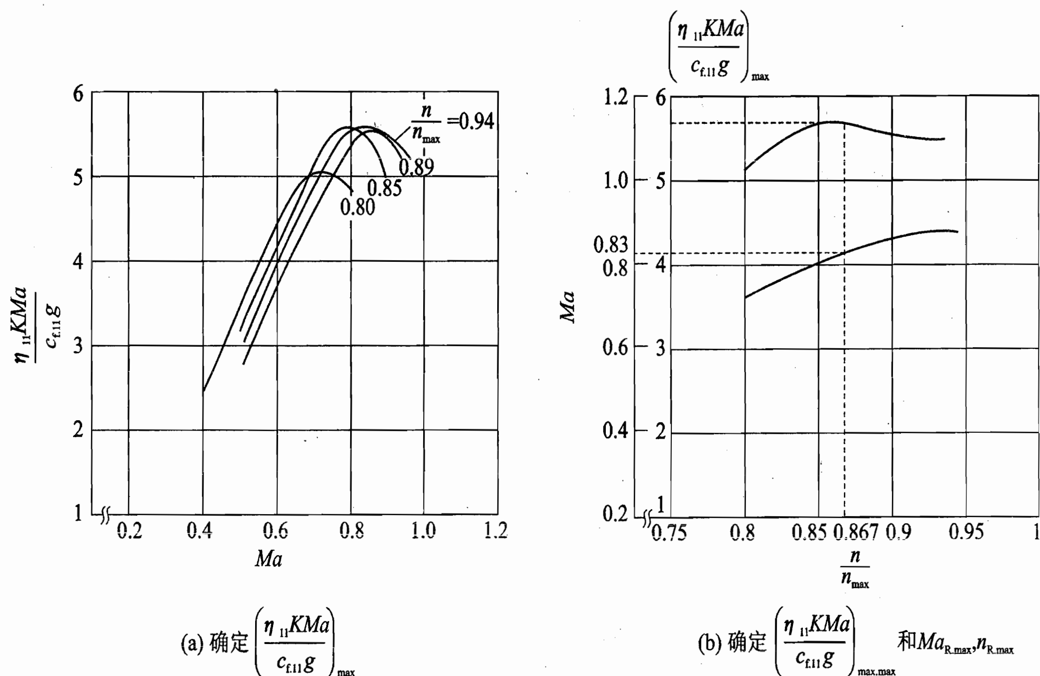


图 2.39　最佳航程和相应 *Ma*、发动机转速 *n* 的确定

$$t_{max.max} = \left(\frac{\eta_{11}K}{c_{f.11}g}\right)_{max.max} \ln\frac{W_1}{W_2} \tag{2.49}$$

相应的转速 $n_{t.max}$称久航转速，其 $Ma_{t.max}$称最佳久航 Ma。

例：确定某喷气式飞机巡航段最佳航程。已知巡航开始时飞行重量 $W_1=67\ 330$ N，终了时飞行重量 $W_2=53\ 510$ N，机翼面积 $S=23\ \text{m}^2$。为清楚起见，可按表 2.5 所列形式进行计算。最后得巡航段最佳航程为

$$R_{max.max} = \left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{max.max} c_{11}\ln\frac{W_1}{W_2} =$$

$$\left(5.7\times3.6\times295.1\times\ln\frac{67\ 330}{53\ 510}\right)\ \text{km} = 1\ 391\ \text{km}$$

选定的发动机转速和 Ma 分别为

$$n_{R.max} = 0.867n_{max}$$

$$Ma_{R.max} = 0.83$$

为确定巡航飞行高度，由选定的发动机转速 $n_{R.max}$和 $Ma_{R.max}$，查发动机特性曲线，得

$$T_{i1} = 8\ 828\ \text{N},\qquad \eta_{11} = 0.903$$

按式(2.46)计算得

$$C_D = \frac{2iT_i\eta_i}{\rho_{11}c_{11}^2Ma_{R.max}^2S} = \frac{2\times8\ 828\times0.903}{0.363\ 9\times295.1^2\times0.83^2\times23} = 0.031\ 8$$



表 2.5 巡航段最大航程的计算

序号 / 项目 / 公式 / 运算 — 发动机转速 n（选定）	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
项目	Ma	η_{11}	T_{11}	$c_{f.11}$	C_D	C_L	K	$\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}$	$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{f.11}g}\right)_{max}$	$Ma_{R.max}$
公式					$\frac{2T_{11}\eta_{11}}{\rho_{11}c_{11}SMa^2}$		$\frac{C_L}{C_D}$			
运算	选定	由 Ma 及 n 查发动机特性曲线			$0.274\times10^{-5}\times$ ②③/①^2	由 Ma 及 C_D 查飞机极曲线	⑥/⑤	②⑦①/9.81×④	由⑧作曲线（见图 2.39）得	
$0.80n_{max}$	0.4	0.926	5 886	0.097	0.093 5	0.608	6.50	2.53	5.1	0.72
	0.5	0.926	5 886	0.100	0.059 8	0.451	7.54	3.56		
	0.6	0.925	5 886	0.104	0.041 5	0.341	8.21	4.47		
	0.7	0.920	5 984	0.107	0.030 8	0.254	8.25	5.06		
	0.8	0.908	6 121	0.110	0.023 8	0.173	7.25	4.88		
$0.85n_{max}$	略								5.6	0.80
$0.89n_{max}$	略								5.55	0.84
$0.94n_{max}$	略								5.5	0.89

查飞机极曲线得

$$C_L = 0.27$$

按式(2.48)计算得

$$\rho_{H_1} = \frac{2W_1}{C_L c_{11}^2 Ma_{\mathrm{R.max}}^2 S} = \left(\frac{2\times 67\ 330}{0.27\times 295.1^2\times 0.83^2\times 23}\right)\ \mathrm{kg/m^3} = 0.361\ 8\ \mathrm{kg/m^3}$$

$$\rho_{H_2} = \frac{2W_1}{C_L c_{11}^2 Ma_{\mathrm{R.max}}^2 S} = \left(\frac{2\times 53\ 510}{0.27\times 295.1^2\times 0.83^2\times 23}\right)\ \mathrm{kg/m^3} = 0.287\ 5\ \mathrm{kg/m^3}$$

查标准大气表，可得巡航段起点和终点的飞行高度分别为

$$H_1 = 11.03\ \mathrm{km},\qquad H_2 = 12.50\ \mathrm{km}$$

2.4.4 最大活动半径

这里顺便引出最大活动半径的概念。对于军用战斗机来说，飞机由机场起飞，当飞到目标上空完成一定任务后，还要回到原机场，飞机所能达到的最远距离称为飞机最大活动半径。显然这是一个重要性能指标，反映飞机能远航作战的范围。但这并不是最佳航程的一半。因为飞机在空战时要消耗油重量 $W_{\mathrm{f.c}}$，投掷载荷重量 W_{b} 等，整个巡航飞行段有重量变化。

设巡航段开始时飞机重量为 W_1，到达目的地进行空战前的重量为 W_x，则空战结束后的重量为 $W_x-(W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}})$，返航巡航段结束重量为 W_2。其中 W_x 为待定的重量，可由出航巡航段和返航巡航段的航程相等得出，利用式(2.47)可求得

$$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{\mathrm{f.11}}g}\right)_{\mathrm{max.max}} c_{11}\ln\frac{W_1}{W_x} = \left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{\mathrm{f.11}}g}\right)_{\mathrm{max.max}} c_{11}\ln\frac{W_x-(W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}})}{W^2}$$

因此有

$$\frac{W_1}{W_x} = \frac{W_x-(W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}})}{W_2}$$

由此得到确定 W_x 的二次方程

$$W_x^2-(W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}})W_x-W_1W_2=0$$

解此方程，并根据本问题的物理意义取正根，便得

$$W_x = \frac{W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}}}{2}+\sqrt{\frac{(W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}})^2}{2}+W_1W_2} \tag{2.50}$$

将上式 W_x 替代式(2.47)中的 W_2，于是最大活动半径为

$$r_{\max} = \left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{\mathrm{f.11}}g}\right)_{\mathrm{max.max}} c_{11}\ln\frac{W_1}{W_x} =$$

$$\left(\frac{\eta_{11}KMa}{c_{\mathrm{f.11}}g}\right)_{\mathrm{max.max}} c_{11}\ln\frac{W_1}{\dfrac{W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}}}{2}+\sqrt{\dfrac{(W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}})^2}{4}+W_1W_2}} \tag{2.51}$$

当 $W_{\mathrm{f.c}}+W_{\mathrm{b}}=0$ 时，$r_{\max}$ 恰为航程的一半。



按上式算出的结果，仅为巡航段活动半径，最大实际活动半径应当把上升段和下滑段的水平距离也考虑进去。

2.4.5 风对续航性能的影响

有风时，地速 $\boldsymbol{V}$ 和空速 $\boldsymbol{V}_a$ 的关系如图 2.40 所示。地速 $\boldsymbol{V}$ 等于空速 $\boldsymbol{V}_a$ 和风速 $\boldsymbol{V}_w$ 的矢量和，即

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}_a+\boldsymbol{V}_w$$

空速与地速之间夹角为 φ，风速与地速之间夹角为 χ。作用在飞机上的气动力和推力只与空速有关。

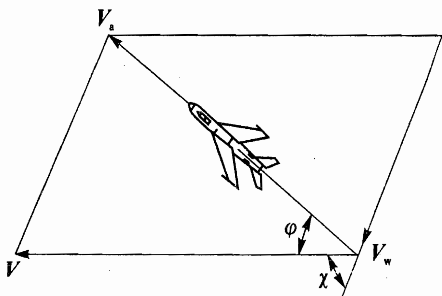


图 2.40 有风时空速 V_a 和地速 V 之间关系

在讨论航时时，是确定飞机在空中飞行的时间，不涉及飞机相对地面的运动。不管顺风还是逆风，只要保持飞行状态(H,Ma)和发动机工作状态(n)不变，航时就是确定的，所以风对航时没有影响。

在讨论航程时，是确定飞机相对地面所飞过的水平距离，显然与地速有关。即使飞行状态和发动机工作状态不变，由于风影响地速，顺风、逆风时的航程是不一样的。

有风时的千米耗油量由下式确定，即

$$(c_{f.R})_w=\frac{c_{f.t}}{V}$$

式中地速 $V=V_a\cos\varphi+V_w\cos\chi$。顺风飞行时，风向与飞行方向一致，即 $V=V_a+V_w$；逆风飞行时，风向与飞行方向相反，即 $V=V_a-V_w$。

有风时的航程一般表达式为

$$R_w=\int_{W_2}^{W_1}\frac{\mathrm{d}W}{(c_{f.R})_w}=\int_{W_2}^{W_1}\frac{V\mathrm{d}W}{c_{f.t}} \tag{2.52}$$

显然，与无风情况相比，顺风时的航程要大些，逆风时的航程要小些。

下面再讨论风对活动半径 r 的影响。假设飞机出航和返航时，风的速度大小和方向保持不变，如出航时为逆风，返航时就为顺风，反之亦然；并认为无风时的千米耗油量仅与飞行重量成正比，即 $c_{f.R}=AW$，A 为常数，则有风时的飞机千米耗油量在出航和返航时应分别为

$$\begin{aligned}(c_{f.R})_{hw}&=\frac{c_{f.t}}{V_a-V_w}=c_{f.R}\frac{V_a}{V_a-V_w}=\frac{AW}{1-\dfrac{V_w}{V_a}}\\(c_{f.R})_{tw}&=\frac{c_{f.t}}{V_a+V_w}=c_{f.R}\frac{V_a}{V_a+V_w}=\frac{AW}{1+\dfrac{V_w}{V_a}}\end{aligned} \tag{2.53}$$

根据飞机活动半径定义,出航和返航航程相等。为简单起见,假设空战时耗油重量 $W_{f.c}$和投掷载荷重量 W_b均为零,则

$$\int_{W_x}^{W_1} \frac{dW}{(c_{f.R})_{hw}} = \int_{W_2}^{W_x} \frac{dW}{(c_{f.R})_{tw}}$$

将$(c_{f.R})_{hw}$和$(c_{f.R})_{tw}$式代入,并积分得

$$W_x = W_1^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{V_w}{V_a}\right)} W_2^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{V_w}{V_a}\right)}$$

于是有风时的飞机活动半径为

$$r_w = \frac{0.5}{A}\left(1-\frac{V_w^2}{V_a^2}\right)\ln\frac{W_1}{W_2} \tag{2.54}$$

在同样假设条件下,无风时的飞机活动半径为

$$r_{w=0} = \frac{0.5}{A}\ln\frac{W_1}{W_2}$$

由此可得

$$r_w = \left(1-\frac{V_w^2}{V_a^2}\right)r_{w=0} \tag{2.55}$$

上式表明,由于风速以平方形式出现,对于现代飞机,通常 V_w/V_a 不大,故风对活动半径的影响较小,且与风的方向无关。

2.5 起落性能

起飞和着陆是实现一次完整飞行必须经历的两个阶段,因此,飞机除了应有良好的空中飞行性能外,还应具有良好的起飞和着陆性能,否则也会给飞行安全和实际使用方面带来问题。

飞机的起落性能主要包括:起飞距离、起飞时间和离地速度;着陆距离、着陆时间和接地速度。起飞和着陆距离的长短涉及到对机场范围大小的要求。离地速度太高会导致飞机起飞滑跑距离增加。接地速度太高会导致着陆滑跑距离增加,还对着陆安全和起落架受载带来不利影响。可见起落性能是飞机的主要战术技术指标之一。特别是现代飞机飞行速度快、翼载 W/S的增大,使得飞机起落距离和接地速度大大增加,起落性能趋于恶化。因此研究和改善高速飞机的起落性能更有重大意义。

飞机起落阶段的运动与飞机空中运动有很大的不同。在地面滑跑时,飞机的运动受到地面的约束,机轮上承受到地面的支反力和摩擦力;整个运动是接地或贴近地面飞行,飞机气动力要受到地面效应和飞机构形如起落架、襟翼放下带来的效果的影响。

2.5.1 起飞性能

飞机从起飞滑跑开始,上升到机场上空的安全高度,这一加速运动过程称为起飞。它所经



过的水平距离和所需时间称为起飞距离和起飞时间。安全高度应根据机场四周的障碍物来选取，我国定为 15 m（对于军机定为 25 m）。

现代飞机由于推重比 T/W 较大，往往飞机经过地面滑跑离地后就转入加速上升，因此起飞过程分为地面加速滑跑和空中加速上升两个阶段，如图 2.41 所示。对于前三点飞机，开始时三轮着地滑跑，速度由零逐渐增大，当增大到一定程度，为 $0.7 \sim 0.9V_{lo}$（离地速度），驾驶员操纵飞机抬起前轮，然后保持两主轮着地继续加速滑跑。随着速度的增加，飞机升力迅速增加，当速度达到离地速度 V_{lo}，升力等于飞机重力时，主轮离开地面，飞机转入加速上升；当离地一定高度时，收起落架以减小阻力；继续加速上升至安全高度，起飞过程即告结束，随后收起襟翼。下面具体介绍起飞性能指标。

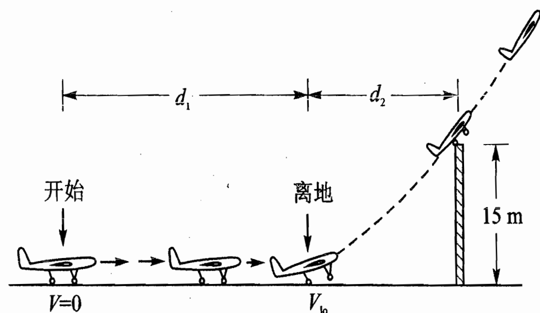


图 2.41　飞机的起飞过程

1. 地面滑跑距离和时间

飞机在地面滑跑中的受力情况如图 2.42 所示。由图可列写出滑跑时的运动方程

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= T_{\mathrm{a}} - D - F \\ N &= W - L \end{aligned}\right\} \tag{2.56}$$

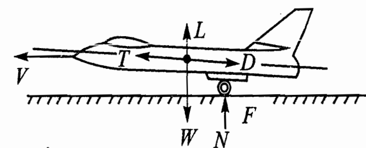


图 2.42　起飞滑距时飞机受力情况

式中 N 为地面支反力；F 为地面摩擦力，$F = fN$。

根据上述关系式，可将方程式(2.56)中的第一式改写为

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{T_{\mathrm{a}}}{W} - f - \frac{\rho V^2 S}{2W}(C_D - fC_L)$$

积分上式，即可得滑跑时间

$$t_1 = \frac{1}{g}\int_0^{V_{lo}} \frac{\mathrm{d}V}{\dfrac{T_{\mathrm{a}}}{W} - f - \dfrac{\rho V^2 S}{2W}(C_D - fC_L)} \tag{2.57}$$

因为 $\mathrm{d}d = V\mathrm{d}t$，则起飞滑跑距离为

$$d_1 = \frac{1}{2g}\int_0^{V_{lo}} \frac{\mathrm{d}V^2}{\dfrac{T_{\mathrm{a}}}{W} - f - \dfrac{\rho V^2 S}{2W}(C_D - fC_L)} \tag{2.58}$$

式(2.57)和式(2.58)中,因被积函数随速度而变化,故通常只能用图解积分法或数值积分法求解。摩擦系数 f 的大小,主要取决于跑道表面情况。一般数值见表 2.6。

表 2.6 地面摩擦系数数值表

表面状况	最小值 f_{min}	平均值 f_{av}
干水泥地面	0.02	0.03~0.04
湿水泥地面	0.03	0.05
干硬草地面	0.035	0.07~0.10
湿草地面	0.060	0.10~0.12
覆雪覆冰地面	0.02	0.10~0.12

作为工程估算,可以进一步近似认为整个滑跑过程为匀加速运动。平均加速度 a_{av} 可按沿速度方向作用于飞机上的合力平均值确定,即

$$\frac{W}{g}a_{av} = (T_a)_{av} - (D+F)_{av} \tag{2.59}$$

式中 $(T_a)_{av}$ 为发动机可用推力的平均值,可取为 $0.9T_0$(T_0 为起飞工作状态下的地面静推力),或由可用推力曲线选取。

$(D+F)_{av}$ 为空气阻力和地面摩擦力合力的平均值,可取开始滑跑瞬时($V\approx0$)和飞机离地瞬时($V=V_{lo}$)的平均值。当 $V=0$ 时,$L=D=0,N=W$,则 $F=fW$;当 $V=V_{lo}$ 时,$L=W,F=fN=0,D=W/K_{lo}$。K_{lo} 为离地瞬时的升阻比,即 $K_{lo}=C_{L.lo}/C_{D.lo}$,可由计及地面效应的起飞状态极曲线确定。于是可得

$$(D+F)_{av} = \frac{1}{2}W\left(f+\frac{1}{K_{lo}}\right)$$

上式代入式(2.59),并令 $f'=\frac{1}{2}\left(f+\frac{1}{K_{lo}}\right)$,得平均加速度为

$$a_{av} = \left[\frac{(T_a)_{av}}{W} - f'\right]g$$

由匀加速运动可得飞机起飞滑跑距离和时间的估算公式:

$$t_1 = \frac{V_{lo}}{a_{av}} = \frac{1}{g}\frac{V_{lo}}{(T_a)_{av}/W - f'} \tag{2.60}$$

$$d_1 = \frac{V_{lo}^2}{2a_{av}} = \frac{1}{2g}\frac{V_{lo}^2}{(T_a)_{av}/W - f'} \tag{2.61}$$

考虑到现代高速飞机,由于推重比 T/W 和翼载荷 W/S 较大,近似估算时可略去式(2.57)和式(2.58)中的气动力部分,且取一平均 $(T_a)_{av}$ 值,则积分可得更简单的滑跑距离和时间的估算公式:

$$t_1 = \frac{1}{g}\frac{V_{lo}}{(T_a)_{av}/W - f} \tag{2.62}$$



$$d_1 = \frac{1}{2g}\frac{V_{lo}^2}{(T_a)_{av}/W - f} \tag{2.63}$$

2. 离地速度 V_{lo}

在离地瞬时，飞机的法向平衡方程可写成

$$W = L + T_a \sin(\alpha_{lo} + \varphi)$$

由上式可得离地速度为

$$V_{lo} = \sqrt{\frac{2[W - T_a \sin(\alpha_{lo} + \varphi)]}{\rho S C_{L.lo}}} \tag{2.64}$$

因式中的可用推力 T_a 是速度函数，所以只有用逐步近似迭代求解。当推力分量不太大时，可近似认为离地瞬时重力与升力平衡，则上式可近似为

$$V_{lo} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L.lo}}} \tag{2.65}$$

式中 $C_{L.lo}$ 为离地时飞机的升力系数。对于一般飞机可取 $\alpha_{lo} = \alpha_{sh}$（飞机抖动迎角），这时 $C_{L.lo} = C_{L.sh} = (0.8 \sim 0.9)C_{L\max}$。对于现代飞机，由于飞机临界迎角很大，$\alpha_{sh}$ 会增加很多，为保证飞机的安全，离地迎角 α_{lo} 应受到护尾迎角 α_{pt} 的限制，应 $\alpha_{lo} < \alpha_{pt}$。护尾迎角 α_{pt} 定义为保证飞机护尾包离地面 0.2～0.3 m 高时的飞机所处迎角，如图 2.43 所示。

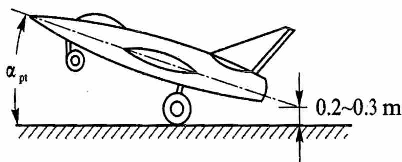


图 2.43　飞机的护尾迎角确定

3. 加速上升段距离和时间

飞机离地后加速上升的轨迹近似为直线，且轨迹倾角 γ 不大，故可认为水平距离近似等于空中所经过的路程。上升过程中剩余推力 $\Delta T = T_a - D$ 的变化亦不大，可取平均值 $(\Delta T)_{av}$。按能量守恒定律，飞机在 15 m 高度上所具有的总能量应等于飞机离地瞬间的动能加上平均剩余推力 $(\Delta T)_{av}$ 在上升过程所作的功，即

$$\frac{W}{2g}V_H^2 + 15W = \frac{W}{2g}V_{lo}^2 + (\Delta T)_{av} \cdot d_2 \tag{2.66}$$

式中 V_H 为上升至 15 m（或 25 m）安全高度上飞机的瞬时速度；对于喷气式飞机，可取 $V_H = 1.3V_{lo}$ 或参考同类型飞机的统计数据选取。由此可分别求加速上升段距离和时间为

$$d_2 = \frac{W}{(\Delta T)_{av}}\left(\frac{V_H^2 - V_{lo}^2}{2g} + 15\right) \tag{2.67}$$

$$t_2 = \frac{d_2}{V_{av}} \tag{2.68}$$

式中 $(\Delta T)_{av} = \frac{1}{2}[(T_{a.lo} - D_{lo}) + (T_{a.H} - D_H)]$；$V_{av} = \frac{1}{2}(V_H + V_{lo})$。其中 $T_{a.lo}$ 和 $T_{a.H}$ 由可用推力曲线确定；D_{lo} 由计及地面效应的起飞极曲线确定；D_H 则由不计及地面效应的起飞极曲线确定。

飞机的起飞距离和时间应为地面滑跑段和加速上升段距离与时间的和，即

$$d_{to} = d_1 + d_2, \qquad t_{to} = t_1 + t_2$$

例：某飞机起飞重量 $W=87\ 280$ N，机翼面积 $S=28\ m^2$，离地升力系数 $C_{L.lo}=0.75$。假设机场海拔高度 $H=0$，跑道表面摩擦系数 $f=0.033\ 5$。试估算飞机在发动机最大工作状态下的起飞距离和时间。

先按式(2.65)求出离速度

$$V_{lo} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L.lo}}} = \sqrt{\frac{2\times 87\ 280}{1.225\times 28\times 0.75}}\ \text{m/s} = 82.4\ \text{m/s}$$

由最大可用推力曲线按 $V=0.72V_{lo}$ 值，查得可用推力平均值 $(T_a)_{av}=40\ 200$ N。再按式(2.62)和式(6.63)分别计算得出地面滑跑距离和时间为

$$d_1 = \frac{1}{2g}\frac{V_{lo}^2}{(T_a)_{av}/W - f} = \left[\frac{1}{2\times 9.81}\frac{82.4^2}{(40\ 200/87\ 280) - 0.033\ 5}\right]\text{m} = 810\ \text{m}$$

$$t_1 = \frac{1}{g}\frac{V_{lo}}{(T_a)_{av}/W - f} = \left[\frac{1}{9.89}\frac{82.4}{(40\ 200/87\ 289) - 0.033\ 5}\right]\text{s} = 19.7\ \text{s}$$

设 $V_H=1.3V_{lo}=107.1$ m/s，则平均速度 $V_{av}=\frac{1}{2}(V_H+V_{lo})=94.7$ m/s。查最大可用推力曲线，得出与 V_{av} 对应的可用推力 $T_a=38\ 930$ N。

考虑到上升段 γ 不大，可近似用 $L\approx W$，求得相应的升力系数为

$$C_L = \frac{2W}{\rho V_{av}^2 S} = \frac{2\times 87\ 280}{1.225\times 94.7^2\times 28} = 0.57$$

从起飞极曲线上查得 $C_D=0.085$，计算求得阻力和平均剩余推力为

$$D = \frac{1}{2}\rho V_{av}^2 S C_D = \left(\frac{1}{2}\times 1.225\times 94.7^2\times 28\times 0.085\right)\text{N} = 13\ 070\ \text{N}$$

$$(\Delta T)_{av} = T_a - D = (38\ 930 - 13\ 070)\ \text{N} = 25\ 860\ \text{N}$$

按式(2.67)和式(2.68)分别计算出加速上升段距离和时间为

$$d_2 = \frac{W}{(\Delta T)_{av}}\left(\frac{V_H^2 - V_{lo}^2}{2g} + 15\right) = \frac{87\ 280}{25\ 860}\left(\frac{107.1^2 - 82.4^2}{2\times 9.81}\right)\text{m} = 856\ \text{m}$$

$$t_2 = \frac{d_2}{V_{av}} = \frac{856}{94.7}\ \text{s} = 9.04\ \text{s}$$

该机的起飞距离和时间应为

$$d_{to} = d_1 + d_2 = (810 + 856)\ \text{m} = 1\ 666\ \text{m}$$

$$d_{to} = t_1 + t_2 = (19.7 + 9.04)\ \text{s} = 28.74\ \text{s}$$

2.5.2 着陆性能

飞机着陆前，通常先通过机场上空，然后进入降落小航线飞行，作好着陆前的各项准备工



作。降落小航线包括四个转弯，如图 2.44 所示。一般在第二至第三转弯间放下起落架，在第三至第四转弯间飞机以一定速度下降并放下襟翼。飞机改出第四转弯后的离地高度一般不低于 200 m，然后对准跑道着陆点，下滑至安全高度（15 m 或 25 m）。由此着陆开始。

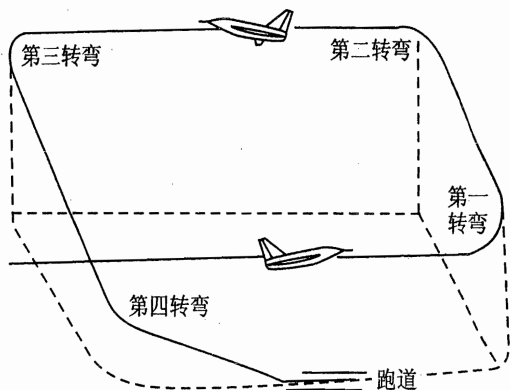


图 2.44 飞机着陆的四个转弯

飞机从安全高度处下滑过渡到地面滑跑，直到完全停止运动的整个减速运动过程，称为着陆。

着陆过程通常也可近似分为两个阶段，即下滑减速阶段和着陆滑跑阶段，如图 2.45 所示。下滑减速阶段，飞机从安全高度开始，发动机以慢车工作状态直线下滑，至离地 5～8 m，驾驶员拉杆将飞机改平，至机轮离地 1 m 左右，保持减速平飞，直到升力不再能平衡飞机重量，飞机自行飘落，以主轮接地结束。着陆滑跑阶段，飞机接地后先以主轮开始保持两点滑跑。当速度减到一定程度时，驾驶员推杆使前轮着地，进行三点滑跑，同时使用刹车减速，直到飞机安全停止运动。

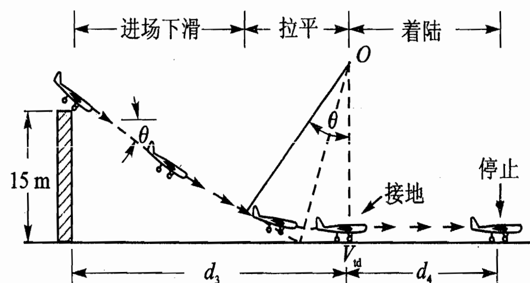


图 2.45 飞机的着陆过程

一般将飞机着陆过程经过的水平距离和时间，称为着陆距离和着陆时间，用来衡量、评价飞机的着陆性能。

1. 进场速度和接地速度

进场速度是指飞机着陆前下滑至安全高度处的瞬时速度。一般取

$$V_H = (1.2 \sim 1.3)V_{td} \tag{2.69}$$

即要比接地速度 V_{td} 大 20 %～30 %。

接地速度是指着陆过程中飞机主轮接地瞬间的速度。该速度要比升力平衡重量所需速度略小一些。可用下式表示，即

$$V_{td} = K_1\sqrt{\frac{2W}{\rho SC_{L.td}}} \tag{2.70}$$

式中 K_1 为速度修正系数，取 0.9～0.95；$C_{L.td}$ 为接地时升力系数。

为了缩短着陆距离，V_{td} 应尽可能小，为此 $C_{L.td}$ 应尽可能大。但 $C_{L.td}$ 要受到防止抖振 $C_{L.sh}$、护尾迎角 $C_{L.pt}$ 和平尾最大上偏角 $C_{L.\delta max}$ 条件的限制，为安全起见，应取其中最小值。

2. 下滑减速段距离和时间

整个下滑减速段下滑角 γ 不大，可将下滑减速段的水平距离近似等于飞机所经过的路程。此时发动机处于慢车工作状态，可取 $T_a \approx 0$。气动阻力取平均值 $D_{av}=\frac{1}{2}(D_{td}+D_H)$，其中 D_H 为安全高度处的阻力。按能量守恒定律有

$$\frac{W}{2g}V_H^2 + 15W = \frac{W}{2g}V_{td}^2 + D_{av}d_3 \tag{2.71}$$

由上式解得下滑减速段的水平距离为

$$d_3 = \frac{W}{D_{av}}\left(\frac{V_H^2 - V_{av}^2}{2g} + 15\right)$$

考虑到下滑轨迹角 γ 不大，则 $L \approx W$，故 $\frac{W}{D_{av}}=\frac{L}{D_{av}} \approx K_{av}$。由此可得下滑减速距离和时间为

$$d_3 = K_{av}\left(\frac{V_H^2 - V_{av}^2}{2g} + 15\right) \tag{2.72}$$

$$t_3 = \frac{d_3}{V_{av}} \tag{2.73}$$

式中 $K_{av}=\frac{1}{2}(K_H+K_{td})$，$V_{av}=\frac{1}{2}(V_H+V_{td})$。其中 K_H 和 K_{td} 分别为 $H=15$ m 处和接地处的升阻比。

3. 着陆滑跑距离和时间

着陆滑跑段开始是两点滑跑，后段是三点滑跑。实践表明，两点滑跑时间很短，在同样速度下，两点滑跑时迎角大，阻力也大，但不使用刹车，摩擦力较小；三点滑跑时，则迎角小，阻力也小，但使用刹车，摩擦力较大。故可认为这两段的阻力加上摩擦力之和近似相等。因此可把整个滑跑过程作为三点滑跑进行估算。飞机在着陆滑跑中的受力情况类同起飞滑跑状态，不同点着陆时可用推力可近似为 $T_a = 0$。相应的运动方程为

$$\left.\begin{aligned} \frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -D - F \\ N &= W - L \end{aligned}\right\} \tag{2.74}$$

式中 N 为地面支反力；F 为地面摩擦力，$F=fN$。

类似于起飞滑跑，按上述关系，方程式(2.74)中第一式可改写为

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = -\left[f + \frac{\rho V^2 S}{2W}(C_D - fC_L)\right]$$

积分上式，即得着陆滑跑时间



$$t_4 = \frac{1}{g}\int_0^{V_{td}} \frac{dV}{f + \frac{\rho V^2 S}{2W}(C_D - fC_L)} \tag{2.75}$$

因 $dd = V dt$，故相应的着陆滑跑距离得

$$d_4 = \frac{1}{2g}\int_V^{V_{td}} \frac{dV^2}{f + \frac{\rho V^2 S}{2W}(C_D - fC_L)} \tag{2.76}$$

若进一步假设滑跑过程为匀速运动，其平均减速度可以类似于起飞滑跑作匀加速运动时的处理方法，得出

$$a_{av} = -\frac{g}{2}\left(f + \frac{1}{K_{td}}\right) \tag{2.77}$$

式中 K_{td}为接地瞬时飞机的升阻比。于是估算着陆滑跑距离和时间的近似公式为

$$d_4 = -\frac{V_{td}^2}{2a_{av}} = \frac{V_{td}^2}{g\left(f + \frac{1}{K_{td}}\right)} \tag{2.78}$$

$$t_4 = -\frac{V_{td}}{a_{av}} = \frac{2V_{td}}{g\left(f + \frac{1}{K_{td}}\right)} \tag{2.79}$$

由上式可见，要缩短着陆滑跑距离和时间，应尽可能减小 V_{td}和 K_{td}，并增大 f 。完全打开襟翼和减速板，不仅增大接地时的升力系数，同时增加迎面阻力，因而既减小 V_{td}，也减小了 K_{td}。充分利用刹车，可加大 f。此外，现代喷气式飞机着陆时还使用减速伞。

飞机着陆距离和时间应为下滑减速段和滑跑段距离与时间的和，即

$$d_{la} = d_3 + d_4, \qquad t_{la} = t_3 + t_4$$

例：某机着陆重量 $W = 70\ 710$ N，机翼面积 $S = 28$ m²，使用刹车时的摩擦系数 $f = 0.3$，取速度修正系数 $K_1 = 0.95$。假设机场高度 $H = 0$。试估算飞机的着陆距离和时间。

按规定该机的护尾迎角为 $\alpha_{pt} = 9.5°$。查计及地面效应的飞机着陆极曲线得

$$C_{L.td} = 0.89, \qquad C_{D.td} = 0.12$$

计算得接地升阻比

$$K_{td} = \frac{C_{L.td}}{C_{D.td}} = 6.95$$

现按式(2.70)求出飞机接地速度

$$V_{td} = K_1\sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L.td}}} = 0.95\sqrt{\frac{2 \times 70\ 710}{1.225 \times 28 \times 0.89}}\ \text{m/s} = 64.8\ \text{m/s}$$

取飞机经安全高度(15 m)处的 $C_{L.H} = 0.6C_{L.td} = 0.534$，再查不计地面效应的飞机着陆极曲线得 $C_{D.H} = 0.103$，经计算得相应的升阻比

$$K_H = \frac{C_{L.H}}{C_{D.H}} = 5.18$$

和安全高度速度

$$V_H = 1.3 \times V_{td} = 1.3 \times 64.8\ \text{m/s} = 84.2\ \text{m/s}$$

计算平均速度 V_{av} 和平均升阻比 K_{av} 为

$$V_{av} = \frac{1}{2}(V_H + V_{td}) = \frac{1}{2}(84.2 + 64.8)\ \text{m/s} = 74.5\ \text{m/s}$$

$$K_{av} = \frac{1}{2}(K_H + K_{td}) = \frac{1}{2}(5.18 + 6.95) = 6.07$$

最后按式(2.72)和式(2.73)分别计算出下滑减速段距离和时间为

$$d_3 = K_{av}\left(\frac{V_H^2 - V_{td}^2}{2g} + 15\right) = 6.07\left(\frac{84.2^2 - 64.8^2}{2 \times 9.81} + 15\right)\ \text{m} = 985\ \text{m}$$

$$t_3 = \frac{d_3}{V_{av}} = \frac{985\ \text{m}}{74.5\ \text{m} \cdot \text{s}^{-1}} = 13.2\ \text{s}$$

按式(2.78)和式(2.79)分别计算出着陆滑跑段距离和时间为

$$d_4 = \frac{V_{td}^2}{g\left(f + \dfrac{1}{K_{td}}\right)} = \frac{64.8^2}{9.81(0.3 + 1/6.95)}\ \text{m} = 964\ \text{m}$$

$$t_4 = \frac{2V_{td}}{g\left(f + \dfrac{1}{K_{td}}\right)} = \frac{2 \times 64.8}{9.81(0.3 + 1/6.95)}\ \text{s} = 29.7\ \text{s}$$

该机的着陆距离和时间应为

$$d_{la} = d_3 + d_4 = (985 + 964)\ \text{m} = 1\ 949\ \text{m}$$

$$t_{la} = t_3 + t_4 = (13.2 + 29.7)\ \text{s} = 42.9\ \text{s}$$

2.5.3 单发停车故障的对策

多发动机飞机在起飞滑跑时，当有一台发动机因发生故障而停车时，驾驶员要在两个对策中选择，即中断起飞还是继续起飞。进行这种决断的依据，主要取决于发动机出现故障时的飞行速度，以及发动机停车时的跑道长度。

1. 中断起飞所需距离

中断起飞所需距离是指在起飞滑跑过程中，一台发动机停车，驾驶员决定中断起飞，即收油门，放下各种减速机构，飞机从滑跑起点到完全停止所经过的距离。因此中断起飞所需距离由三段组成。

第一段：飞机从速度为零，加速滑跑至一台发动机停车瞬时速度 V_{ef} 所经过的距离。

第二段：从一台发动机停车至驾驶员决心收油门，放减速机构中断起飞所经过的距离。该段所需时间按规范规定为 3 s，飞行速度近似不变，为 V_{ef}。

第三段：收油门，放减速机构至飞机完全停止运动所经过的距离。

中断起飞过程的第一段相当于起飞滑跑，第三段相当于着陆滑跑，故中断起飞所需距离可



采用式(2.63)和式(2.78)近似求得

$$d_{at}=\frac{V_{ef}^2}{2g\left(\frac{(T_a)_{av}}{W}-f\right)}+3V_{ef}+\frac{V_{ef}^2}{g\left(f+\frac{1}{K_{ef}}\right)} \tag{2.80}$$

式中 K_{ef}为 V_{ef}时的升阻比。

图 2.46 中 A 组曲线为某机不同起飞重量下中断起飞所需距离 d_{at}随 V_{ef}的变化规律。V_{ef}愈大，所需的 d_{at}愈长。

2. 继续起飞所需距离

继续起飞所需距离是指一台发动机停车后继续起飞时，从滑跑起点到上升至安全高度所经过的水平距离。显然继续起飞所需距离由两段组成。

第一段：继续起飞所需的滑跑距离，包括所有发动机工作下加速滑跑段直到 V_{ef}；一台发动机停车，其余发动机工作下加速滑跑段直到 V_{lo}。其近似估算可按式(2.63)得出

$$d_{ct.1}=\frac{V_{ef}^2}{2g\left(\frac{(T_a)_{av}}{W}-f\right)}+\frac{V_{lo}^2-V_{lf}^2}{2g\left(\frac{(T_a')_{av}}{G}-f\right)}$$

式中$(T_a)_{av}$为所有发动机工作下滑跑时的可用推力平均值；$(T_a')_{av}$则为一台发动机停车后滑跑时的可用推力平均值。

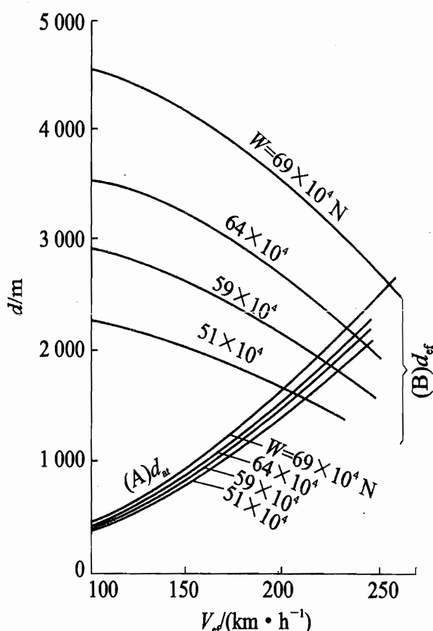


图 2.46　某机中断起飞和继续起飞性能

第二段：从离地速度 V_{lo}开始至安全高度的加速上升段距离 $d_{ct.2}$。其估算仍可按式(2.67)进行，则

$$d_{ct.2}=\frac{W}{(\Delta T)_{av}}\left(\frac{V_H^2-V_{lo}^2}{2g}+15\right)$$

因此继续起飞所需距离为

$$d_{ct}=d_{ct.1}+d_{ct.2} \tag{2.81}$$

图 2.46 中 B 组曲线为某机不同起飞重量下，继续起飞所需距离 d_{ct}随 V_{ef}的变化。V_{ef}愈大，所需 d_{ct}要求愈短。

3. 决策速度 V_1和平衡场地长度 L_{bf}

决策速度 V_1为多发动机飞机，在起飞滑跑过程中一临界发动机失效的某个速度，飞机无论继续起飞还是中断起飞都需要同样的距离，该速度被定为决策速度。它即是继续起飞所需距离 d_{ct}曲线与中断起飞所需距离 d_{at}曲线相交点所对应的速度，如图 2.47(a)所示。

平衡场地长度 L_{bf}为继续起飞所需距离 d_{et}，等于中断起飞所需距离 d_{ct}的场地长度，即

图 2.47(a)中交点对应的距离。

从图 2.47(a)上可见，当实际场地长度 L_{rf} 等于平衡场地长度 L_{bf} 时，那么一台发动机在决策速度 V_1 时停车，飞机可以继续起飞，也可中断起飞；发动机在大于 V_1 时停车，中断起飞所需距离 d_{at} 超出实际场地长度 L_{rf}，飞机只能继续起飞；相反，发动机在小于 V_1 时停车，继续起飞所需距离 d_{ct} 超出实际场地长度 L_{rf}，飞机只能中断起飞。

从图 2.47(b)上可见，飞机起飞重量增加，平衡场地长度增长，此时实际场地长度 L_{rf} 小于平衡场地长度 L_{bf}，飞机如在 $V_a \sim V_b$ 区发动机停车，继续飞行和停止飞行所需距离均超出实际场地长度，就会出现飞机既不能中断起飞，也不能继续起飞的困难局面，而危及飞行安全。

从图 2.47(c)上可见，飞机起飞重量减少，平衡场地长度缩短，此时实际场地长度 L_{rf} 超过平衡场地长度 L_{bf}，飞机如在 $V_c \sim V_d$ 区发动机停车，由于飞机继续飞行和停止飞行所需距离小于实际场地长度，则飞机无论继续起飞或中断起飞，都是安全的。通常情况下，都作中断起飞处理。

通过上述讨论，可以认为在给定飞机起飞重量后，决策速度是决定临界发动机停车后是继续起飞还是中断起飞的分界速度。为了保证飞行安全，实际场地长度一般应在以下三种距离中取最大值：单发停车后继续起飞距离、单发停车后中断起飞距离和正常状态下起飞距离的 115 %。

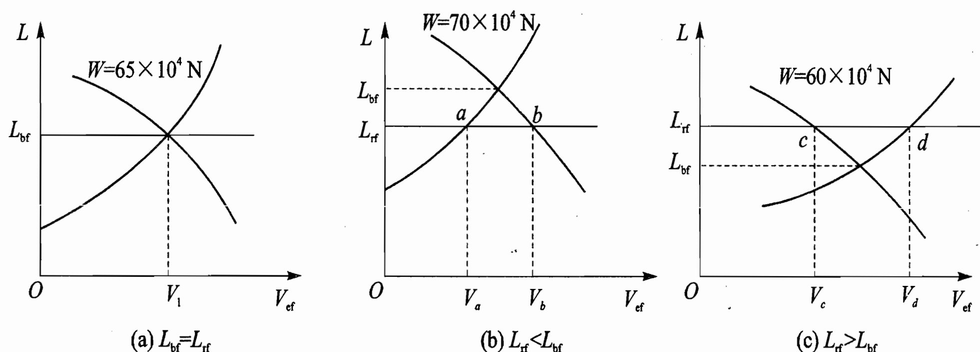


图 2.47　决策速度和平衡场地长度确定

2.5.4　改善起落性能的措施

现代飞机的飞行速度和翼载荷不断增加，使起飞和着陆滑跑距离大大加长，因此，设法缩短起落滑跑距离是非常有意义的。下面简单介绍一些改善起落性能的措施。

1. 增升装置

飞机上安装各种增升装置是改善起落性能的重要途径之一。因为增加了机翼升力，可以减小飞机离地速度和接地速度，从而缩短滑跑距离。

① 前缘缝翼。它是装在机翼前缘的一个小翼面，如图 2.48(a)所示。当前缘缝翼打开时，它与机翼前缘表面形成一道缝隙，气流流经缝隙，速度加大，增大了机翼上表面附面层速度，延



缓气流分离，避免大迎角失速，从而提高了最大升力系数 $C_{L\max}$。

② 襟翼。装在机翼后缘的谓之后缘襟翼。其中简单襟翼主要依靠增大翼型弯度来增加升力(见图 2.48(b))；分裂襟翼通过改善流态和增大翼型弯度来增加升力(见图 2.48(c))；开缝襟翼同样是通过改善流态延缓分离和增大翼型弯度来达到增升目的(见图 2.48(d))。为提高增升效益，目前已有双开缝襟翼，三开缝襟翼等；后退襟翼则是通过既改变翼型弯度又增大机翼面积来增加升力(见图 2.48(e))。对装在机翼前缘的襟翼谓之前缘襟翼。襟翼下偏时，减少前缘与气流之间的夹角，同时增加翼型弯度，提高临界迎角，增大升力。

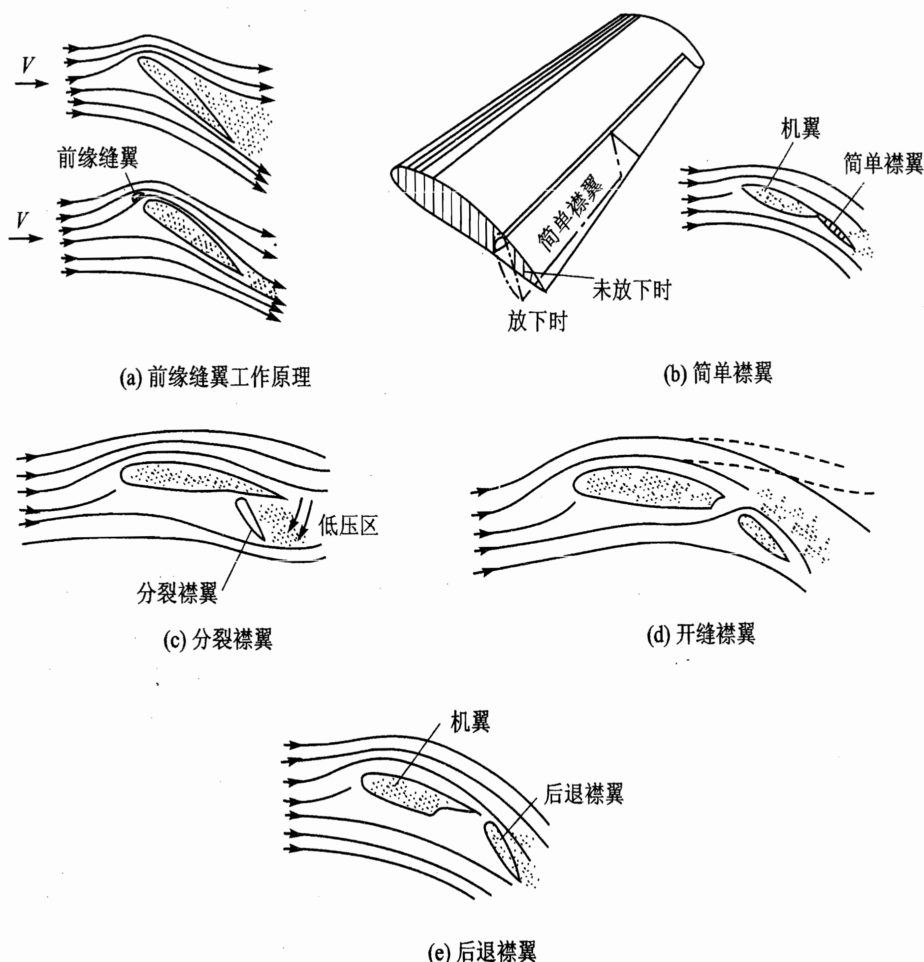


图 2.48　增升装置

③ 附面层控制。附面层控制系统是用气流吹除或用泵吸取机翼上的附面层，防止气流分离，达到提高临界迎角，增大 $C_{L\max}$的效果。

④ 推力矢量控制。其作用是改变发动机燃气流方向，向下偏转产生推力垂直分量。垂直起落飞机起飞就是利用该原理。

现代飞机通常同时采用几种增升装置，以提高增升效果。

2. 合理的构形参数

翼载荷 W/S 愈大，离地速度 V_{lo}和接地速度 V_{td}愈大，起落性能变差。故设法减轻飞机重量 W，不但可降低 V_{lo}和 V_{td}，而且可减小摩擦力，使起飞加速快，缩短起飞滑跑距离。至于加大机翼面积 S，虽可以改善起落性能，但对其他飞行性能不利(如 V_{max}，$V_{v.max}$等)，故要综合协调。

推重比 T/W 增大，起飞过程中加速力大，就可在较短的路程上达到离地速度，缩短了起飞滑跑距离。因此，在起飞时往往发动机处于最大工作状态或加力工作状态，甚至有的还安置小的火箭起飞加速器。

3. 减速机构

采用各种减速机构，可以大大缩短现代高速飞机的着陆滑跑距离。其中减速板、减速伞都是通过增加气动阻力来减速；刹车是通过摩擦力来减速；反推力装置则是改变喷流方向，使其产生与运动方向相反的推力分量，达到减速的目的，从而缩短着陆滑跑距离。

2.5.5 风切变下的起落过程

风切变是风的方向和速度相对地面在很短距离内的变化。水平风速度的变化影响空速，风切变的垂直分量将影响飞行轨迹角。风切变通常是由雷暴雨、锋面和喷气流形成的。风切变可以出现在任何高度上，如果在起落过程中遇到将是危险的。接近地面高度上出现的风切变，谓之低空风切变。

近年来，微下冲暴流被认为是另一种危险形式的风切变。微下冲暴流可能是在高空空气柱受到冰、雪或雨的蒸发很快变冷，其密度比周围空气增加，随之迅速下降地面的过程中形成，在碰撞到地面后，空气质量迅速向四处散布。这种下暴的核心有 2～3 km 宽，产生的风速可高达 150～200 km/h。典型的微下冲暴流能维持 5～15 min。

驾驶员飞经微下冲暴流，在不到 1 min 内，会受到多种复杂情况的迷惑。在这期间他将遇到顺风、下暴和逆风的情况，如图 2.49 所示。顺风将使空速增加，飞机开始爬升，如果驾驶员不知道为什么会发生这种现象，习惯上会收油门，减小推力以保持原来的航迹角。然而，顺风很快消失，接着遇到的是下降气流，导致飞机高速下降。此时，驾驶员试图通过打开油门，以恢复全推力状态。当发动机在某个时刻重新作用时，驾驶员又会遇到强劲的逆风，空速减小，进而会遇到接近失速的潜在危险。根据接近地面的程度和风切变速度的大小，驾驶员很可能已经没有可操纵飞机的空间，或者失速而撞击地面。对于现代运输机，由于进场时采用自动油门系统，这种情况在遇到微下冲暴流就更糟，因为油门在遇到顺风时早已关闭。

1964—1985 年期间，美国至少有 26 架民用运输机毁于风切变造成的事故，死伤数百人，低空风切变已成为危及飞行安全的因素之一。为此美国联邦航空局等单位对有关风切变/微下冲暴流进行了大量的研究，为了能成功地穿越风切变/微下冲暴流，提出了机上和地面建立



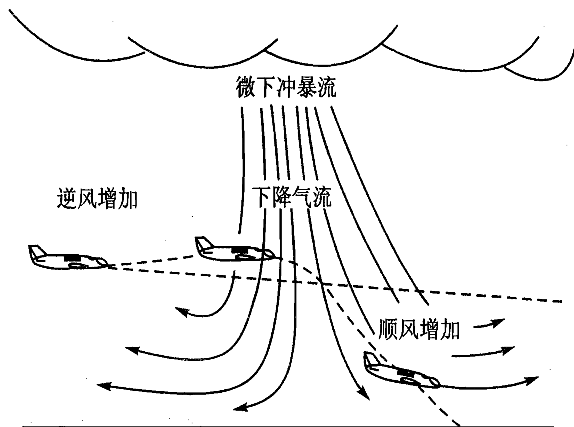


图 2.49　起落过程中微下冲暴流示意图

风切变探测系统、对乘务人员的告警、飞行方面管理和模拟以及驾驶技术的评估等。

最好的防御风切变或微下冲暴流的方法是完全地回避。如回避不了，目前建议是在识别了可能遇到的风切变/微下冲暴流后，驾驶员应使推力加至最大，并转动飞机至最初姿态，即谓之指标俯仰角，其值决定于飞机的类型。对于运输机，建议指标俯仰角约 15°。随后驾驶员应保持这种态势，直到飞出低空风切变或微下冲暴流范围。

机载风切变告警/探测系统是在 1980 年后期引入的反应型系统。该系统探测风切变是在飞机实际上遇到风切变之后，而不是在前。系统是利用飞机上常规的仪表，如加速度表、空气数据系统等提供的信息，输入机载计算机，得出飞机周围风切变情况。目前这种反应型系统已被先进的预测型传感系统替代。它可以给驾驶员在飞机遇到风切变/微下冲暴流前提前 30 s 的告警。这种机载告警/探测系统可以是雷达的、激光的或红外线类型的。雷达装置能测量随风运动水滴的多普勒速度。因此，对于伴随有中到大雨的风切变/微下冲暴流，用这种装置预测较好。然而，对于小雨或无雨情况下的风切变/微下冲暴流，用激光装置预测较好。因为它是利用低空大气中浮悬物质对激光的反射信号工作的。红外线装置则是利用风切变/微下冲暴流活动引起的离飞机 1～3 km 处的温度场变化来预测的。

目前，美国联邦航空局已强行规定在线航机上必须安装风切变告警/探测系统，并加强了对驾驶员的训练，以防止风切变/微下冲暴流带来进一步的损失。

2.6　涡轮螺桨飞机的飞行性能

涡轮螺桨发动机由于经济性能好，目前仍广泛用于旅客机和运输机。涡轮螺桨飞机的动力装置主要由发动机和螺旋桨组成。带动螺旋桨旋转的发动机特性是用功率表示的，单位以 W(瓦)来计。为此在讨论该类飞机的飞行性能时，平飞所需的动力用平飞需用功率表示，可写成



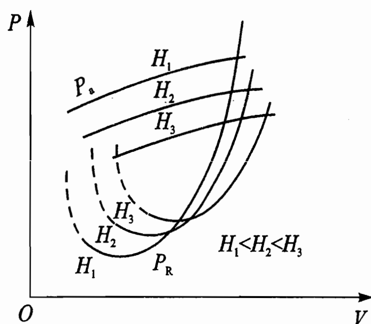


图 2.50　飞机的可用功率和需用功率曲线

$$P_R = T_R V \tag{2.82}$$

发动机能够提供给飞机的动力，用可用功率 P_a 表示。可用功率应是发动机折算功率乘以螺旋桨效率 η 和发动机台数 i，即

$$P_a = i\eta P_c \tag{2.83}$$

式中折算功率是将较小的喷气反作用产生的推力折合进去后的发动机功率，可表示为

$$P_c = P + TV/\eta$$

式中　P——发动机功率(W)；

T——喷气反作用产生的推力(N)。

随后可根据可用功率曲线和平飞需用功率曲线图(如图 2.50 所示)，用类似于 2.1 节的简单推力法来确定飞机的性能。

2.6.1　平飞和上升性能

用功率来表示的飞机定直平飞运动方程为

$$\left.\begin{aligned} P_a &= P_R + WV\sin\gamma \\ L &= W \end{aligned}\right\} \tag{2.84}$$

由上式可得的剩余功率为

$$\Delta P = P_a - P_R = WV\sin\gamma$$

很明显，当 $\Delta P=0$ 时，$\gamma=0$，飞机保持平飞状态；当 $\Delta P>0$ 时，$\gamma>0$，飞机将处于爬升状态；相反，$\Delta P<0$ 时，$\gamma<0$，飞机处于下滑状态。具体的性能指标与 2.1 节和 2.2 节的类同，不再介绍。

对于低速螺旋桨飞机，由于其气动力特性可不计压缩性影响，因而不同高度的平飞需用功率曲线均可从海平面上的平飞需用功率曲线推出。这会带来很多方便。某高度上的平飞需用功率考虑到其平飞速度可表示为

$$V_H = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_L}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\sqrt{\frac{2W}{\rho_0 S C_L}}$$

则相应的平飞需用功率可表示为

$$P_{R.H} = T_R V_H = \frac{WV_H}{K} = \frac{W^{3/2}}{K\sqrt{\Delta}}\sqrt{\frac{2}{\rho_0 S C_L}}$$

式中 $\Delta=\rho/\rho_0$。

于是与海平面的平飞速度和平飞需用功率相比，即可得

$$V_H = V_0 \frac{1}{\sqrt{\Delta}}$$



$$P_{R.H}=P_{R.0}\frac{1}{\sqrt{\Delta}} \tag{2.85}$$

由此可见，只要用$1/\sqrt{\Delta}$比例乘以$P_{R.0}=f(V_0)$曲率上每一点的两个坐标，就可以将海平面上平飞需用功率曲线转换到任一个高度H上。

2.6.2　涡轮螺桨飞机的续航性能

对于涡轮螺桨发动机飞机，其小时耗油量和千米耗油量可用下式表示，即

$$\left.\begin{aligned} c_{f.t}&=c_f iP=c_{f.c}iP_c \\ c_{f.R}&=\frac{c_{f.t}}{3.6V}=\frac{c_{f.c}iP_c}{3.6V}\end{aligned}\right\} \tag{2.86}$$

式中　c_f——发动机耗油率[kg/(W·h)]；

$c_{f.c}$——发动机折算耗油率$c_{f.c}=c_f\dfrac{P}{P_c}$[kg/(W·h)]；

V——相对地面的飞行速度(m/s)，无风时，即为相对空气速度V_a。

根据平飞条件，可用功率等于平飞需用功率，可得

$$iP_c=\frac{WV}{\eta K}$$

代入式(2.86)，于是涡轮螺桨飞机的巡航段航程和航时的基本关系式为

$$R=-\int_{W_1}^{W_2}\frac{dW}{c_{f.R}}=\frac{3.6}{g}\int_{W_2}^{W_1}\frac{\eta K}{c_{f.c}}\frac{dW}{W} \tag{2.87}$$

$$t=-\int_{W_1}^{W_2}\frac{dW}{c_{f.t}}=\frac{1}{g}\int_{W_2}^{W_1}\frac{\eta K}{c_{f.c}V}\frac{dW}{W} \tag{2.88}$$

如同喷气发动机飞机一样，根据不同的巡航飞行状态，由于公式中组合参数随飞行重量变化，故只能通过数值积分来求得。

上面介绍了有关飞机飞行性能均是有动力的情况。下面再简要介绍无动力的情况下滑翔机的飞行性能。

2.7　滑翔性能

滑翔机是一种无动力的轻型飞机，在空中用来克服气动阻力的前进动力是借助位能(或高度)的转换。由于滑翔机本身无法获得高度，故必须由动力飞机带至所要求高度后，才投放出去。

无动力滑翔飞行一个很有意思的例子，是航天飞机从空间的返回。航天飞机将滑翔返回地球并像常规飞机那样着陆。

沿垂直面内的滑翔飞行如图2.51所示。注意到滑翔时飞行轨迹倾角，也称滑翔角$\gamma<0$，



且 $T=0$,故运动方程式(1.46)可简化为

$$\left.\begin{aligned} D+W\sin\gamma&=0 \\ L-W\cos\gamma&=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.89}$$

运动学方程仍形如式(1.51),即

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=V\sin\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2.90}$$

一般情况下,滑翔角 γ 较小,上述方程可进一步简化。

$$\left.\begin{aligned} D+W\gamma&=0 \\ L&=W \\ \frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}&=V \\ \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}&=V\gamma \end{aligned}\right\} \tag{2.91}$$

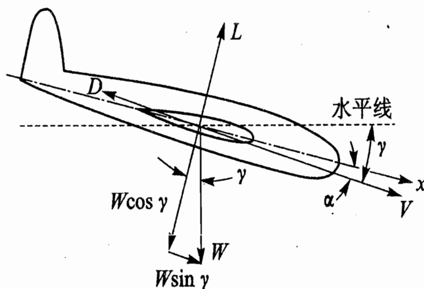


图 2.51　滑翔机上的外力

1. 最大滑翔距离

显然,其滑翔角由式(2.91)可直接得出,即

$$\gamma=-\frac{D}{W}=-\frac{D}{L}=-\frac{1}{K}$$

则最小滑翔角为

$$\gamma_{\min}=-\frac{D_{\min}}{W}=-\frac{1}{K_{\max}} \tag{2.92}$$

可见,当滑翔机在最大升阻比 $K_{\max}$ 对应的迎角飞行时,滑翔轨迹最平($\gamma=\gamma_{\min}$)。由于滑翔机重量不变,故最平坦的滑翔出现在气动阻力最小的时候。在第 1 章中已述,$K=K_{\max}$ 时,$C_L=C_{L.\mathrm{opt}}=\sqrt{C_{D0}/A}$。于是对于最小滑翔的飞行速度由式(2.91)可得

$$V=\sqrt{\frac{2W}{\rho SC_{L.\mathrm{opt}}}}=\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}} \tag{2.93}$$



对于给定高度，滑翔经过的地面水平距离，由式(2.91)可得

$$\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}h}=\frac{V}{V\gamma}=\frac{1}{\gamma}=-K \tag{2.94}$$

经积分

$$R=x_{\mathrm{f}}-x_{\mathrm{i}}=\int_{h_{\mathrm{i}}}^{h_{\mathrm{f}}}K\mathrm{d}h$$

式中 h_{i}和 h_{f}分别为滑翔起始和终了的高度。假设此时迎角保持不变，则滑翔过程中 K 为常值。于是

$$R=K\Delta h \tag{2.95}$$

其中 $\Delta h=h_{\mathrm{i}}-h_{\mathrm{f}}$ 即为滑翔的高度损失。从式(2.95)可知，在一定的高度损失下，当 $K=K_{\max}$时，滑翔距离最长。换句话说，最大滑翔距离出现在最小滑翔角的时候，其值为

$$R_{\max}=\frac{\Delta h}{2\sqrt{AC_{D0}}} \tag{2.96}$$

上述结论没有考虑风的影响。有风的情况下，逆风时滑翔距离会变短，顺风时将增长。

在有人驾驶滑翔机的术语中，常把滑翔经过的地面距离与高度损失比称为滑翔比。该值正是升阻比 K，见式(2.95)。一架高性能有人驾驶滑翔机的滑翔比约为 40，即高度每损失 100 m，可以滑翔飞行 40 km。

2. 最大续航时间

续航时间与滑翔机的下沉速度有关。下沉速度愈大，其留空时间愈短。

滑翔机的下沉速度用 $\dot{h}_{\mathrm{s}}$ 表示，而爬升率通常用 V_{v}表示，因此 $\dot{h}_{\mathrm{s}}=-V_{\mathrm{v}}$。于是下沉速度由式(2.91)可表示为

$$\dot{h}_{\mathrm{s}}=-V\gamma=\frac{DV}{W}=\sqrt{\frac{2W}{\rho SC_{L}}}\left(\frac{C_{D}}{C_{L}}\right)=\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\left(\frac{C_{D}}{C_{L}^{3/2}}\right) \tag{2.97}$$

式中 DV 为维持滑翔飞行的需用功率，即

$$P_{\mathrm{R}}=DV=C_{D0}\frac{1}{2}\rho V^{3}S+AW^{2}\Big/\frac{1}{2}\rho VS \tag{2.98}$$

由式(2.97)可见，滑翔机重量是不变的，当需用功率 P_{R}最小时，或者说$(C_{D}/C_{L}^{3/2})$最小或$(C_{L}^{3/2}/C_{D})$最大时，滑翔机的下沉速度最小。

通过式(2.98)对 V 求导，并令其等于零，即可得到相应的最小需用功率，也即最小下沉速率的速度 V_{m}

$$\rho V^{2}SC_{D0}-\frac{4}{3}\frac{AW^{2}}{\rho V^{2}S}=0$$

得

$$V_{\mathrm{m}}=\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{A}{3C_{D0}}}\approx 0.76\,V_{\mathrm{opt}} \tag{2.99}$$



相应的升力系数为

$$C_{L.\mathrm{m}}=\frac{2W}{\rho V_{\mathrm{m}}^2 S}=\sqrt{\frac{3C_{D0}}{A}} \tag{2.100}$$

而

$$(C_L^{3/2}/C_D)_{\max}=\sqrt[4]{\frac{27}{A^3C_{D0}}}$$

于是最小下沉速率为

$$\dot{h}_{\mathrm{s.\,min}}=\sqrt[4]{\frac{2WA^3C_{D0}}{27\rho S}} \tag{2.101}$$

图 2.52 为 K 和($C_L^{3/2}/C_D$)随 C_L 的变化曲线。显见,与 $K_{\max}$对应的 C_L 为 $C_{L.\mathrm{opt}}$;而与($C_L^{3/2}/C_D$)$_{\max}$对应的 C_L 为 $C_{L.\mathrm{m}}$。图 2.53 是某滑翔机的平飞需用推力(即阻力)和需用功率曲线。图中清楚地表明,对应最平坦的滑翔速度为 V_{opt},对应最小下沉速率的速度为 V_{m}。

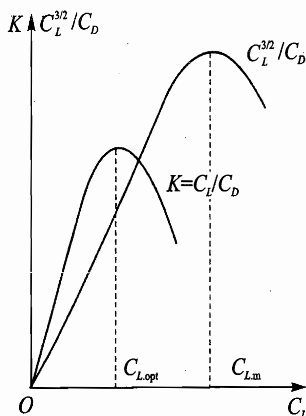


图 2.52 K 和($C_L^{3/2}/C_D$)随 C_L 的变化曲线

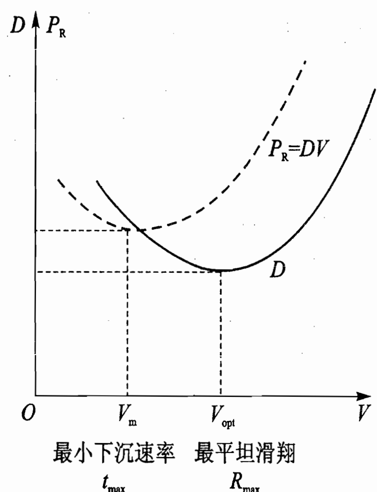


图 2.53 滑翔飞行的最优速度确定

滑翔机的续航时间,可由式(2.91)得

$$\mathrm{d}t=\mathrm{d}h/V\gamma$$

经积分得

$$t=-\int_{h_{\mathrm{i}}}^{h_{\mathrm{f}}}\sqrt{\frac{\rho S}{2W}}\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)\mathrm{d}h$$

假设滑翔过程中迎角 α 保持不变,且可以略去空气密度随高度的变化,则

$$t=\sqrt{\frac{\rho S}{2W}}\left(\frac{C_L^{3/2}}{C_D}\right)(h_{\mathrm{i}}-h_{\mathrm{f}}) \tag{2.102}$$



当然，若滑翔起始和终了高度相差很大，则空气密度随高度的变化是需要考虑的。此时，空气密度的变化可采用近似公式

$$\rho = \rho_0 e^{-0.000\,114h}$$

式中 ρ_0 为海平面高度的空气密度，h 以 m 为单位。

由式(2.102)可见，最大续航时间取决于参数$(C_L^{3/2}/C_D)$为最大，其相应的 $C_L=\sqrt{3}C_{L.\mathrm{opt}}$ 和 $V=0.76V_{\mathrm{opt}}$，即滑翔机处于最小下沉速率的状态，得

$$t_{\max} = \sqrt{\frac{\rho S}{2W}}\sqrt[4]{\frac{27}{A^3 C_{D0}}}(h_i - h_f) \tag{2.103}$$

显然，滑翔距离和续航距离是滑翔机的重要性能。最大的滑翔距离与滑翔机重量无关，而最大续航时间与滑翔机重量有关，因此设计者应尽可能把滑翔机设计得轻些。另外，若使诱导因子 A 和零升阻力系数 C_{D0} 保持最小，则滑翔距离和续航时间均能得到改善。因此，滑翔机常采用大展弦比的椭圆形机翼和低阻层流附面层翼型等。

例 1：某滑翔机重量 $W=2\,000$ N，$S=8$ m^2，$\lambda_e=15.2$ 和 $C_{D0}=0.015$。它从 300 m 高度投出，试确定最大滑翔距离及相应的下滑角、前进速度和海平面处升力系数。

海平面处 $\rho_0=1.225$ kg/m^3。由式(1.5)和式(1.10)可得

$$A = \frac{1}{\pi\lambda_e} = \frac{1}{3.141\,6\times 15.2} = 0.02$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{AC_{D0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0.02\times 0.015}} = 28.86$$

于是最大滑翔距离由式(2.96)得

$$R_{\max} = (h_f - h_i)K_{\max} = 300\ \mathrm{m}\times 28.86 = 8.66\ \mathrm{km}$$

由式(2.92)可得对应最大滑翔距离的最小滑翔角，即

$$\gamma_{\min} = -\frac{1}{K_{\max}} = -\frac{1}{28.86}\ \mathrm{rad} = -1.985°$$

对应最平坦滑翔的前进速度和升力系数由式(2.93)得

$$V = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}} = \sqrt{\frac{2\times 2\,000}{1.225\times 8}}\sqrt[4]{\frac{0.02}{0.015}}\ \mathrm{m/s} = 23.33\ \mathrm{m/s}$$

$$C_L = C_{L.\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{A}} = \sqrt{\frac{0.015}{0.02}} = 0.866$$

例 2：某滑翔机重量 $W=5\,000$ N，$S=10$ m^2，要求在前进速度 50 m/s 下保持下滑角 3°飞行，试确定滑翔机有效展弦比。假设 $C_{D0}=0.015$，$\rho=1.25$ kg/m^3。

由式(2.91)可求得

$$C_L = \frac{2W}{\rho SV^2} = \frac{2\times 5\,000}{1.25\times 10\times 50^2} = 0.326$$



$$C_D = -C_L\gamma = 0.326 \times \frac{3}{57.3} = 0.017\,1$$

$$A = (C_D - C_{D0})/C_L^2 = (0.017\,1 - 0.015)/0.326^2 = 0.019\,6$$

$$\lambda_e = \frac{1}{\pi A} = \frac{1}{3.141\,6 \times 0.019\,6} = 16.2$$

复习思考题

2.1　飞机定直平飞的最小速度受到哪些因素的限制？而最大速度又受到哪些因素的限制？

2.2　试分析超声速飞机在上升过程中计及能量变化后，对上升率指标的影响。

2.3　为什么飞机在反操纵区作定直平飞或定直上升飞行时，如受到干扰($\Delta V>0$ 或$\Delta V<0$)，而驾驶员又保持原有操纵，这些定直飞行状态将是不稳定的？

2.4　试分析推重比 T/W 和翼载荷 W/S 对飞机基本飞行性能、起落性能的影响。

2.5　某轻型喷气飞机重量 W=30 000 N，翼载荷 W/S=1 000 N/m^2，在某高度上的可用推力 T_a= 4 000 N。假设 C_D= 0.015+0.024C_L^2 和 $C_{L\max}$= 1.4。试确定该高度上的最大和最小平飞速度。

2.6　某歼击机重量 W = 50 000 N，以升阻比 K=6 飞行，当发动机可用推力 T_a=21 500 N 时，试问在此情况下，飞机能否作定直平飞？若不能作定直平飞，可以多大的上升角作定直爬升飞行？

2.7　某涡轮喷气飞机重 W=50 000 N，翼载荷 W/S= 1 800 N/m^2，某高度上的最大平飞速度 $V_{\max}$=241.8 m/s。已知 C_D= 0.02+0.04C_L^2 和 $C_{L\max}$=1.5。试问该状态下需用推力应多大？

2.8　某歼击机重量 W=76 500 N，以升阻比 K=7 和可用推力 T_a=14 700 N 定直上升，试求上升角。若该机抛掉副油箱后重量减小到 68 500 N，升阻比增加到 K=8，但仍以原油门状态上升，试问上升角会发生多大变化？

2.9　某喷气式飞机以速度 V=800 km/h 作定直平飞，此时空气阻力 D=16 000 N，发动机耗油率 c_f=0.114 kg/(N·h)，η=0.98。试确定飞机的千米耗油量 $c_{f.R}$和小时耗油量 $c_{f.t}$。

2.10　某飞机在额定油门下以 V=900 km/h 定直爬升，历时 5 min，平均小时耗油量 $c_{f.t}$=2 520 kg/h；以后该机作定直平飞，且千米耗油量 $c_{f.R}$=0.9 kg/km；飞机最后阶段以 V=500 km/h 定直下滑 20 min，平均小时耗油量 $c_{f.t}$=900 kg/h。若飞机可用燃油量 $Q_{f.a}$=1 500 kg，试求其总航程(上升、下滑角很小，近似取 $\cos\gamma=1$)。

2.11　如不考虑 c_f和 η 的变化，试分析喷气式飞机在什么飞行状态下，在给定高度和速度作巡航飞行时的航程、航时最大。



2.12　比较飞机以给定 H,V 作巡航飞行和 $H>11$ km 作最佳巡航飞行时,驾驶员操纵有何不同?为什么?

2.13　某喷气轰炸机,巡航段初始飞行重 $W_i=666\ 400$ N,结束时飞行重 $W_f=432\ 000$ N,在目标上空投掷炸弹重量 $W_b=29\ 000$ N,耗去燃油重量 $W_{f.a}=10\ 000$ N。若该机最佳巡航状态参数为

$$H\geqslant 11\ \text{km},\quad Ma=0.76,\quad K=15.8,\quad c_f=0.11\ \text{kg/(N·h)},\quad \eta=1.0$$

且认为飞机上升到巡航高度及从巡航高度下滑返回落地的水平距离均为 245 km,试求该机活动半径。

2.14　为提高飞机的续航性能,飞机设计中可采取哪些措施?

2.15　何谓多发动机单发停车时的"决策速度"和"平衡场地长度"?试分析起飞重量对平衡场地长度和驾驶员的决策的影响。

2.16　某通用飞机重 44 440 N,翼载荷 1 433.6 N/m^2,极曲线形状表示为 $C_D=0.02+0.04C_L^2$ 和 $C_{L\max}=1.2$。该机从高空 600 m 处无动力滑翔,试确定最大滑翔距离和最大续航时间。

第3章　飞机的机动性和敏捷性

前面用定常或准定常运动方程讨论了飞机的基本飞行性能和续航性能，着重解决飞机能够飞得多快多高，飞得多远多久的问题；采用飞机接地/近地时的非定常运动方程讨论了确保安全的飞机起飞、着陆性能。显然，仅讨论这些飞行性能是不够的，飞机在空中的运动往往是运动参数随时间变化的非定常运动，如加减速、跃升、盘旋和特技飞行等。这些运动的特性可归纳为飞机的机动性和敏捷性。

飞机的机动性是指飞机在一定时间内改变飞行速度、飞行高度和飞行方向的能力，相应地称为速度机动性、高度机动性和方向机动性。按航迹的特点来分，飞机的机动飞行通常分为铅垂平面内、水平平面内和空间的机动飞行。在空战中，优良的机动性有利于获取空战优势，所以飞机的机动性是飞机的重要战术技术指标。

飞机的敏捷性是指飞机在空中迅速、精确地改变机动飞行状态的能力。敏捷性的提出，主要是由于航空技术的发展，全方位离轴发射空空导弹的出现，使得空战特点有了明显的变化，由“占位”转至取得“指向”，故迅速改变飞机飞行状态，抢先对准目标变得愈显突出。它与飞机机动性密切相关，但又不是机动性能所能概括的，它更重视飞机运动的瞬变性能。按飞行状态变化的时间尺度来分，有小时间尺度的瞬态敏捷性和大时间尺度的功能敏捷性。按飞机运动特点又可分为轴向敏捷性、纵向敏捷性和滚转敏捷性。

本章首先介绍飞机的过载概念；其次分别介绍铅垂面和水平面内的机动性能，在此基础上提出飞机机动性综合指标；然后介绍飞机的敏捷性；最后简要介绍为提高飞机敏捷性的过失速机动。

3.1　机动飞行时的过载

作用在飞机上的气动力和发动机推力的合力与飞机重量之比，称为飞机的过载。显然过载为一矢量。设过载为$\boldsymbol{n}$，气动力和推力的合力为$\boldsymbol{N}$，则该力驾驶员是可以控制的，在第1章中称为可控力。按定义有

$$\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{N}}{W} \tag{3.1}$$

由于过载表征可操纵力$\boldsymbol{N}$的大小和方向，而驾驶员就是通过该力的大小和方向来实现各种机动动作的，因此可以利用过载的概念来研究飞机的机动性。

设飞机在无侧滑中飞行，且发动机推力沿着飞行速度方向，则质心运动在航迹坐标系上的



投影方程式(1.36)可简化为

$$\left.\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= T-D-W\sin\gamma \\ mV\cos\gamma\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} &= L\sin\mu \\ -mV\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= -L\cos\mu+W\cos\gamma \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

从方程中可以看到可操纵力 **N** 在航迹坐标系的投影。于是可以分别得出过载在该轴系上的投影分量为

$$\left.\begin{aligned} n_x &= \frac{T-D}{W} \\ n_y &= \frac{L\sin\mu}{W} \\ n_z &= \frac{L\cos\mu}{W} \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

式中 n_x沿着飞行速度方向,通常称为切向过载或轴向过载;n_y和 n_z均垂直于飞行速度矢量,其合过载

$$n_\mathrm{n} = \sqrt{n_y^2+n_z^2}$$

称为法向过载。式中 n_z的方向按习惯特定义为 Oz 轴反方向法向力与重量之比。显然,当 $\mu=0$时,$n_z= n_\mathrm{n}$;当 $\mu=90°$时,$n_y=n_\mathrm{n}$。

3.1.1　运动与过载的关系

将过载投影表示式代入式(3.2)中,则运动方程可改写为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= g(n_x-\sin\gamma) \\ V\cos\gamma\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} &= gn_y \\ V\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= g(n_z-\cos\gamma) \end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

由此可以清楚地看出过载与飞机运动之间的关系。

如果 $n_x=\sin\gamma$,则飞机将处于等速飞行;如果 $n_x>\sin\gamma$,则加速飞行;如果 $n_x<\sin\gamma$,则减速飞行。

如果飞机在铅垂面内飞行,当 $n_z=\cos\gamma$时,则飞机处于直线爬升状态;当 $n_z>\cos\gamma,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}>0$时,则飞行轨迹向上弯曲;当 $n_z<\cos\gamma,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}<0$时,则飞行轨迹向下弯曲,如图 3.1(a)所示。其转弯(弯曲)速率,考虑到铅垂面内飞行时 $\mu=0$,由方程式(3.4)中第三式可直接得出



$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{V}(n_z-\cos\gamma)=\frac{g}{V}(n_\mathrm{n}-\cos\gamma) \tag{3.5}$$

轨迹弯曲程度可用轨迹上每点的曲率表示，即该点的轨迹倾角 γ 对弧长 s 的导数

$$K_\mathrm{v}=\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}s}$$

相应的转弯半径（曲率半径）应是曲率的倒数，即

$$R_\mathrm{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\gamma}=V/\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{V^2}{g(n_z-\cos\gamma)} \tag{3.6}$$

如果飞机在水平平面内飞行，则 $\gamma=0$。当 $n_y=0$ 时，飞机处于水平面直线飞行；当 $n_y>0$ 时，则 $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}>0$，飞行轨迹向右弯曲；当 $n_y<0$ 时，则 $\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}<0$，飞行轨迹向左弯曲，如图 3.1(b)所示。其转弯（盘旋）速率，可由方程式(3.4)中第二式直接得出，即

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{V}n_y=\frac{g}{V}\sqrt{n_\mathrm{n}^2-1} \tag{3.7}$$

相应的转弯（盘旋）半径类似地可得

$$R_\mathrm{h}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\chi}=V/\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\frac{V^2}{gn_y}=\frac{V^2}{g\sqrt{n_\mathrm{n}^2-1}} \tag{3.8}$$

由式(3.5)、式(3.6)、式(3.7)和式(3.8)可以看出，无论在铅垂面内还是水平面内飞行，给定飞行速度情况下，法向过载 n_n 越大，转弯速率就越大，转弯半径则越小。在同样过载数值下，随着飞行速度的增加，转弯速率将减小，转弯半径则增大。

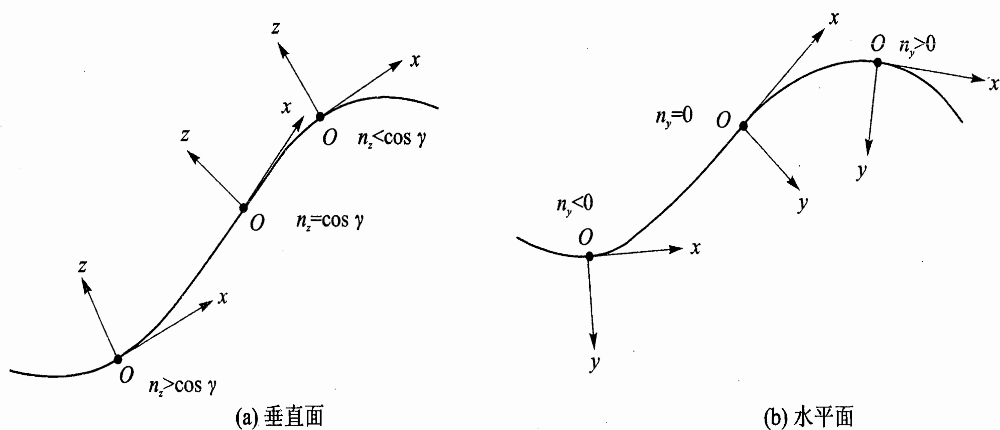


图 3.1　飞行轨迹与法向过载关系

3.1.2　过载限制

显然，飞机机动飞行时，法向过载 n_n 愈大，表明机动性能愈好，但是此时作用在飞机上的载荷也很大，飞机结构强度、控制仪表的正常工作和人的生理机能等将失控或受到破坏，为此



对法向过载有一定的限制。

对于歼击机，在正常装载下，飞机的最大法向过载通常受人的生理条件限制。一般情况下，驾驶员坐态姿势正确，在5～10 s内能承受的过载为8；在20～30 s内能承受的过载则降为5。对于轰炸机等大型飞机，飞机最大法向过载受结构强度的限制，在2.5～3.5之间。至于民用客机，由于顾及旅客在飞行过程中的舒适性，一般不能大于2。

可见，法向过载是一个非常重要的因素。为了满足上述要求，在飞机设计过程中引入了极限过载、可用过载和需用过载等概念。极限过载定义为飞机的迎角达到失速迎角时的法向过载，此时过载可用$C_{L\max}$来确定，即

$$n_{n.l}=\frac{qSC_{L\max}}{W} \tag{3.9}$$

可用过载定义为舵偏转到最大时飞机所能产生的法向过载$n_{n.a}$，此时的最大舵偏角应考虑到平衡迎角不应超过失速迎角、舵面的操纵效率以及结构强度限制等因素。

需用过载定义为飞机实现某机动飞行时所需的法向过载$n_{n.R}$，如已知飞机在垂直平面机动飞行轨迹，即$V_*(t)$及$\gamma_*(t)$等已求得，则其需用过载变化规律可由式(3.4)求得，即

$$n_{n.R}=n_z=\frac{V_*}{g}\frac{d\gamma_*}{dt}+\cos\gamma_* \tag{3.10}$$

飞机设计时，应该使需用过载小于或等于可用过载，而不超过极限过载，即

$$n_{n.R}\leqslant n_{n.a}<n_{n.l} \tag{3.11}$$

3.2 铅垂平面内的机动性能

铅垂平面内的机动飞行，是指飞机的对称平面始终与飞行速度矢量所在的铅垂平面相重合的飞行。这种机动飞行主要包括：只改变飞行速度大小的平飞加速和减速状态；同时改变速度和高度的跃升、俯冲及筋斗等机动动作，如图3.2所示。

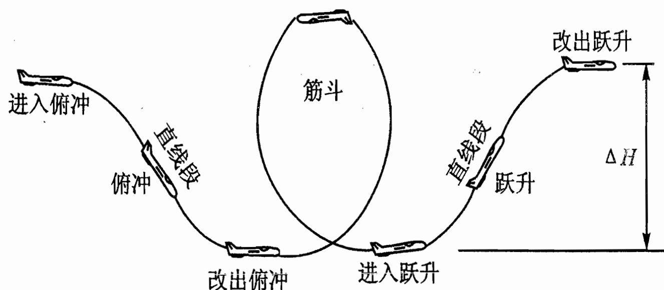


图3.2 飞机在铅垂平面内的主要机动飞行



3.2.1 平飞加减速

平飞加减速性能，反映了飞机改变速度大小的能力。现代飞机的最大速度不断提高，平飞速度范围日益扩大，加减速幅度也随之增大，因此对飞机的速度机动性能也提出了更高的要求。

飞机水平直线飞行时，$\mathrm{d}\gamma/\mathrm{d}t=0,\gamma=0$，由方程式(3.2)可简化得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{W}(T-D)=\frac{g}{W}\Delta T=n_x g\\&L=W\qquad(n_z=1)\end{aligned}\right\}\tag{3.12}$$

由上式可见，飞机加减速 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$ 的大小，主要取决于切向过载 n_x 或剩余推力 ΔT 的大小。此时飞机保持水平飞行，位能不变，故 ΔT 将全部用于改变飞机的动能，改变飞行速度。加速时，必须加大油门，甚至使用发动机加力工作状态，以增加推力，使 $\Delta T>0$；减速时，必须减小油门以减小推力，或同时打开减速板增大阻力，使 $\Delta T<0$。

衡量平飞加减速的指标，常用从一平飞速度加速（或减速）到另一个平飞速度所需的时间来表示。对于亚声速飞机，采用 $0.70V_{\max}$ 加速到 $0.97V_{\max}$ 的时间作为加速性指标；由 $V_{\max}$ 减速到 $0.70V_{\max}$ 的时间作为减速性指标。对于超声速飞机，采用亚声速飞行时的常用 Ma 和最大使用 Ma 之间的加减速时间，作为加减速性能指标。该指标可直接由方程式(3.12)积分得出

$$t=\frac{1}{g}\int_{V_0}^{V_1}\frac{\mathrm{d}V}{n_x}=\frac{W}{g}\int_{V_0}^{V_1}\frac{\mathrm{d}V}{\Delta T}\tag{3.13}$$

式中 V_0 为初始平飞速度，V_1 为加速或减速终了时的平飞速度。

由于式(3.13)中 ΔT 随速度改变，故上式只能用数值积分法或图解积分法求解。图解法是对给定的高度，根据相应的发动机工作状态和 $L=W$ 的条件，作出函数 $W/(g\Delta T)$ 对 V 的关系曲线，如图 3.3(a)所示。图中曲线下的面积即为所求的从 V_0 改变到 V_1 所需的时间。

同一架飞机，在不同的高度其加减速性能是不一样的。表 3.1 列出了某歼击机的加速性能计算结果。

表 3.1 某歼击机的加速性能

高度/m	增速范围/(m·s^{-1})	平均剩余推力 ΔT/N		加速时间/s	
		最大状态	加力状态	最大状态	加力状态
5 000	222～250	5 880	12 260	23.6	11.3
15 000	222～250	690	2 940	201.0	47.0

从表 3.1 可见，对于同样的加速范围，在相同的发动机工作状态下，飞机高度在 15 000 m 比在 5 000 m 所需加速时间长得多。这是因为，剩余推力不仅随速度而变，还随高度而变。由



于发动机可用推力随高度升高而降低，ΔT 随之减小，从而使高空加速性能恶化。

除了上述的加减速时间指标外，有些情况还要确定在相应时间内的飞行距离。注意到 $\mathrm{d}L=V\mathrm{d}t$，故相应的飞行距离可积分得出

$$L=\frac{W}{g}\int_{V_0}^{V_1}\frac{V\mathrm{d}V}{\Delta T}=\frac{W}{2g}\int_{V_0^2}^{V_1^2}\frac{\mathrm{d}V^2}{\Delta T} \tag{3.14}$$

上式的求解，同样采用数值积分或图解积分。图 3.3(b)为函数 $WV/(g\Delta T)$ 对 V 的关系曲线。曲线下的面积即为所求的从 $V_0 \sim V_1$ 加速所经过的飞行距离。

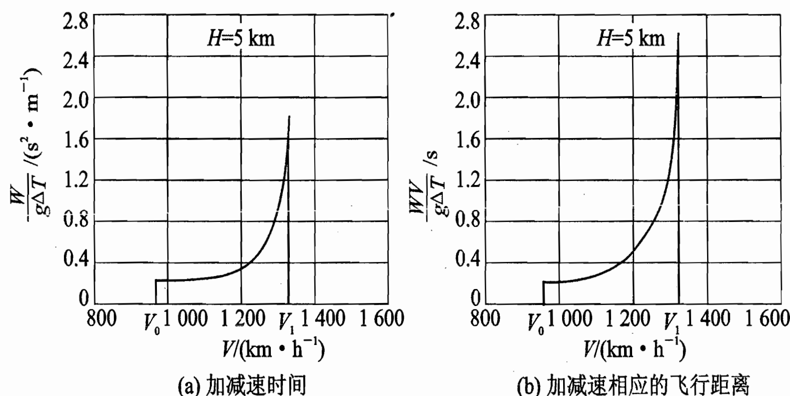


图 3.3　确定飞机加减速性能的图解法

飞机加减速性能与飞机的基本参数之间的关系，可由方程式(3.12)改写成如下形式：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=g\left(\frac{T}{W}-\frac{1}{K}\right) \tag{3.15}$$

式中 K 为升阻比。由式(3.15)看出，增大推重比 T/W，提高飞机的升阻比 K，可以改善飞机的加速性能；若与此相反，则可改善飞机的减速性能。

3.2.2　跃　升

跃升是将飞机的动能转变为位能，迅速取得高度优势的一种机动飞行。在给定初始高度和初始速度下，飞机所能获得的高度增量愈大，完成跃升所需时间愈短，则它的跃升性能愈好。

跃升通常可分为进入跃升、跃升直线段和改出跃升三个阶段，如图 3.2 所示。精确计算跃升性能仍需要通过对式(1.45)和式(1.51)进行数值积分。这里仅介绍近似估算跃升高度增量的能量法。

1. 跃升高度

设进入跃升时飞行状态为(V_0, H_0)，改出跃升时飞行状态为(V_1, H_1)。计算跃升高度时，可近似认为跃升过程中推力和阻力基本相等$(T=D)$，升力 L 又始终与运动轨迹相垂直，飞机仅在势力场(重力)下作用，故可利用能量守恒定律得

$$\Delta H = H_1 - H_0 = \frac{1}{2g}(V_0^2 - V_1^2) \tag{3.16}$$

可见，初始速度 V_0 愈大，跃升终了时的速度 V_1 愈小，则跃升高度增量 ΔH 愈大。但为保证飞行安全，改出跃升时速度不得小于最小允许使用速度 V_a。为此，在给定初始飞行状态下，可得最大跃升高度增量为

$$\Delta H_{\max} = \frac{1}{2g}(V_0^2 - V_a^2) \tag{3.17}$$

式中 V_a 为飞机最小允许使用速度，由下式确定，即

$$V_a = \sqrt{\frac{2W}{\rho S C_{L.a}}} \tag{3.18}$$

由于 V_a 与待求高度上的空气密度 ρ 和允许升力系数 $C_{L.a}$ 有关，因此 $\Delta H_{\max}$ 只能迭代求得。其具体步骤如下：

① 给定 H_0 和 V_0，先估计一个 V_a'，由式(3.17)计算出 $\Delta H'$；

② 按 $H_1' = H_0 + \Delta H'$ 查得声速 c'，并算出 $Ma_a' = V_a'/c'$，再由该机的升力特性曲线查得 $C_{L.a}'$；

③ 由 H_1' 和 $C_{L.a}'$ 按式(3.18)，确定一个新的 V_a''；

④ 用 V_a'' 重复步骤①～③，直到先后两次所得的 V_a 的变化很小为止；

⑤ 将最后得到的 V_a 代入式(3.17)，求得跃升高度增量 $\Delta H_{\max}$。

表 3.2 给出了某跨声速飞机以发动机加力工作状态跃升的性能数据，从中可以看出 ΔH 和 V_0，V_1 之间的关系。

表 3.2 某歼击机跃升性能

跃升起始高度/m	初始速度 V_0/(m·s^{-1})	跃升高度增量 ΔH/m	跃升终了速度 V_1/(m·s^{-1})
1 000	336	5 820	109
5 000	343	5 320	135
11 000	330	3 600	167

2. 动升限

动升限是衡量飞机跃升性能的另一个指标，定义为利用飞机的动能通过跃升可能达到的最大高度。因为飞机在实用静升限附近飞行时，能保持定直平飞的条件，而此时的飞行速度远大于最小允许速度 V_a，还有相当大的速度裕量，故可以通过跃升获得比静升限更高的高度，如图 3.4 所示。动升限的具体计算由式(3.16)导出。

$$H_{\max.d} = \left(H_0 + \frac{V_0^2}{2g}\right)_{\max} - \frac{V_a^2}{2g} \tag{3.19}$$

式中 V_a 为动升限 $H_{\max.d}$ 高度上的最小允许飞行速度。右端第一项为飞机最大能量高度 $H_{e.\max}$，表明飞机在跃升起始高度 H_0 上所具有的最大能量，其中 V_0 应取高度 H_0 上的最大平飞



速度 V_{max}。

显然，动升限高度与进入跃升时的总能量有关，即与能量高度 H_e有关。因此为求得飞机的动升限，首先应确定总能量最大的飞行状态，也就是求最大能量高度 $H_{e.max}$ 的状态。根据第 2 章求得的飞机飞行包线(见图 2.10)，可以算出能量高度 $H_e=H+V_{max}^2/2g$ 随 H 的变化曲线，如图 3.5 所示。从图 3.5 中找得最大能量高度 $H_{e.max}$和相对应的起始跃升高度 H_0，再从飞行包线上查得起始跃升的速度 $V_{max}(H_0)$。随后利用式(3.17)和式(3.18)按迭代法求得改出跃升时的最小允许飞行速度 V_a。最后，由式(3.19)算得动升限 $H_{max.d}$。一般来说，这时的跃升起始高度低于飞机的理论静升限。这是因为当飞机接近静升限时，往往随高度增加，最大平飞速度迅速减小，因而能量高度反而减小。

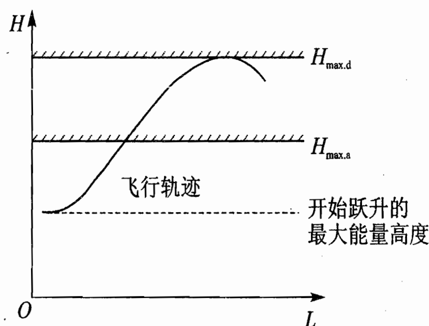


图 3.4 动升限示意图

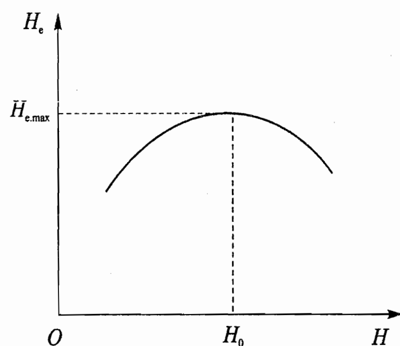


图 3.5 最大能量高度的确定

应当指出，动升限与静升限是两个不同的概念。前者是通过跃升而获得的最大高度，在该高度上飞机的可用推力小于需用推力，飞机不能作等速平飞。而后者是等速直线平飞的最大高度，在该高度上，飞机的可用推力等于需用推力。动升限和静升限之间的高度范围叫动力高度飞行范围。飞机在动力高度飞行范围内，可以保持一定时间的减速平飞。

例如某超声速歼击机无外挂时的实用静升限为 19 500 m，驾驶员在 13 500 m 高度上增速到 Ma 为 2.05 时进行跃升机动，其动升限可达 23 000 m 左右。

3.2.3 俯 冲

俯冲是飞机用位能换取动能，迅速降低高度、增加速度的机动飞行。利用俯冲可以实施追击、攻击地面目标或进行俯冲轰炸等。俯冲的航迹可以分成三段：进入俯冲、俯冲直线段和改出俯冲，如图 3.2 所示。

对于俯冲性能的要求是：一方面要求有较好的直线俯冲加速性；另一方面要求改出俯冲时不应有太大的高度损失。

1. 直线俯冲段

直线俯冲时，由于$\frac{d\gamma}{dt}=0$，方程式(1.45)可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{g}{W}(T-D-W\sin\gamma)\\L&=W\cos\gamma\end{aligned}\right\}\tag{3.20}$$

因俯冲时航迹倾角γ为负值，故重力分量$(-W\sin\gamma)$为正值，在俯冲时起加速作用。当$(T-W\sin\gamma)>D$，$\frac{dV}{dt}>0$时，飞机加速俯冲，随着高度降低，空气密度增加和飞行速度加快，飞机阻力显著增加。当俯冲至某一高度和速度时，$(T-W\sin\gamma)=D$，$\frac{dV}{dt}=0$，此时的飞行速度称为俯冲极限速度。其值为

$$V_{d.1}=\sqrt{\frac{2(T-W\sin\gamma)}{C_D\rho S}}$$

在飞机设计中，俯冲极限速度$V_{d.1}$应该小于该高度上的最大容许速度。最大容许速度通常由飞机结构强度所限制的q_{max}确定。为了保持直线俯冲，在达到极限速度以前，必须使升力系数C_L或迎角α随动压q的增加而减小。

飞机的俯冲速度随飞行高度的变化规律，可通过对$\frac{dV}{dt}$作如下变换：

$$\frac{dV}{dt}=\frac{dV}{dH}\frac{dH}{dt}=V_v\frac{dV}{dH}=V\sin\gamma\frac{dV}{dH}$$

代入式(3.20)中的第一式得

$$\frac{dV}{dH}=-\frac{g}{V}\left[1-\frac{T_a-C_D\frac{1}{2}\rho V^2S}{W\sin\gamma}\right]\tag{3.21}$$

经对上式数值积分即得。

例：某跨声速飞机在11 000 m高度以初始速度$V_0=266$ m/s用不同γ角俯冲，发动机处于慢车状态($T_a\approx0$)，放下减速板。经计算求得的俯冲速度随高度的变化列于表3.3中。

表3.3　某歼击机俯冲速度随高度变化

H/m		11 000	9 000	7 000	6 000	5 000	1 000
$V/(m\cdot s^{-1})$	$\gamma=90°$	266	306	329	333	331	310
	$\gamma=60°$	266	306	321	322	319	296

由上表可见，γ角愈大，俯冲到某高度时的速度也愈大。俯冲前段是加速，后段是减速。其极限速度出现在6 000 m高度附近，相应的值对于$\gamma=90°$和$\gamma=60°$分别为333 m/s和322 m/s。该机的q_{max}规定为65 200 N/m^2，相当于6 000 m高度上最大允许速度为444 m/s。



所以上述的俯冲是安全的。

2. 改出俯冲段

改出俯冲时，驾驶员将拉杆增大迎角，以获得较大的过载，使飞行轨迹向上弯曲。当轨迹接近水平时，再推杆减小迎角，使飞机转入平飞状态。可见，改出俯冲是一种飞行速度、高度、轨迹倾角和迎角都在变化的非定常曲线运动。

俯冲改出段的高度下降量常是人们非常关心的，因为直接涉及到飞行安全。下面介绍改出俯冲时高度损失的近似公式。

近似估算时，认为改出过程中发动机推力与飞机阻力基本相等，则运动方程式(1.45)可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=-g\sin\gamma\\\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}&=\frac{g}{V}(n_z-\cos\gamma)\end{aligned}\right\}\tag{3.22}$$

上两式相除，可得

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}\gamma}=-\frac{V\sin\gamma}{n_z-\cos\gamma}$$

或

$$\frac{\mathrm{d}V}{V}=-\frac{\sin\gamma}{n_z-\cos\gamma}\cdot\mathrm{d}\gamma\tag{3.23}$$

如改出俯冲开始时的速度和轨迹倾角分别为 V_1 和 γ_1，结束时的速度和轨迹倾角分别为 V 和 γ，其中 $\gamma=0$，并认为改出俯冲过程中 n_z 为常数，则对式(3.23)积分，得出改出俯冲结束时的飞行速度为

$$V=\frac{n_z-\cos\gamma_1}{n_z-1}\cdot V_1\tag{3.24}$$

考虑到发动机推力和飞机阻力基本相等，因此改出俯冲过程中的高度损失也可用能量守恒定律求得

$$\Delta H=\frac{1}{2g}(V^2-V_1^2)$$

将式(3.24)代入上式，可得改出俯冲高度损失计算公式为

$$\Delta H=\frac{V_1^2}{2g}\left[\left(\frac{n_z-\cos\gamma_1}{n_z-1}\right)^2-1\right]\tag{3.25}$$

由此可见，只要知道开始改出俯冲时的速度 V_1、轨迹倾角 γ_1 和平均过载 n_z，即可求得改出俯冲时的高度损失。

例： 某飞机自垂直俯冲中改出，$V_1=338$ m/s，求飞机以过载 $n_z=6$ 和 $n_z=8$ 两种情况下改出俯冲时的高度损失和改出后的速度。

当 $n_z=6$ 时，由式(3.24)和式(3.25)可得

$$\Delta H=\frac{338}{2\times 9.81}\left[\left(\frac{6-\cos 90^\circ}{6-1}\right)^2-1\right]\text{ m}=2\ 565\text{ m}$$

$$V=338\left(\frac{6-\cos 90^\circ}{6-1}\right)\text{ m/s}=406\text{ m/s}$$

当 $n_z=8$ 时，通过类似的计算可得

$$\Delta H=1\ 784\text{ m},\qquad V=386\text{ m/s}$$

该示例结果表明，高速飞机改出俯冲时的高度损失是比较大的。增大过载，可以减小改出俯冲的高度损失，但过载受飞机结构强度和驾驶员生理条件的限制。为了保证安全，开始改出俯冲时飞机应具有足够的高度储备。

3.3 水平平面内的机动性能

飞机在水平平面内的机动性能着重反映飞机的方向机动性。最常见的机动动作是盘旋，即飞机在水平平面连续转弯不小于360°的机动飞行。当转弯小于360°时，常称为“转弯”。

盘旋可分为定常盘旋和非定常盘旋。前者其运动参数如飞行速度、迎角、倾斜角以及盘旋半径等都不随时间而改变，是一种匀速圆周运动；后者其运动参数中有一个或数个随时间而改变。盘旋时飞机可以带侧滑或不带侧滑。无侧滑的定常盘旋称为正常盘旋。

由于正常盘旋具有一定代表性，常作为典型的水平机动动作，用盘旋一周所需时间和盘旋半径作为评价指标。为此下面着重讨论正常盘旋，然后再讨论非定常盘旋。

3.3.1 正常盘旋

正常盘旋时，飞机是在水平面内作匀速圆周运动，故 $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=0$，$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=0$，$\gamma=0$，且将法向惯性力形式改写为 $mV\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=m\frac{V^2}{R}$，$R$ 为正常盘旋半径。于是运动方程(3.2)可简化为

$$\left.\begin{aligned}&T=D\\&L\cos\mu=W\\&\frac{W}{g}\frac{V^2}{R}=L\sin\mu\end{aligned}\right\}\tag{3.26}$$

其中，第一式表示为了保持速度大小不变，发动机可用推力应与飞机阻力相平衡；第二式表示为了保持飞行高度不变，升力在铅垂方向的分量 $L\cos\mu$ 应与飞机的重力相平衡；第三式表示为了保持盘旋半径 R 不变，按动静法，向心力 $L\sin\mu$ 应与离心力平衡。飞机上所受力的关系如图3.6所示。

由方程式(3.26)可求得正常盘旋半径为

$$R=\frac{1}{g}\frac{V^2}{n_\mathrm{n}\sin\mu}=\frac{1}{g}\frac{V^2}{\sqrt{n_\mathrm{n}^2-1}}\tag{3.27}$$



正常盘旋角速度为

$$\dot{\chi} = \frac{V}{R} = \frac{g\sqrt{n_n^2 - 1}}{V} \tag{3.28}$$

正常盘旋一周的时间为

$$t_{2\pi} = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi V}{g\sqrt{n_n^2 - 1}} \tag{3.29}$$

由式(3.27)和式(3.29)可见,减小飞行速度 V 和增加过载 n_n,可以减小盘旋半径 R 和盘旋一周的时间 $t_{2\pi}$,提高飞机的方向机动性。但 V 减小和 n_n 增加均会受到一些因素限制。根据这些限制条件可以确定飞机实现正常盘旋的飞行范围。

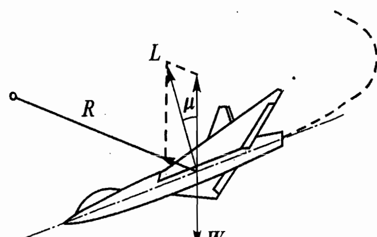
1. 正常盘旋的飞行范围

限制因素主要有三方面:

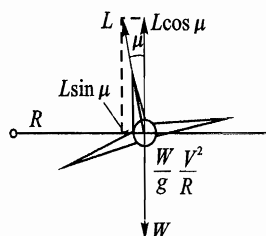
① 过载增加受到飞机结构强度和人的生理条件限制,故有 $n_{n.max}$ 存在。

② 速度减小,为了保持盘旋时的 $L\cos\mu = W$,必须增加 C_L;但为了飞行安全,C_L 要受到最大允许升力系数 $C_{L.a}$ 的限制。

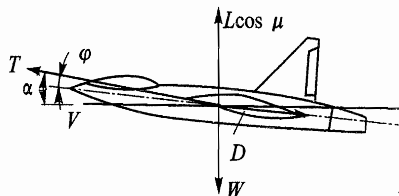
③ C_L 增加,阻力随之增加,为了满足 $T = D$ 条件,要求可用推力 T_a 增加,但会受到发动机特性 $T_{a.max}$ 的限制。



(a) 立体图



(b) 后视图



(c) 侧视图

图 3.6　正常盘旋时作用在飞机上的力

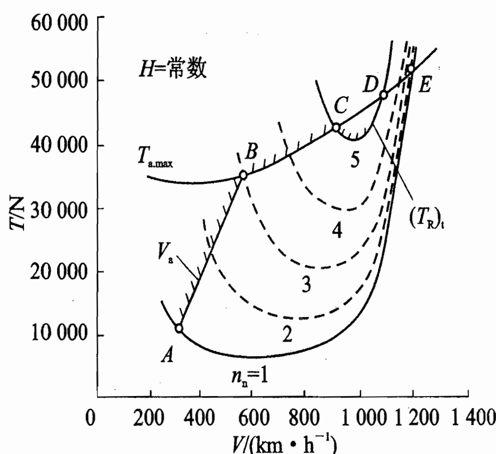


图 3.7　正常盘旋界限图

根据这些限制条件,可以形象地画出飞机在某个高度能实现正常盘旋的飞行范围,称为正常盘旋界限图,如图 3.7 所示。绘制该图的步骤是首先绘出给定高度上发动机的最大可用推力曲线;然后绘制 $n_n = 1$ 到 $n_n = n_{n.max}$ 的盘旋需用推力 $(T_R)_t$ 曲线族;最后在曲线族上标出该高度上由 $C_{L.a}$ 所决定的最小允许盘旋速度 V_a 随 n_n 的变化曲线(图上 AB 线)。由这些限制线和 $n_n = 1$ 的需用推力曲线构成的区域,即为正常盘旋飞行范围。

2. 极限盘旋

处于上述三种限制条件之一的盘旋称为极限盘旋。极限盘旋性能可通过这三个限制因素,分别算出相应的极限盘旋半径 R、盘旋一

周的时间 $t_{2\pi}$ 和相应的法向过载 n_n 随飞行速度的变化曲线，谓之极限盘旋性能图。

① 按飞机结构强度或人的生理条件限制，应根据不同类型的飞机，确定相应的最大法向过载。如歼击机，按驾驶员较长时间能承受的过载，可取 $n_{n.max}=5$。然后将其代入式(3.27)和式(3.29)，即得受飞机结构和驾驶员生理限制的极限盘旋半径 R 和盘旋一周时间 $t_{2\pi}$。

② 按飞机升力系数 C_L 的限制。在第1章中已述，为了飞行安全，飞机升力系数增大受到失速升力系数 $C_{L.s}$ 和平尾最大偏角时的升力系数 $C_{L.\delta max}$ 的限制，由此可确定盘旋时相应的允许升力系数 $C_{L.a}$，求得

$$n_{n.max} = \frac{L}{W} = \frac{\rho SV^2 C_{L.a}}{2W} \tag{3.30}$$

再代入式(3.27)和式(3.29)，得到受升力系数限制的极限盘旋半径 R 和盘旋一周时间 $t_{2\pi}$。

③ 按发动机的最大可用推力 $T_{a.max}$ 限制。正常盘旋时，飞机的升力为

$$L = n_n W$$

相应的升力系数由上式得

$$C_L = \frac{n_n W}{\frac{1}{2}\rho V^2 S} \tag{3.31}$$

飞机的阻力为

$$D = C_D \frac{1}{2}\rho V^2 S = (C_{D0} + AC_L^2)\frac{1}{2}\rho V^2 S = \left[C_{D0} + A\left(\frac{n_n W}{\rho V^2 S/2}\right)^2\right]\frac{1}{2}\rho V^2 S = D_{0.lf} + n_n^2 D_{i.lf} \tag{3.32}$$

式中 $D_{0.lf}$ 和 $D_{i.lf}$ 分别为同样高度、速度下平飞时的零升阻力和升致阻力。

由上式可见，飞机在给定高度、速度下盘旋时的阻力，比同样高度、速度下平飞时的阻力大。实现正常盘旋时，必须满足 $T_a=D$ 的要求。如盘旋所需过载 n_n 过大，则可能盘旋阻力超过发动机提供的可用推力，飞机将只能减速盘旋。

因此，当可用推力为 $T_{a.max}$ 时，可由式(3.32)求得其相应的最大法向过载为

$$n_{n.max} = \sqrt{\frac{T_{a.max} - D_{0.lf}}{D_{i.lf}}} \tag{3.33}$$

再代入式(3.27)和式(3.29)，即得受可用推力限制的极限盘旋半径 R 和盘旋一周时间 $t_{2\pi}$。

图3.8为按上述方法确定的某机在某飞行高度上的极限盘旋性能图。从图上可以确定该高度上用各种不同速度作极限盘旋的盘旋半径 R、盘旋一周时间 $t_{2\pi}$ 以及最大的法向过载 $n_{n.max}$。

对于超声速飞机在一定飞行高度上，由于其推力特性的特点，存在两个最大的剩余推力，因此，按式(3.33)计算得出法向过载 n_n 也有两个最大值 $n_{n.max}$，如图3.9所示。一个出现在 Ma 接近1的范围；另一个出现在 Ma 大于1的范围。虽然在超声速范围作极限盘旋时，$n_{n.max}$ 较大，但速度大小的影响起主要作用，故盘旋半径 R 较大，盘旋一周时间 $t_{2\pi}$ 较长。因此超声速



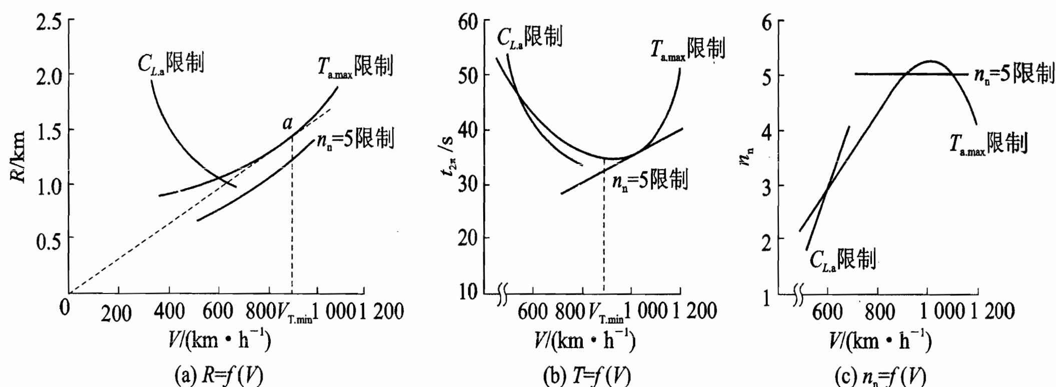


图 3.8 某机的极限盘旋性能图

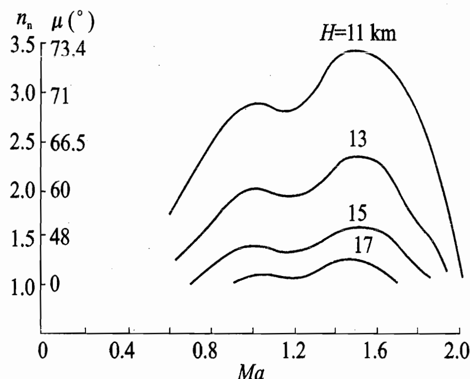


图 3.9 某超声速飞机最大法向过载 $n_{n.max}$ 随 H,Ma 变化曲线

飞机的最小盘旋半径和最短盘旋时间应是在亚声速范围内。

3.3.2 最优盘旋

对于战斗机来说,为了取得空中优势,飞机应具有最快的盘旋(转弯)角速度和最小盘旋(转弯)半径的能力。通常这两种情况是不可能同时出现的。在近距空战格斗中,快速转弯的能力比急剧转弯的能力更重要。现代高性能战斗机,如美国的 F—15,F—16 能以高于 20 (°)/s 的角速度转弯。

在给定发动机推力、翼载和飞机阻力特性的条件下,来确定飞机转弯速度和转弯半径的最佳值,将受过载 n_n 和升力系数 C_L 的限制,因此是一个比较复杂的非线性优化问题。这里将采用简单解析方法来估算飞机的最优盘旋(转弯)性能。

在水平面内的正常盘旋(亦称协调转弯)可有多种形式。下面仅具体介绍三种特别感兴趣的情况:① 最大转弯速率的盘旋;② 急剧转弯或最小转弯半径的盘旋;③ 最大可能过载下的盘旋。随后,介绍允许飞行高度损失的协调转弯的情况,确定飞机最大瞬态速率的转弯性能。

在具体介绍这些盘旋性能前,为使推导公式时写得简洁些,除采用原有的无因次量过载n_n和升阻比K外,还引入了新的无因次变量。

无因次推力K_T定义为

$$K_T = \frac{TK_{max}}{W} \tag{3.34}$$

无因次速度u定义为

$$u = \frac{V}{V_{opt}} \tag{3.35}$$

式中有利速度$V_{opt}=\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}}$。

相应的飞机阻力D可表示为

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S(C_{D0} + AC_L^2) = \frac{1}{2}\rho V^2 S\left[C_{D0} + A\left(\frac{2n_n W}{\rho V^2 S}\right)^2\right]$$

将$V=uV_{opt}$代入,归纳后得

$$D = \frac{W}{2K_{max}}\left(u^2 + \frac{n_n^2}{u^2}\right) \tag{3.36}$$

于是正常盘旋运动方程式(3.26)中第一式,可用无因次参数表示,即

$$\frac{K_T W}{K_{max}} - \frac{W}{2K_{max}}\left(u^2 + \frac{n_n^2}{u^2}\right) = 0$$

或表示为

$$u^4 - 2K_T u^2 + n_n^2 = 0$$

$$n_n = \sqrt{2K_T u^2 - u^4} \tag{3.37}$$

盘旋(转弯)半径式(3.27)和盘旋(转弯)角速度式(3.28)的无因次参数表示式为

$$R = \frac{u^2 V_{opt}^2}{g\sqrt{u^2(2K_T - u^2) - 1}} \tag{3.38}$$

$$\dot{\chi} = \omega = \frac{g\sqrt{2K_T u^2 - u^4 - 1}}{uV_{opt}} \tag{3.39}$$

1. 最大持续转弯速率

飞机保持常值高度的最大持续转弯速率的条件,可由转弯速率公式对u求导得出。将式(3.39)改写成

$$\left(\frac{\omega V_{opt}}{g}\right)^2 = 2K_T - u^2 - \frac{1}{u^2} \tag{3.40}$$

上式对u求导并令其值等于零,即

$$2\omega\left(\frac{V_{opt}}{g}\right)^2 \frac{d\omega}{du} = -2u + \frac{2}{u^3} = 0$$



通常 $\omega\neq0$,故可得

$$u=1 \tag{3.41}$$

即 $V=V_{\text{opt}}$。在该条件下飞机最大持续转弯速率的盘旋性能可表示为

$$n_{\text{n}}=\sqrt{2K_T-1} \tag{3.42}$$

$$V=V_{\text{opt}}=\sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}} \tag{3.43}$$

相应的升力系数可由阻力式(3.36)导出,其诱导阻力与零升阻力比为

$$\frac{AC_L^2}{C_{D0}}=\frac{n_{\text{n}}^2}{u^2}/u^2=n_{\text{n}}^2=2K_T-1$$

则

$$C_L=\sqrt{\frac{(2K_T-1)C_{D0}}{A}}=\sqrt{2K_T-1}C_{L.\text{opt}} \tag{3.44}$$

最大持续盘旋速率和相应的盘旋半径由式(3.38)和式(3.39)可得

$$\omega_{\max}=\frac{g\sqrt{2K_T-2}}{V_{\text{opt}}} \tag{3.45}$$

$$R=\frac{V_{\text{opt}}^2}{g\sqrt{2K_T-2}}=\left(\frac{2W}{\rho Sg}\right)\sqrt{\frac{A}{2(K_T-1)C_{D0}}} \tag{3.46}$$

实现最大持续转弯速率盘旋时,由式(3.42)求得的过载 n_{n} 应小于或等于极限过载 $n_{\text{n.l}}$;由式(3.44)求得的升力系数应小于或等于 $C_{L\max}$。如这两个条件不能满足,则飞机就不具备最大持续转弯速率盘旋的能力,上述分析也是无效的。

2. 最急剧持续转弯

最急剧持续转弯是指飞机在水平面内等速最小半径的盘旋($R=R_{\min}$)。保持常值高度的最急剧持续转弯的条件可由盘旋半径公式对 u 求导得出。式(3.38)对 u 求导,并令其为零,得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}u}=\left(\frac{V_{\text{opt}}^2}{g}\right)\left(\frac{2u\sqrt{u^2(2K_T-u^2)-1}-u^2(4K_Tu-4u^3)/2\sqrt{u^2(2K_T-u^2)-1}}{u^2(2K_T-u^2)-1}\right)=0$$

从上式可解得

$$u=\frac{1}{\sqrt{K_T}} \tag{3.47}$$

即 $V=\frac{1}{\sqrt{K_T}}V_{\text{opt}}$。在该条件下飞机最急剧持续转弯的盘旋性能可表示为

$$n_{\text{n}}=\frac{\sqrt{2K_T^2-1}}{K_T} \tag{3.48}$$

$$V=\frac{1}{\sqrt{K_T}}V_{\text{opt}}=\sqrt{\frac{2W}{\rho SK_T}}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}} \tag{3.49}$$

$$C_L=\sqrt{\frac{(2K_T^2-1)C_{D0}}{A}}=\sqrt{2K_T^2-1}C_{L.\text{opt}} \tag{3.50}$$

$$\omega = \frac{g}{V_{\text{opt}}}\sqrt{\frac{K_T^2 - 1}{K_T}} \tag{3.51}$$

$$R_{\min} = \frac{V_{\text{opt}}^2}{g\sqrt{K_T^2 - 1}} \tag{3.52}$$

同样，此时应满足 $n_n \leqslant n_{n.1}$ 和 $C_L \leqslant C_{L\max}$ 的要求，否则由式(3.52)得出的 $R_{\min}$ 不能实现，上述的分析也是无效的。

3. 最大可能过载转弯

在水平面内以最大过载转弯的条件，可由过载式(3.37)对 u 求导，并令其等于零得

$$2n_n \frac{dn_n}{du} = 4u(K_T - u^2) = 0$$

很明显 $u \neq 0$，故可得

$$u = \sqrt{K_T}$$

即 $V = \sqrt{K_T}V_{\text{opt}}$。在该条件下，飞机以最大可能过载转弯的盘旋性能可表示为

$$n_{n.\max} = K_T \tag{3.53}$$

考虑到实际飞行过程中法向过载应 $n_{n.\max} \leqslant n_{n.1}$，上式可表示为

$$T \leqslant \frac{n_{n.1} \cdot W}{K_{\max}} \tag{3.54}$$

换句话说，发动机的可用推力必须满足上述条件，否则过载会超过极限过载，转弯时造成结构损坏。

其他的性能指标为

$$V = \sqrt{K_T}V_{\text{opt}} = \sqrt{\left(\frac{TK_{\max}}{W}\right)\left(\frac{2W}{\rho S}\right)}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}} = \sqrt{\frac{T}{\rho S C_{D0}}} \tag{3.55}$$

$$C_L = \frac{2n_{n.\max}W}{\rho S V^2} = \sqrt{\frac{C_{D0}}{A}} = C_{L.\text{opt}} \tag{3.56}$$

$$\omega = \frac{g}{V_{\text{opt}}}\sqrt{\frac{K_T^2 - 1}{K_T}} \tag{3.57}$$

$$R = \frac{K_T V_{\text{opt}}^2}{g\sqrt{K_T^2 - 1}} \tag{3.58}$$

可见，水平面内最大过载进行协调盘旋，飞机是处在最有利飞行状态($C_L = C_{L.\text{opt}}$，$D = D_{\min}$，$K = K_{\max}$)下飞行。

上述的飞机在水面内最优盘旋性能，是在给定发动机推力的条件下得出的。随着无因次推力 K_T 的变化，其盘旋性能如图 3.10 所示。通过对 R，ω，n_n 公式的分析表明，增加推重比 T/W，升阻比 $K_{\max}$ 和减小翼载 W/S，能改善上述的优化盘旋性能。

4. 最大瞬态转弯速率

如果允许飞机在转弯时高度损失，那么利用高度(位能)改变可产生更大的转弯速率，超过



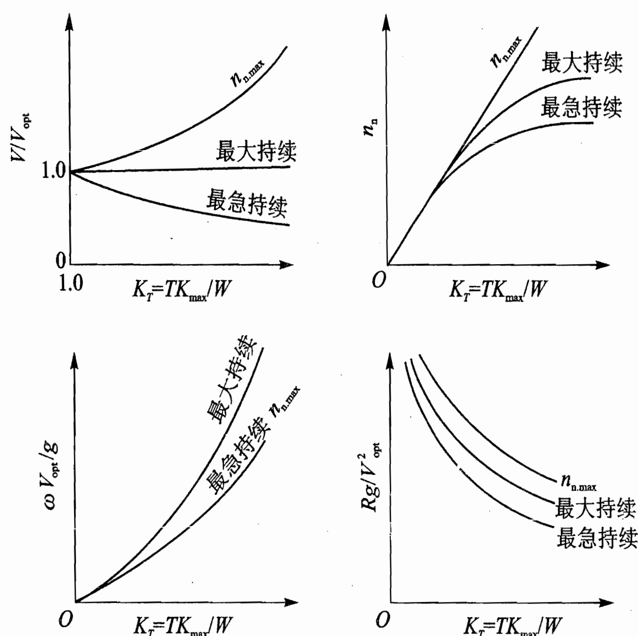


图 3.10 各类盘旋性能参数随无因次推力的变化

最大的持续转弯速率，谓之最大瞬态转弯速率或最大可达转弯速率。最大瞬态转弯速率是衡量战斗机空战优势的一个最好指标，它反映了在近距空战中驾驶员获得首次指向目标的能力，以取得胜利。但由于机动时高度急剧损失，则要求驾驶员在开始机动时有足够的高度储备。下面仍以侧滑角为零，飞行速度近似为常值的情况来讨论最大瞬态转弯时的性能。

此时飞机运动方程由式(1.36)改换成

$$\left.\begin{aligned} T &= D + W\sin\gamma \\ L\cos\mu &= W\cos\gamma \\ \frac{WV^2\cos^2\gamma}{gR} &= L\sin\mu \end{aligned}\right\} \tag{3.59}$$

式中

$$D = \frac{W}{2K_{max}}\left(u^2 + \frac{n_n^2}{u^2}\right)$$

由方程式(3.59)可得出相应的性能

$$n_n = \frac{\cos\gamma}{\cos\mu} \tag{3.60}$$

$$V = \sqrt{\frac{2n_nW}{\rho SC_L}} = \sqrt{\frac{2W\cos\gamma}{\rho SC_L\cos\mu}} \tag{3.61}$$

$$\tan\mu = \frac{V^2\cos\gamma}{Rg} = \frac{\sqrt{n_n^2 - \cos^2\gamma}}{\cos\gamma} \tag{3.62}$$



$$\omega = \frac{V\cos\gamma}{R} = \frac{g\sqrt{n_n^2 - \cos^2\gamma}}{V\cos\gamma} \tag{3.63}$$

$$R = \frac{WV^2\cos^2\gamma}{gL\sin\mu} = \frac{V^2\cos^2\gamma}{g\sqrt{n_n^2 - \cos^2\gamma}} \tag{3.64}$$

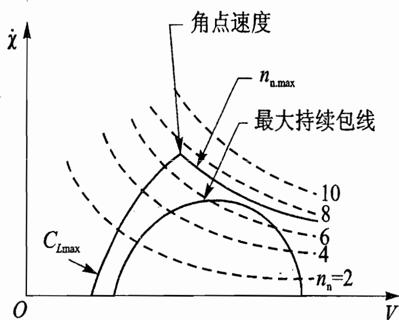


图 3.11　角点速度转变的确定

从上述公式可见，在给定推力 T 和升阻比 $K_{\max}$ 的条件下，增加过载 n_n和升力系数 C_L可以改善飞机的转弯性能，但 n_n和 C_L同样会受到限制。

假设飞行轨迹角 γ 较小，转弯速率随 V 变化的曲线如图 3.11 所示。图中同时画出 $n_n = n_{n.\max}$和 $C_L = C_{L\max}$的转弯速率边界线。显然这两条边界线交点对应的应是最大瞬态转弯速率。其相应的飞行速度称角点速度。典型战斗机角点速度为 530～650 km/h。

因此以角点速度转弯的性能，只要将 $n_n = n_{n.\max}$和 $C_L = C_{L\max}$同时代入上述有关公式，即得

$$C_D = C_{D0} + AC_{L\max}^2 \tag{3.65}$$

$$V = \sqrt{\frac{2n_{n.\max}W}{\rho SC_{L\max}}} \tag{3.66}$$

$$\omega = \frac{g\sqrt{n_{n.\max}^2 - \cos^2\gamma}}{V\cos\gamma} \tag{3.67}$$

$$R = \frac{V^2\cos^2\gamma}{g\sqrt{n_{n.\max}^2 - \cos^2\gamma}} \tag{3.68}$$

盘旋一周所需时间

$$t_{2\pi} = \frac{2\pi R}{V\cos\gamma} = \frac{2\pi V\cos\gamma}{g\sqrt{n_{n.\max}^2 - \cos^2\gamma}} \tag{3.69}$$

每周高度损失

$$\Delta h = (V\sin\gamma)\cdot t_{2\pi} \tag{3.70}$$

例：某喷气式飞机重量 W=78 480 N，机翼面积 S =30 m²，$C_{L\max}$=1.2，海平面推力 T=39 240 N，飞机极曲线 C_D= 0.012+0.12C_L^2，极限过载 $n_{n.1}$=8。试按上述介绍的四种转弯方式，确定相应的转弯速率、转弯半径、过载、升力系数和升阻比。

情况 1：最大持续速率转弯。相应地得

$$K_{\max} = \frac{1}{2\sqrt{AC_{D0}}} = \frac{1}{2\sqrt{0.012\times 0.12}} = 13.18$$

$$V = V_{\mathrm{opt}} = \sqrt{\frac{2W}{\rho S}}\sqrt[4]{\frac{A}{C_{D0}}} = \left(\sqrt{\frac{2\times 78\,480}{1.225\times 30}}\sqrt[4]{\frac{0.12}{0.012}}\right)\ \mathrm{m/s} = 116.2\ \mathrm{m/s}$$



$$K_T = \frac{TK_{\max}}{W} = \frac{39\ 240 \times 13.18}{78\ 480} = 6.59$$

$$n_n = \sqrt{2K_T - 1} = \sqrt{2 \times 6.59 - 1} = 3.49$$

$$\mu = \arccos\left(\frac{1}{n_n}\right) = \arccos\left(\frac{1}{3.49}\right)\ \text{rad} = 73.3°$$

$$C_L = n_n\sqrt{\frac{C_{D0}}{A}} = 3.49\sqrt{\frac{0.012}{0.12}} = 1.103$$

$$\omega = \omega_{\max} = \frac{g\sqrt{2K_T - 2}}{V_R} = \frac{9.81\sqrt{2 \times 6.59 - 2}}{116.2}\ \text{rad/s} = 0.282\ \text{rad/s} = 16.17\ (°)/\text{s}$$

$$t_{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.141\ 6}{0.282}\ \text{s} = 22.27\ \text{s}$$

$$R = \frac{V}{\omega} = \frac{116.2}{0.282}\ \text{m} = 411.8\ \text{m}$$

由式(3.36)可导出该情况下的升阻比 K，即

$$K = \frac{2n_n K_{\max}}{1 + n_n^2} = \frac{n_n}{1 + n_n^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{AC_{D0}}} = \frac{3.49}{1 + 3.49^2}\ \frac{1}{\sqrt{0.012 \times 0.12}} = 6.98$$

情况 2:最急剧持续转弯。相应地得

$$n_n = \frac{\sqrt{2K_T^2 - 1}}{K_T} = \frac{\sqrt{2 \times 6.59^2 - 1}}{6.59} = 1.406$$

$$\mu = \arccos\left(\frac{1}{n_n}\right) = \arccos\left(\frac{1}{1.406}\right)\ \text{rad} = 44.7°$$

$$V = \frac{V_{\text{opt}}}{\sqrt{K_T}} = \frac{116.2}{\sqrt{6.59}}\ \text{m/s} = 45.3\ \text{m/s}$$

$$C_L = \frac{2n_n W}{\rho S V^2} = \frac{2 \times 1.406 \times 78\ 480}{1.225 \times 30 \times 45.3^2} = 2.93$$

$$R = R_{\min} = \frac{V_{\text{opt}}^2}{g\sqrt{K_T^2 - 1}} = \frac{(116.2\ \text{m/s})^2}{9.81\ \text{m/s}^2\sqrt{6.59^2 - 1}} = 211.4\ \text{m}$$

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{45.2}{211.4}\ \text{rad/s} = 0.214\ \text{rad/s} = 12.27\ (°)/\text{s}$$

$$t_{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.141\ 6}{0.214}\ \text{s} = 29.3\ \text{s}$$

此时的升阻比 K，同样可由式(3.36)导出

$$K = \frac{2K_T n_n K_{\max}}{1 + K_T^2 n_n^2} = \frac{2 \times 6.59 \times 1.406 \times 13.18}{1 + 6.59^2 \times 1.406^2} = 2.81$$

上述计算结果表明，该情况下由于 $C_L > C_{L\max}$，飞机不可能完成在等高度的定常急剧持续盘旋。



情况 3：最大可能过载转弯。相应地得

$$K = K_{\max} = 13.18$$

$$n_n = n_{n.\max} = K_T = 6.59$$

$$\mu = \arccos \frac{1}{n_n} = \arccos \frac{1}{6.59} \text{ rad} = 81.3^\circ$$

$$V = \sqrt{K_T} V_{\text{opt}} = \sqrt{6.59} \times 116.2 \text{ m/s} = 298.3 \text{ m/s}$$

$$C_L = \sqrt{\frac{C_{D0}}{A}} = \sqrt{\frac{0.012}{0.12}} = 0.316$$

$$\omega = \frac{g\sqrt{K_T^2 - 1}}{V} = \frac{9.81 \times \sqrt{6.59^2 - 1}}{298.3} \text{ s}^{-1} = 0.214 \text{ s}^{-1} = 12.27 \ (^\circ)/\text{s}$$

$$R = \frac{V}{\omega} = \frac{298.3}{0.214} \text{ m} = 1\ 392.6 \text{ m}$$

$$t_{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.141\ 6}{0.214} \text{ s} = 29.3 \text{ s}$$

情况 4：角点速度转弯。此时

$$C_L = C_{L\max} = 1.2$$

$$C_D = C_{D0} + AC_{L\max}^2 = 0.012 + 0.12 \times 1.2 = 0.185$$

$$n_n = n_{n.1} = 8$$

$$\mu = \arccos (1/n_n) = \arccos (1/8) \text{ rad} = 82.2^\circ$$

$$V = \sqrt{\frac{2n_{n.1}W}{\rho S C_{L\max}}} = \sqrt{\frac{2 \times 8 \times 78\ 480}{1.225 \times 30 \times 1.2}} \text{ m/s} = 168.7 \text{ m/s}$$

$$D = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_D = \left(\frac{1}{2} \times 1.225 \times 168.7^2 \times 30 \times 0.185\right) \text{N} = 96\ 687.3 \text{ N}$$

$$\gamma = \arcsin \left(\frac{T - D}{W}\right) = \arcsin\left(\frac{39\ 240 - 96\ 687.3}{78\ 480}\right) \text{rad} = -0.732 \text{ rad} = -47.1^\circ$$

$$\cos \gamma = \cos (-47.1^\circ) = 0.681$$

$$R = \frac{V^2 \cos \gamma}{g \tan \mu} = \left(\frac{168.7^2 \times 0.681}{9.81 \times 7.94}\right) \text{m} = 249.1 \text{ m}$$

$$\omega = \frac{V \cos \gamma}{R} = \frac{168.7 \times 0.681}{249.1} = 0.461 \text{ rad/s} = 26.4 \ (^\circ)/\text{s}$$

$$t_{2\pi} = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2 \times 3.141\ 6}{0.461} \text{ s} = 13.62 \text{ s}$$

每周高度损失为

$$\Delta h = (V \sin \gamma) t_{2\pi} = (168.7 \text{ m/s} \times \sin 67.1^\circ) \times 13.62 \text{ s} = 1\ 682.6 \text{ m}$$

上述所有计算结果列于表 3.4 中。从表中可知，该机在海平面内可以按最大持续速率方案进行盘旋。但按最急剧持续盘旋的方案是不能实现的，因为升力系数超过极限 $C_{L\max} = 1.2$。



按角点速度转弯可以实现，但每周高度损失太大，达 1 682 m。

表 3.4 各种优化转弯结果

转弯(盘旋)方案	最大持续	最急持续	最大过载	角点速度
$\mu/(^\circ)$	73.3	44.7	81.3	82.2
R/m	411.8	211.4	1 392.6	249.1
$\omega/((^\circ)\cdot s^{-1})$	16.17	12.27	12.27	26.44
n_n	3.49	1.406	6.59	8.0
$t_{2\pi}$/s	22.26	29.33	29.33	13.62
C_L	1.103	2.93	0.316	1.2
K	6.98	—	13.18	6.49
$V/(m\cdot s^{-1})$	116.2	45.28	298.3	168.4
ΔH/m	—	—	—	1 682.6

3.3.3 非定常盘旋

上面所求的最优盘旋性能，均是在定常盘旋条件下得到的。对每个状态，三个限制条件并没有同时达到，因此提高飞机的方向机动性还有潜力可挖。

在实际飞行中，有时为了获得有利战机，驾驶员必须在最短时间内完成转弯，此时如果飞机处于大速度飞行，则驾驶员是以大速度作正常盘旋，还是减速到最小盘旋时间所对应的速度作正常盘旋为好呢？实践表明，采用上述两种方法，转弯的时间均较长。合理的方法是：以大速度进入盘旋，而以小速度结束盘旋。盘旋中，在驾驶员生理条件允许和保证飞行安全的条件下，尽可能保持较大的法向过载。这样，盘旋时间就可大大减小。这种飞行速度 V、速度滚转角 μ 和盘旋半径 R 等参数发生变化的盘旋称为非定常盘旋。

在确定非定常盘旋性能时，可直接采用飞机在水平面内的运动方程式(1.56)。对于无侧滑非定常盘旋，且假设推力沿飞行速度方向，运动方程可简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dV}{dt}&=\frac{g}{W}(T-D)\\L\cos\mu&=W\\\frac{d\chi}{dt}&=\frac{g}{V}\frac{L}{W}\sin\mu\end{aligned}\right\}\tag{3.71}$$

由方程式(3.71)的第一式可得

$$dt=\frac{W}{g}\frac{dV}{(T-D)}$$

从速度 V_0 改变至 V 的盘旋时间经积分，为

$$t=\int_{V_0}^{V}\frac{W}{g}\frac{\mathrm{d}V}{(T-D)} \tag{3.72}$$

考虑到盘旋时法向过载 n_n 与速度滚转角 μ 的关系，即

$$\cos\mu=\frac{W}{L}=\frac{1}{n_n},\qquad \sin\mu=\frac{\sqrt{n_n^2-1}}{n_n}$$

于是方程式(3.71)中第三式可表示为

$$\mathrm{d}\chi=\frac{g\sqrt{n_n^2-1}}{V}\mathrm{d}t=\frac{W}{V}\frac{\sqrt{n_n^2-1}}{(T-D)}\mathrm{d}V$$

从速度 V_0 改变至 V 经积分得航迹偏角为

$$\chi=\int_{V_0}^{V}\frac{W}{V}\frac{\sqrt{n_n^2-1}}{(T-D)}\mathrm{d}V \tag{3.73}$$

式(3.72)和式(3.71)中被积函数均与速度 V 有关，故只能用图解积分法求出飞机在给定高度的水平平面内作非定常无侧滑盘旋的时间和航迹偏角。

图 3.12 为某机的非定常盘旋时间和航迹偏角随速度变化的计算结果。从图上可见，飞机是以 $V_{max}=272$ m/s 开始进入盘旋，转过 180°所需的时间为 22 s，转弯终了的速度为 259.2 m/s。该机如以与正常盘旋最短时间对应的速度 $V_{T.min}=164$ m/s 盘旋时，转过 180°需时 15.2 s，但未计入盘旋前飞机减速至 $V_{T.min}$ 的时间，也未计入转弯后由 $V_{T.min}$ 加速至 $V=259.2$ m/s 的时间；如果加上这些时间，势必超过 22 s。由此可说，采用非定常盘旋是有利的。

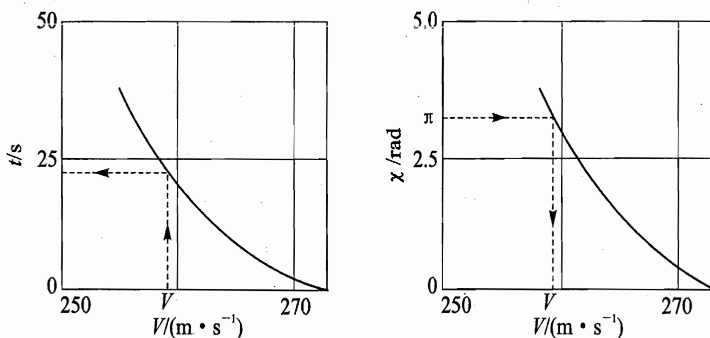


图 3.12 某机非定常盘旋时间和航迹偏角随 V 变化曲线

3.4 飞机的空间机动飞行

空间机动飞行是同时改变飞行速度、高度和方向的空间特技飞行。这种飞行与飞机在水平平面和在铅垂平面内的机动飞行的不同之处在于：飞行轨迹不仅在水平面内的投影是弯曲的，且还有高度的变化。这种运动是以一定的法向过载和滚转角配合变化来实现的。空间机



动飞行种类很多，下面先将常见的几种空间机动动作作简要介绍，然后扼要介绍飞机空间机动轨迹的计算方法。

3.4.1　常见的空间机动飞行

1. 斜筋斗

斜筋斗的轨迹位于与水平面成一ψ角的空间平面内(见图3.13(a))。其飞行动作实际上是斛斗和盘旋结合起来的一种特技动作，如果ψ角不大，它接近于非定常盘旋。

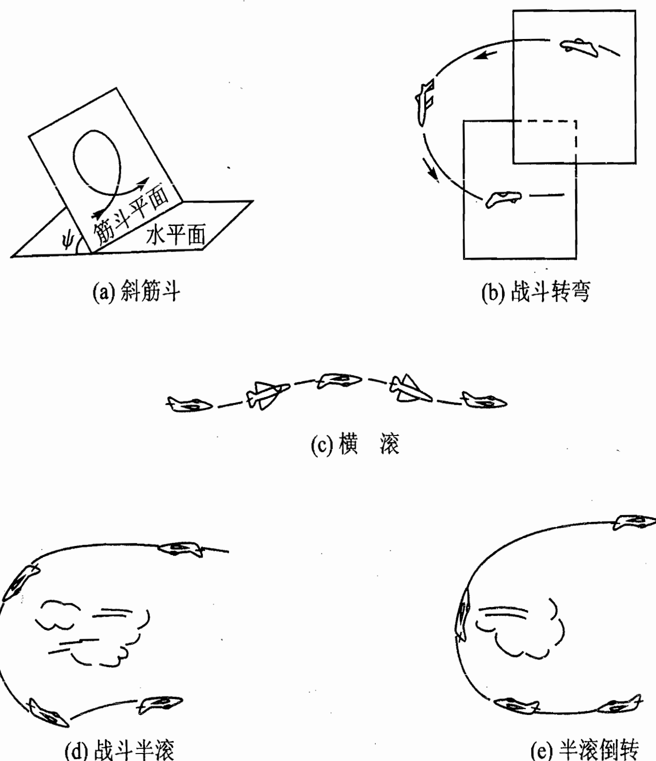
2. 战斗转弯

迅速上升，在增加高度的同时改变飞行方向180°的机动飞行，称为战斗转弯，又称上升转弯，如图3.13(b)所示。在操纵上，转弯前半段主要是增加高度，后半段在增加高度的同时增大滚转角和偏航角，使飞行方向改变180°。

3. 横　滚

飞机基本保持原运动方向，高度改变小，且绕纵轴滚转的飞行动作称为横滚。按滚转角的大小，横滚可分为半滚(滚转180°)、全滚(滚转360°)和连续横滚。全滚飞行动作如图3.13(c)所示。

全滚时，由于升力方向不断改变，重力得不到升力的平衡，飞机会自动掉高度。为了使全



(a) 斜筋斗　　(b) 战斗转弯

(c) 横　滚

(d) 战斗半滚　　(e) 半滚倒转

图3.13　常见的空间机动动作

滚改出不掉高度，应使飞机处于上升状态，使全滚前半段增加一定高度，以弥补后半段所掉高度。

4. 战斗半滚(又称半筋斗翻转)

战斗半滚是在铅垂平面内迅速增加高度的同时改变飞行方向180°的机动飞行，如图3.13(d)所示。其前段的轨迹与筋斗相同，当飞机快到达筋斗的顶点机轮朝上时，应向预定方向柔和压杆和蹬舵，使飞机沿纵轴滚转180°，然后平飞，所以后半段动作与半滚相似。

5. 半滚倒转

半滚倒转是在铅垂平面内迅速降低高度的同时改变飞行方向180°的机动动作，如图3.13(e)所示。该特技动作首先是使飞机绕纵轴滚转180°(半滚)，然后完成筋斗的后一半动作。

3.4.2 空间机动轨迹的一般计算方法

在计算飞机空间机动轨迹时，为讨论简单起见，仍假设飞行中无侧滑，发动机推力沿着飞行速度方向，于是飞机的运动可直接采用过载表示的质心动力学方程式(3.4)和质心运动学方程式(1.37)来描述，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}&=g(n_x-\sin\gamma)\\V\cos\gamma\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}&=gn_y\\V\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}&=g(n_z-\cos\gamma)\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma\cos\chi\\\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma\sin\chi\\\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t}&=-\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=-V\sin\gamma\end{aligned}\right\}$$

式中的过载(n_x,n_y,n_z)可按式(3.3)确定。

一般情况下常以过载作为控制变量，根据空间机动特点，给出相应的随时间变化的规律；然后在确定初始条件下，通过上述方程组的数值积分，得出空间机动速度(V,χ,γ)的变化规律和轨迹(x_g,y_g,z_g)的变化规律。从这些变化规律可以了解或评价飞机空间机动飞行的性能。

3.5 机动性能的综合分析

现代歼击机在空战过程中，并非只作单项机动动作，而往往是进行综合的、复杂的机动飞行，例如转弯并水平增速或同时上升等。因此飞机机动性能的好坏不能只用单项指标来衡量，



必须综合分析。

3.5.1 能量机动性

能量机动性是指飞机在飞行中改变飞机动能、位能的能力，是应用能量概念来表达飞机空战机动的能力，也是当前综合评定歼击机空战机动性能好坏的常用方法。

能量机动性用单位飞机重量所具有的能量随时间的变化率来表示。当飞机在某飞行高度 H，以飞行速度 V 飞行时，飞机单位重量所具有的能量表示为

$$E_s = \frac{1}{2g}V^2 + H$$

该式即形如第 2 章中的能量高度 H_e 的表示式(2.26)。对上式求导得

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{V}{g}\frac{dV}{dt} + \frac{dH}{dt}$$

考虑到飞机质心运动方程 $\frac{W}{g}\frac{dV}{dt}=T-D-W\sin\gamma$ 和 $\frac{dH}{dt}=V\sin\gamma$，代入上式后得

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{(T-D)}{W}V_v = V_v^* = \text{SEP} \tag{3.74}$$

可见，单位飞机能量变化率 V_v^*，即是单位重量剩余功率 SEP。由第 2 章可知，飞机的爬升率 V_v 与 V_v^* 有如下关系：

$$V_v = V_v^* \bigg/ \left(1 + \frac{V}{g}\frac{dV}{dH}\right)$$

下面讨论两种特殊情况。

(1) $n_x = \sin\gamma \leqslant 1$ 的情况

由上式可知，此时 V =常数，则 $V_v = V_v^*$。于是

$$\frac{dE_s}{dt} = \frac{dH}{dt} = V_v$$

能量机动性仅反映了飞机飞行高度的变化，即飞机位能的变化能力。图 3.14 为在 $n_n=1$ 条件下，飞机单位剩余功率能量图，表明不同高度、速度下飞机所具有的上升能力。

(2) H =常值的情况

能量机动能力也可用单位飞机重量所具有的能量对轨迹 s 的变化率表示，即

$$\frac{dE_s}{ds} = \frac{dE_s}{dt}\bigg/\frac{ds}{dt} = \frac{T-D}{W}$$

利用过载与运动的关系方程式(3.4)，上式又可表示为

$$\frac{dE_s}{ds} = n_x = \dot{V}/g$$

显然，此时的能量机动性反映为飞机轴向过载 n_x 的大小，表示为飞行速度的变化，即飞机

动能的变化能力。图3.15为在$n_n=1$条件下，飞机轴向过载n_x能量机动图，表明不同高度、速度下飞机所具有的加速能力。

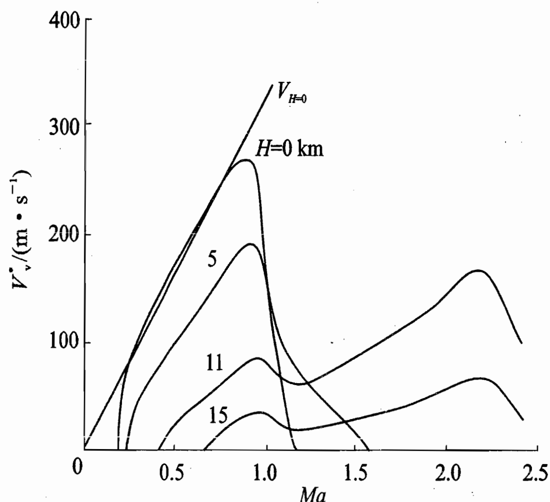


图3.14　$n_n=1$条件下飞机单位剩余功率能量图

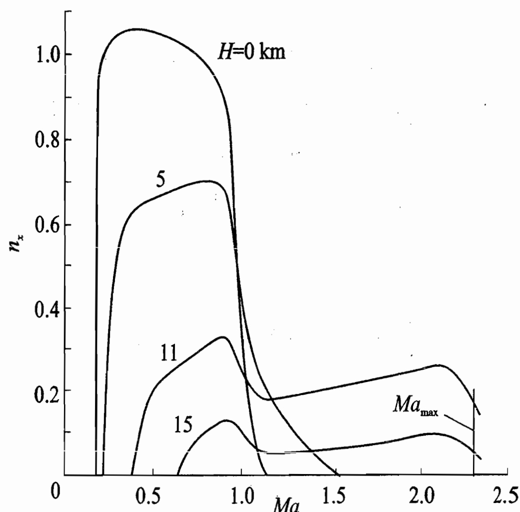


图3.15　$n_n=1$条件下飞机轴向过载n_x能量机动图

3.5.2　定常或极限角速度

定常或极限角速度是反映飞机改变方向的能力。其在垂直面和水平面内的转弯角速度已由式(3.5)、式(3.7)导出，分别为

$$\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{V}(n_n-\cos\gamma)\qquad(\text{铅垂面})$$

$$\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{V}\sqrt{n_n^2-1}\qquad(\text{水平面})$$

两式相除，得到垂直面和水平面内机动转弯角速度的比。

当$\gamma=0°$，$n_n>1$时，有

$$\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\chi}}=\sqrt{\frac{n_n-1}{n_n+1}}<1$$

当$\gamma=180°$，$n_n>1$时，有

$$\frac{\dot{\gamma}}{\dot{\chi}}=\sqrt{\frac{n_n+1}{n_n-1}}>1$$

式中法向过载n_n取极限可用过载$n_{n.l}$，则得到极限转弯速度；如取定常盘旋(等速)法向过载$n_{n.s}$，则得定常转弯角速度。其中等速法向过载$n_{n.s}$可由下式确定，即

$$n_{n.s}=\frac{KT_a}{W}\tag{3.75}$$



图 3.16 为 $n_x=0$ 条件下，飞机的定常盘旋法向过载曲线，表明不同飞行高度、速度下，飞机改变方向的能力。图 3.17 则表示飞机在水平面内相应的定常盘旋角速度。

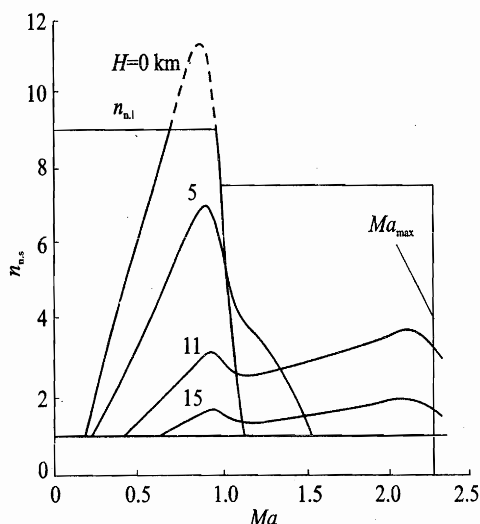


图 3.16 $n_x=0$ 条件下飞机作定常盘旋时法向过载曲线

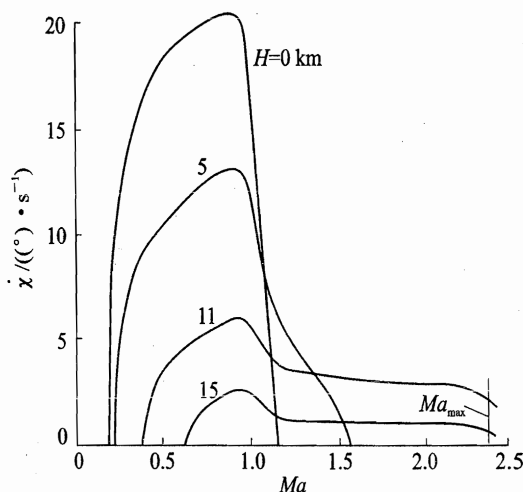


图 3.17 水平面内的定常盘旋角速度

3.5.3 定常或瞬态转弯半径

定常或瞬态转弯半径是反映飞机改变飞行方向所需的空间大小。其在垂直面和水平面内的转弯半径已由式(3.6)、式(3.8)导出，分别为

$$R_v=\frac{V}{\dot{\gamma}}=\frac{V^2}{g(n_n-\cos\gamma)}\qquad(\text{铅垂面})$$

$$R_h=\frac{V}{\dot{\chi}}=\frac{V^2}{g\sqrt{n_n^2-1}}\qquad(\text{水平面})$$

垂直面和水平面内转弯半径之比可由上述两式相除而得。

当 $\gamma=0°$，$n_n>1$ 时，有

$$\frac{R_v}{R_h}=\sqrt{\frac{n_n+1}{n_n-1}}>1$$

当 $\gamma=180°$，$n_n>1$ 时，有

$$\frac{R_v}{R_h}=\sqrt{\frac{n_n-1}{n_n+1}}<1$$

式中法向过载 n_n 取极限可用过载 $n_{n.l}$，对应的为瞬态转弯半径；n_n 取定常盘旋(等速)法向过载 $n_{n.s}$，对应的为定常转弯半径。



很明显，在同样法向过载和 $\gamma=0°$ 条件下，在垂直面内转弯半径(轨迹曲率半径)总是比水平面内的大一些；但在 $\gamma=180°$ 条件下，结果则相反，如图 3.18 所示。图 3.19 为水平面内盘旋半径随飞行高度和速度的变化曲线。

从图 3.14～图 3.19 可以看到，现代飞机的机动性，无论是能量机动性(包含速度和高度的变化能力)，还是方向机动性，在超声速区明显地变差。其主要原因是由于飞机推力曲线特性变化造成的。

飞机的能量机动性主要决定于剩余推力的大小。从图 2.5 某超声速飞机推力曲线图可见，同一个 Ma 剩余推力随着高度增加而减少，且在低空时，每个高度只有一个最大剩余推力，对应着最大上升率，位于亚声速区；随高度增加，在某个高度后会出现两个剩余推力峰值，第二个峰值在超声速区；高度继续增加，两个剩余峰值均减少，亚声速区的峰值甚至消失。正是这个原因，飞机的能量机动性在高空高速时恶化，如图 3.14 所示。

方向机动性好坏的一个重要因素是等速法向过载。由式(3.75)可知，随着飞行高度、速度的增加，飞机可用推力减少，升阻比随 Ma 增加而减少，故等速法向过载在飞机高空高速飞行时值较小(见图 3.16)。加上现代飞机飞行速度较大，飞机盘旋速度会很小，盘旋半径会很大(见图 3.19)。这就是说，飞机在高空高速飞行时，方向机动性亦趋恶化。

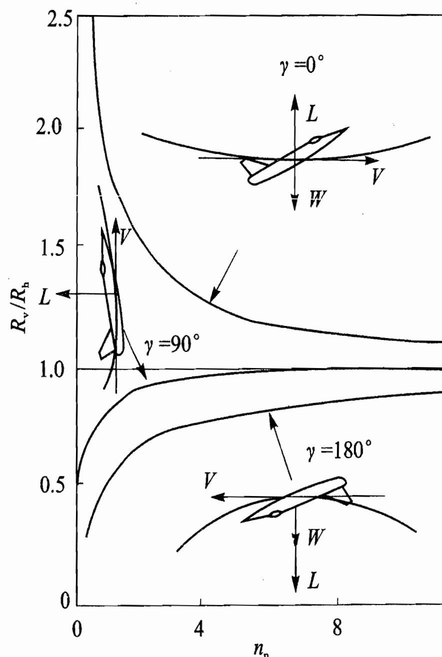


图 3.18　垂直平面和水平面转弯半径比随 n_n 变化

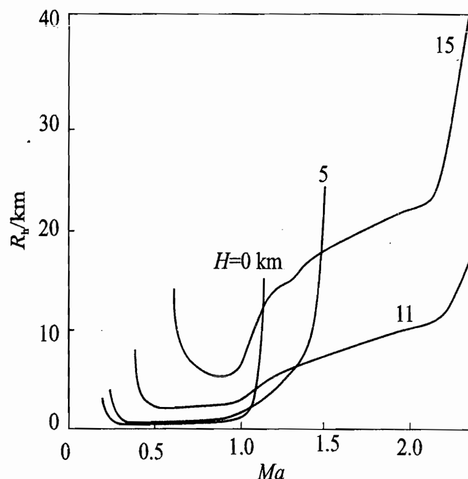


图 3.19　水平面内定常盘旋半径随 H,V 变化曲线

鉴于上述原因，飞机在近距空战时，一般在中空中低速下进行。



3.5.4　综合机动性指标

1. 过载极曲线

飞行实践和理论分析表明，无论是飞机能量变化率还是飞行方向及空间位置的变化能力，均是由飞机所处飞行状态的切向过载 n_x 和法向过载 n_n 决定的。因此对于不同飞行高度和飞行速度下，飞机空战过程中的机动能力，可用一组 $n_x=f(n_n)$ 关系曲线综合表征。该曲线称为过载极曲线。

每条极曲线由三个点来确定：

n_{x1} 为在水平飞行时的 n_x 值，即 $n_n=1$ 时的 n_x；

$n_{n.s}$ 为定常盘旋(等速)法向过载值，即 $n_x=0$ 时的 n_n；

n_n^* 为对应 n_x 最大值的 n_n，即在水平飞行中飞机达到极限加速度 $\dot{V}_{max}=gn_{x.max}$ 时的 n_n。

显然，第一项反映了改变飞机的能量机动能力，后二项则反映了改变飞机的方向机动能力。在气动力线性变化范围内，过载极曲线可用下式表示，即

$$n_x = a[(n_{n.s}-n_n^*)^2-(n_n-n_n^*)^2] \tag{3.76}$$

式中

$$a=\frac{n_{x1}}{(n_{n.s}-1)(n_{n.s}+1-2n_n^*)}$$

其中

$$n_{x1}=\frac{(T-C_{D0}Sq)}{W}-\frac{AW}{Sq} \tag{3.77}$$

$$n_{n.s}=\left[\frac{(T-C_{D0}Sq)q}{W}\bigg/\frac{AW}{S}\right]^{\frac{1}{2}} \tag{3.78}$$

$$n_n^*=\frac{C_L^*Sq}{W} \tag{3.79}$$

过载极曲线形状如图 3.20 所示。图上还标出了极限法向过载值 $n_{n.l}$，以表示飞机飞行过程中不应超过 $n_{n.l}$。从图上可以看出，过载极曲线可以分成两部分。在 1 区中有 $E_s<0$，而 2 区中有 $\frac{dE_s}{dt}>0$。由可用法向过载 $n_{n.a}<n_{n.l}$ 确定的 n_x 和最大切向过载之间就是飞机在该状态下可用的切向过载范围。

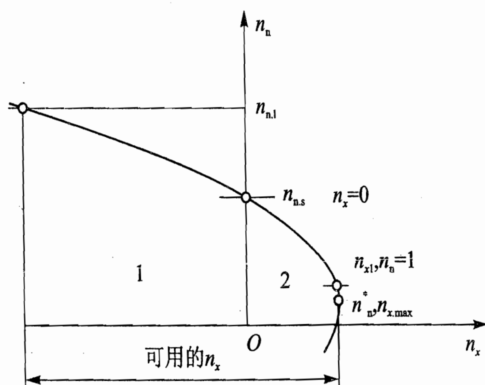


图 3.20　过载极曲线

在飞机初始设计阶段，根据初步掌握的气动、重量和发动机资料数据，按所定的设计



状态作出多个布局方案下的过载极曲线，进行对照比较，可以从中确定满足机动性要求的方案。

图 3.21 绘出不同布局飞机在 $H=3$ km，$Ma=0.9$ 状态下的过载极曲线。通过比较反映出其不同的机动能力。对于起飞推重比 $T/W=1.1$ 的两架飞机，后掠翼布局飞机的 n_{x1} 和 $n_{n.s}$ 均超过三角翼布局飞机，显然在所给定飞行状态下，前者的机动性更好。对于起飞推重比 $T/W=0.8$ 的两架飞机，三角翼布局飞机的 n_{x1} 超过后掠翼布局飞机，而 $n_{n.s}$ 值不如它，这就意味着前者在垂直和上升机动方面性能较好，而后者水平机动方面较好。由此也可认为，前者为高速飞机，后者为机动飞机。

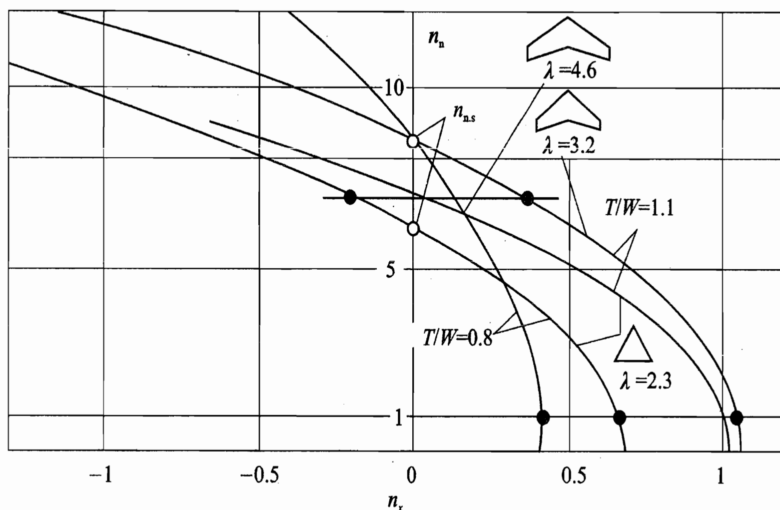


图 3.21 不同布局飞机的过载极曲线($H=3$ km, $Ma=0.9$)

2. 急剧机动区

空战中，飞机机动性的优劣更多地体现在近距格斗方面。飞行实践表明，近距空战中飞机应有一个最小法向过载，以此过载转弯机动时飞机无能量损失，且转弯半径应为能目视到另一架飞机的最短距离的一半，如 $R=4$ km。根据这一条件画出的飞行包线区，称为急剧机动区。通常该区也作为飞机初始设计阶段，是用来评价机动性能的方法之一。

图 3.22(a)为某机以不同过载下常定盘旋等过载曲线。其中 $n_n=1$ 的曲线就是该机的飞行包线，其右侧受到机体结构(q_{max})、进气道压力(Δp_a)和最大马赫数 Ma_{max} 的限制；左侧则受到 $C_{L.a}$ 的限制。图中粗线条所围的区即为急剧机动区。图 3.22(b)为不同 H，Ma 下的法向过载限制。根据急剧机动区定义，其边界由以下条件确定。

上边界，主要受允许升力系数 $C_{L.a}$ 的限制。由定常盘旋关系式(3.27)导得

$$\rho(H)=\frac{2W}{gSC_{L.a}R_{min}}\sqrt{1+\left(\frac{gR_{min}}{V^2}\right)^2} \tag{3.80}$$



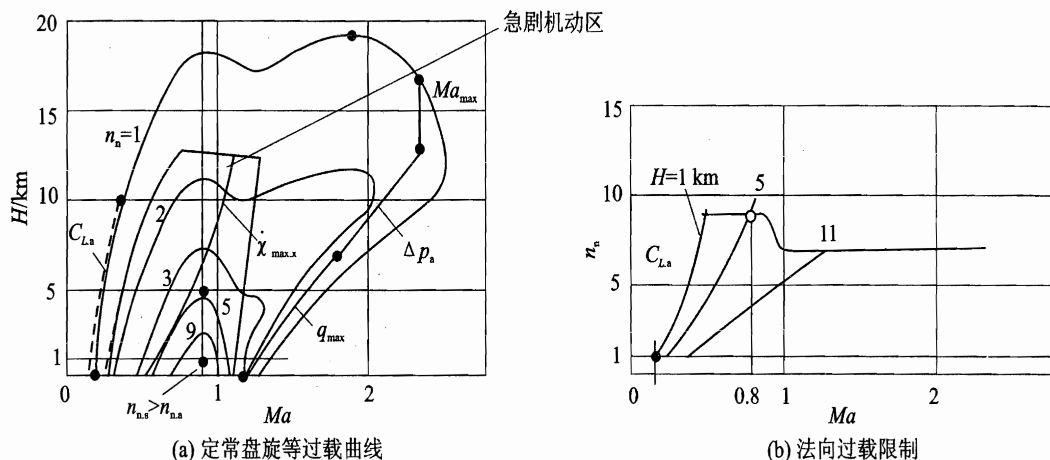


图 3.22　急剧机动区

右边界，是由图 3.22(b)上的过载限制来确定，即

$$V=\sqrt{gR_{\min}\sqrt{n_{n}^{2}-1}} \tag{3.81}$$

左边界，是由达到 $C_{L.a}$时对应速度和高度下产生的最小过载 $n_{n.\min}$来确定，即

$$\rho(H)=\frac{2n_{n.\min}W}{V^{2}SC_{L.a}} \tag{3.82}$$

在急剧机动区，利用转弯角速率公式(3.7)，还可以求得最大转弯速率 $\dot{\chi}_{\max}$与高度、速度的关系曲线。从图 3.22(a)可见，该机在中空以最大转弯速率对应的速度下进行水平转弯，其对应的过载大、Ma 小，表明其机动性好，在近距空战中占有优势。

3.6　飞机的敏捷性

3.6.1　敏捷性概念

敏捷性概念的提出，主要是由于出现了全方位离轴发射的近距格斗空空导弹，改变了传统的尾追攻击方式，空战特点将由“占位”转至取得“指向”，如图 3.23 所示。飞机抢先对准攻击敌机的重要性变得越来越重要，因此可以认为敏捷性只是航空技术发展到现阶段的必然结果，是飞机固有的一种属性。

严格讲，敏捷性不仅是飞机本体的特性，还应包括航空电子设备、武器系统和驾驶员操纵特性等因素。下面要介绍的仅是飞机的敏捷性，目前比较一致的看法，将它定义为飞机在空中迅速、精确地改变机动飞行状态的能力。

这一敏捷性定义，实际上包含两层意思。其一，飞机无论在超视距作战还是近距格斗，要

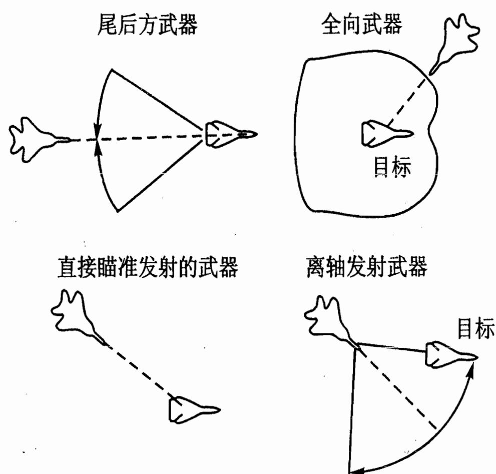


图 3.23 导弹全方位、离轴发射概念

求飞行轨迹快速变化，从一个机动动作转为另一个动作；其二，在捕获目标后，要求飞机姿态尽快变化，以形成导弹的发射条件，使飞机的机动飞行平面（即机动飞行中飞机质心运动轨迹所在平面。在无侧滑条件下，机动飞行平面就是飞机的对称平面）与瞄准平面（由飞机速度矢量和飞机质心与目标连线即瞄准线构成的平面）重合，并满足导弹引导规律要求，如图 3.24 所示。详细情况在第 5 章中介绍。故德国人 W. B. Herbst 又定义敏捷性为飞机转动机动平面和改变机动飞行状态的能力。

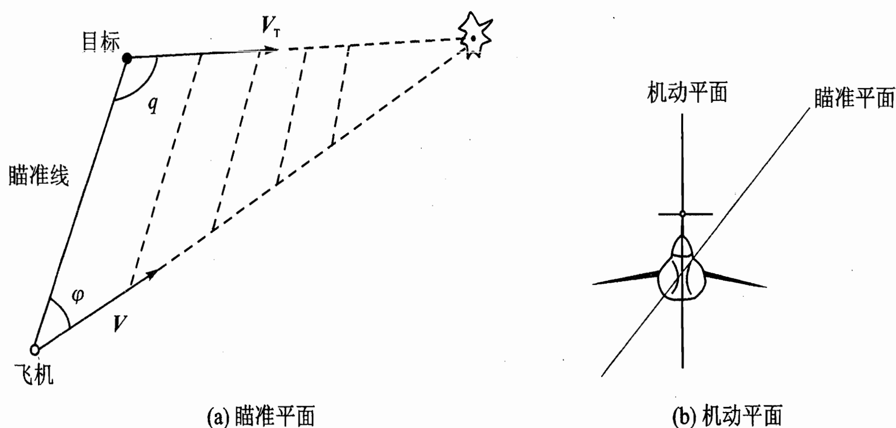


图 3.24 瞄准平面与机动飞行平面

可见，飞机的敏捷性与机动性和操纵性密切相关，但又不是机动性和操纵性所能概括的。敏捷性更重视飞机运动的瞬态性能，与空战效果联系更紧密、更加直接。



3.6.2　敏捷性分类

选取什么尺度来衡量飞机敏捷性，从其含义来看可以用两个属性来描述，即状态变化和时间。它表明为达到某预期状态所需要的时间、单位时间内状态变化的多少和机动能力改变量的大小等。因此敏捷性按时间尺度和飞机运动形式来分较为合理。

1. 按时间尺度

按时间尺度，敏捷性大致分成三类：瞬态敏捷性、功能敏捷性和敏捷性潜力。

瞬态敏捷性反映机动状态转换的快速性。它表示飞机产生可控角运动或最大、最小单位剩余功率之间快速转换的能力。其用时间量度一般为1～5 s的量级。

功能敏捷性反映飞机空战中各飞行阶段转换的快慢。它表示飞机航向或绕速度矢量快速旋转的变化能力，重点为飞机大迎角转弯中的能量损失和卸到零过载后的能量恢复能力。其用时间量度一般为大于5 s的量级。

敏捷性潜力是与时间没有关系的敏捷性，主要是用飞机的气动、构形等参数来体现飞机的敏捷性。

对于瞬态敏捷性和功能敏捷性的含义，还可以从图3.25上示意出来。图中纵轴代表飞行状态，横轴代表时间。从 t_0 开始飞机状态加速变化，到 t_1 时达到稳态的状态变化率，t_2 以后飞机状态开始减速变化，到 t_3 时飞机达到所期望的状态，状态变化率为零。瞬态敏捷性即对应状态变化加速段 $t_0 \sim t_1$ 和状态变化减速段 $t_2 \sim t_3$；而功能敏捷性则表示飞机所获得的最终状态能力，用 $t_0 \sim t_3$ 段总时间度量。

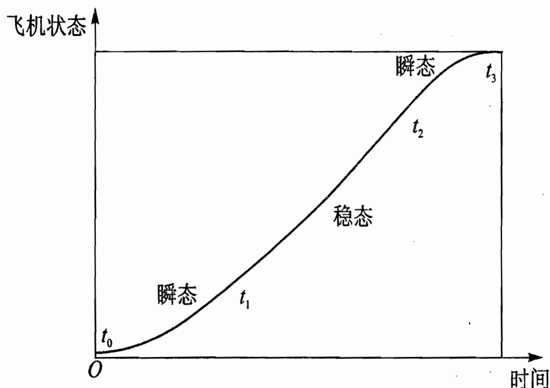


图3.25　瞬态和功能敏捷性含义

2. 按飞机运动形式

按飞机运动形式，敏捷性可以分为轴向敏捷性、纵向(俯仰)敏捷性和滚转(横向)敏捷性。根据目前建议的各类敏捷性尺度，按上述分类法可归纳在表3.5中。

表 3.5　敏捷性尺度分类

类　别	瞬时敏捷性(1～5 s)	功能敏捷性(>5 s)	敏捷性潜力
横向	$t_{RC.90}$(扭转敏捷性)	反向滚转参数	横向敏捷性准则
纵向	t_{maxg} ,t_{unload}	指向余度	俯仰敏捷性准则
轴向	功率剧增参数 功率消散参数	空战周期时间 动态速度转弯 相对能量状态	敏捷性潜力参数

3.6.3　瞬态敏捷性尺度

1. 横向敏捷性

横向敏捷性主要反映飞机转动机动平面的快慢,以达到指向射击的目标。在无侧滑条件下,飞机的机动平面与纵向对称平面相重合。下面是衡量这类敏捷性的参数。

$t_{RC.90}$：以飞机滚转且截获 90°所需时间来表示;

LA：以 $t_{RC.90}$的倒数来表示,称为横向敏捷性尺度,$LA=\dfrac{1}{t_{RC.90}}$;

TA：用飞机转弯速率除以 $t_{RC.90}$来衡量飞机带过载情况下的滚转性能,称为扭转敏捷性尺度,$TA=\dfrac{转弯速率}{t_{RC.90}}$。它反映飞机转弯能力和滚转能力的协调性。

图 3.26 为一些战斗机的横向敏捷性尺度。由图可见,随着迎角增大,$t_{RC.90}$增加,LA 值迅速减小。说明飞机在大迎角区横向敏捷性差,这表明此时飞机的滚转运动变化能力差。

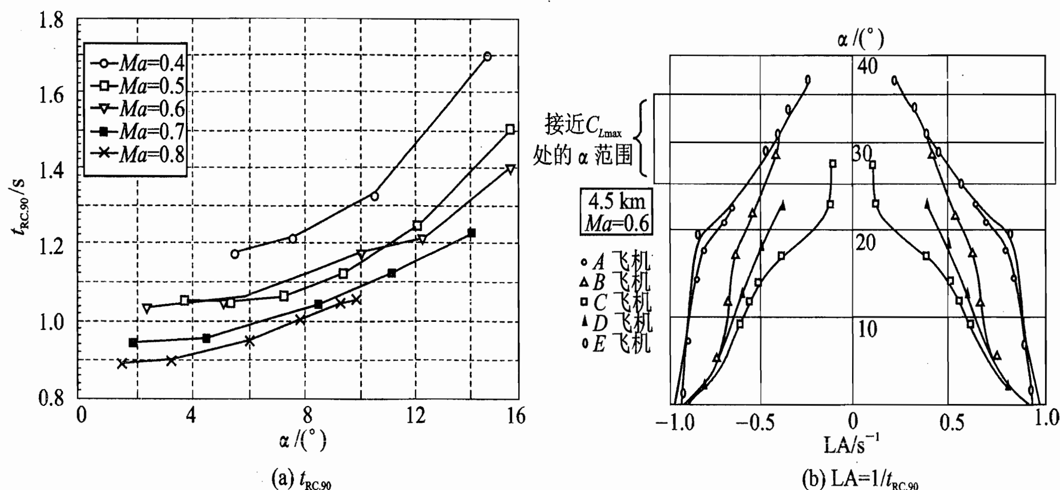


图 3.26　横向敏捷性随 H,V 和 α 变化曲线



2. 纵向(俯仰)敏捷性

纵向(俯仰)敏捷性是反映飞机迅速获得过载(迎角)和减小过载(迎角)的能力。衡量这类能力可以用下面的尺度表示。

t_{maxg} 和 t_{unload}：分别表示加载到最大过载所需时间和从最大过载卸到零所需时间；

$\dot{n}_{max.+}$ 和 $\dot{n}_{max.-}$：分别表示正和负的最大过载速率；

$q_{max.+}$ 和 $q_{max.-}$：分别表示以平尾的最大权限作上俯和下俯机动中的最大俯仰速率。

显然 t_{maxg} 反映了飞机改变姿态快慢的能力,即机头指向快慢的能力;t_{unload} 则反映了飞机恢复姿态快慢的能力和恢复能量的能力,这是在空战中反映机头能否快速指向并首先击中敌机的一种度量。图 3.27 为某机加载和卸载所需时间曲线。由图可见,对于不同飞行状态,飞机的加载和卸载时间有很大变化。

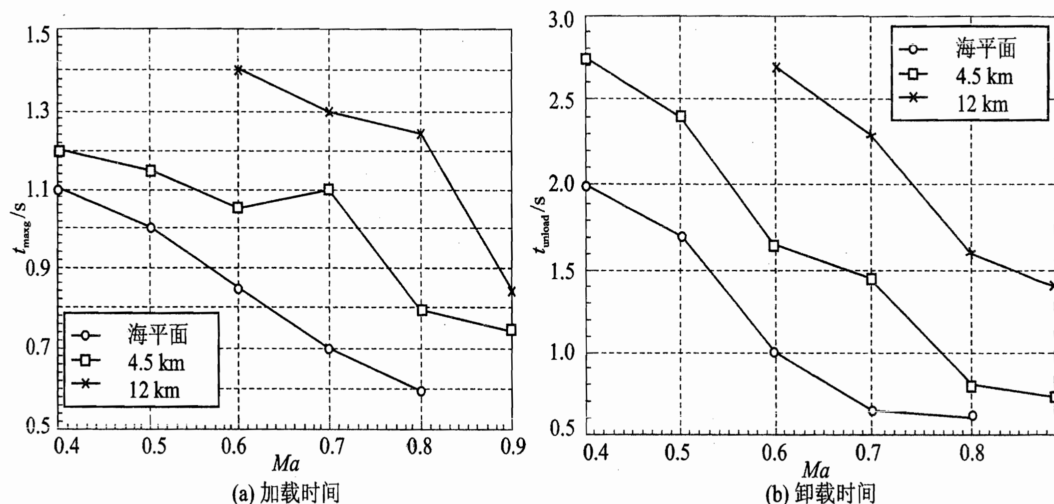


图 3.27　飞机加载和卸载时间随 *H*,*V* 变化曲线

3. 轴向敏捷性

轴向敏捷性是反映在飞机状态转换过程中,发动机推力增强的快慢和减速装置收放过程中阻力瞬态变化的能力。通常用两个沿着速度方向的单位剩余功率变化率衡量。

功率剧增参数 POP：表示单位剩余功率从最小推力/最大阻力状态到最大推力/最小阻力状态的增量与完成此过程所需时间之比,即

$$\mathrm{POP} = \frac{(\mathrm{SEP})_{\max} - (\mathrm{SEP})_{\min}}{\Delta t} \tag{3.83}$$

功率消散参数 PLP：表示从最大 SEP 状态转换为最小 SEP 状态的过程。其表达式类似于 POP。

很明显,这两个参数实质上是体现了飞机加速度和减速度变化的能力,反映水平攻击敌机时,能量积聚幅度;回避敌机时,能量损失幅度。同时这两个参数也反映出在一次攻击后,飞机

恢复能量的快慢程度。图 3.28 为某机的功率剧增参数和功率消散参数变化曲线。

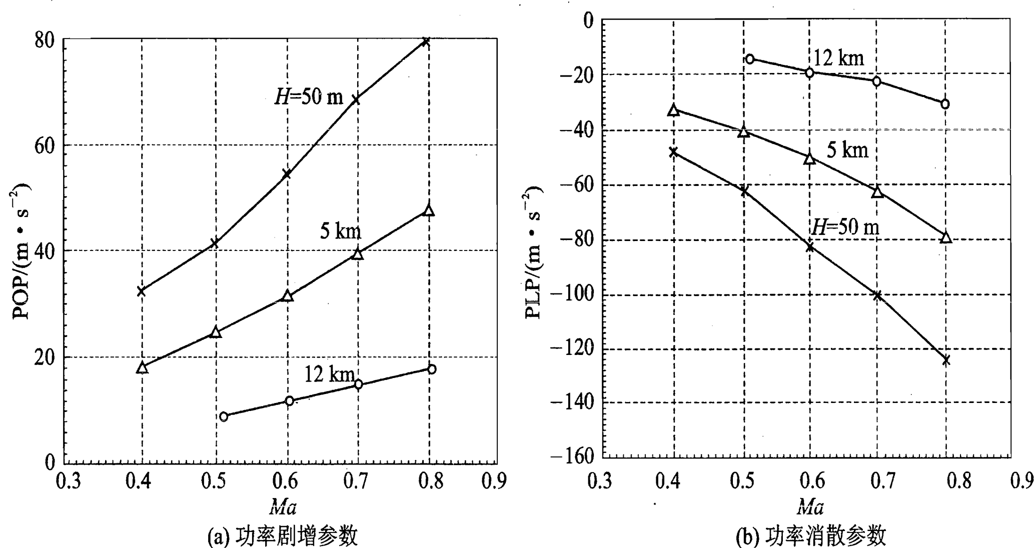


图 3.28　功率剧增参数和功率消散参数随 H,V 变化曲线

3.6.4　功能敏捷性尺度

1. 轴　向

常用典型的空战阶段来衡量,如图 3.29 所示。整个空战可以分成若干阶段。

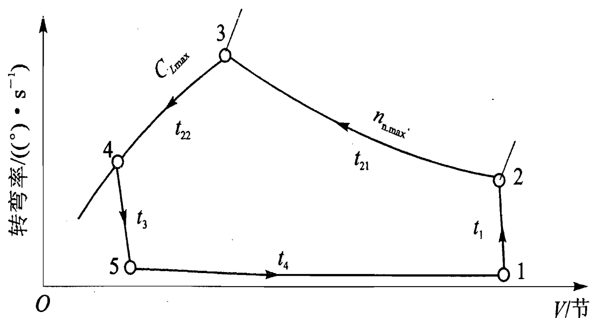


图 3.29　空战周期时间概念

接敌段(1→2):飞机从某初始飞行速度迅速加载到最大过载。

占位段(2→3→4):保持最大过载作减速盘旋,直到最大升力系数处(3 点);该点处,法向过载 n_n 和升力系数 C_L 均最大,故其转弯速率最大,对应的飞行速度 V_c 谓之角点速度;随后继续保持最大升力系数减速盘旋,过载也相应减小;最后达到攻击所需的转弯角(4 点)。

退出段(4→5):开始卸载到 $1g$,转弯速度迅速减小。

恢复段(5→1):平飞加速至原初始飞行速度。



上述表明，这一典型空战过程中综合了飞机的瞬态敏捷性和能量机动性。其中有两个持续飞行阶段，即能量损失的占位转弯段(2→3→4)和能量增长的恢复段(5→1)，故将该空战阶段归纳为轴向功能敏捷性。下面是具体衡量尺度。

空战周期时间 CCT：即图中各飞行段时间 t_1，t_{21}，t_{22}，t_3 和 t_4 的总和作为敏捷性尺度。显然，空战周期越短越好，表明飞机具有能尽快准备下一次攻击的能力。

动态速度转弯图 DST：该尺度着重分析图 3.29 中占位段和恢复段能量转换的情况。用两组曲线来表示，如图 3.30 所示。其中图 3.30(a)表示 2→3→4 段上各点转弯角速度随减速度的变化曲线。可见飞机为了达到 16 (°)/s～20 (°)/s 的转弯速率，飞机的减速度(能量消耗)可达 15～30 节/s。图 3.30(b)表示 5→1 段上各点加速度与对应的速度曲线。可见为了恢复转弯所消耗的能量，该机所提供的加速度，大约为 10 节/秒，由此可粗略估计从 200 节加速到 500 节所需时间约为 30 s。节为速度单位，表示海里/小时，折合公制为 1.853 km/h。

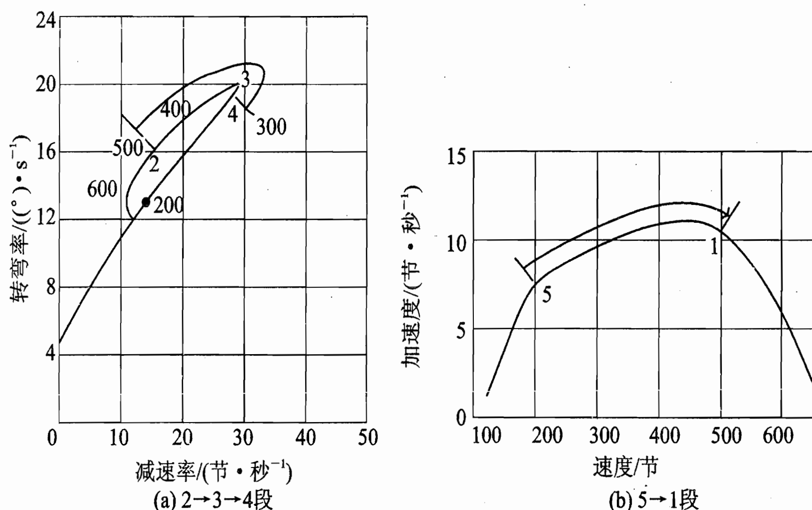


图 3.30　动态速度转弯

相对能量状态 RES：是指飞机完成 180°水平转弯过程中(2→3→4 段)的速度 V 与角点速度 V_c(即转弯速率最大处的速度，图 3.29 中的 3 点)之比，如图 3.31 所示。为了保证飞机空中具有高转弯速率的多次攻击能力，通常要求转弯速度在角点速度附近，即 V/V_c 接近 1，否则能量损失太大，恢复能量时间长，不易再次进入进攻。图中可见该机在转弯到 90°时，仍能保持角点速度，这对再次空战是有利的。

2. 纵　向

常用指向裕度作为衡量尺度，如图 3.32 所示。

指向裕度 PM：是指两机同时开始作同样过载的水平转弯或垂直拉升机动时，当其中一机已指向对方的瞬间，对方机头与瞄准线之间的夹角。这表示当一机已开火时，对方机还需要转动多少角度才能指向该机。它反映了飞机先于发射的能力，是实战中赢得空战优势的重要条件。



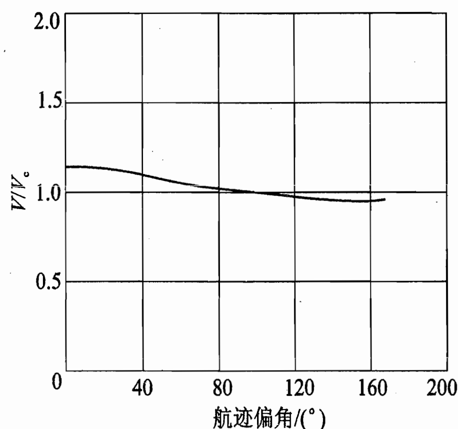


图 3.31 相对能量状态

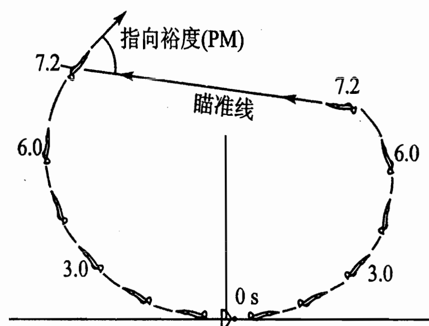


图 3.32 指向裕度的定义

3. 横 向

常用反向滚转敏捷性参数作为尺度。

反向滚转敏捷性参数 Td_a：其中 T 表示以固定过载作某个方向转弯（如倾斜角为 90°右转弯）转换到相反方向转弯（如倾斜角为 −90°左转弯）所需时间；d_a表示完成上述过程的驾驶杆横向位移，则 T 和 d_a的乘积值越小，表示敏捷性越好。

3.6.5 敏捷性潜力

敏捷性与时间尺度无关，而是用气动、构形参数来表达敏捷性潜力的大小，常用各轴向的敏捷性准则来表示。

1. 横向敏捷性准则

用操纵面偏转引起的滚转力矩导数与绕 Ox 轴的惯性矩之比来表示，即

$$C_{l\delta_a}\delta_a qSb/I_x$$

显然，此值（绝对值）越大越好。

2. 纵向敏捷性准则

类似地用操纵面偏转引起的俯仰力矩导数与绕 Oz 轴惯性矩之比表示，即

$$C_{m\delta_e}\delta_e qSc/I_z$$

3. 轴向敏捷性潜力

常用飞机的推重比除以翼载来表示。

很明显，在计算上述介绍的敏捷性尺度时，由于涉及到状态动态变化过程，飞机的运动必须作为刚体运动处理，既要考虑质心移动，还要考虑飞机绕质心转动，即要用到第 6 章的刚性飞机运动方程。而计算飞机机动性指标时，常把飞机作为一个质点处理。



3.7　过失速机动

目前空战的特点，通常先在视距外用远程或中程空空导弹进行攻击。攻击失效后很快就转入视距内，即近距作战。这就要求飞机具有高转弯率和高的加减速能力，也就是要求飞机具有高的敏捷性。大量模拟空战结果表明，采用过失速技术是非常有效的措施。

过失速机动是指飞机在超过失速迎角之后，仍能按照驾驶员指令完成的战术机动。此时飞机飞行速度低，迎角大，气动舵面操纵效率下降，甚至失效。采用推力矢量控制技术，可以满足过失速机动操纵要求，使飞行包线向过失速区大大扩展。如再引入直接力控制模式，可以将飞机的姿态运动和轨迹运动解耦，就可增加飞机机头瞄准能力，或减速以获得高转弯率，或用以逃避敌方的攻击，空战效能就能大大提高。例如具有过失速机动能力的 X—31A 在进行近距空战评估飞行试验时，在与 F/A—18 的 66 次交锋中，初始双方处于均等态势，X—31A 通过实施过失速机动，获得了 64 次胜利，X—31A 获得交换比 1:32。即使空战开始时 X—31A 处于防守态势，大多数情况下胜利者仍是 X—31A。由此可见，过失速机动技术、推力矢量控制技术和主动控制技术等都是提高敏捷性的有效措施。

图 3.33 是一些采用过失速机动技术效果的示例。

图 3.33(a)表示过失速机动的有效时机。两架飞机进行常规转弯尾追攻击时很难取得优势。具有过失速机动能力的飞机在 A 点位置就获得瞄准敌机的机会。如没有及时抓住，飞机飞至 A'点，再采用过失速机动也就没有效果，且速度损失很大，不利于进一步作战。

图 3.33(b)为过失速机动与常规机动的比较。一架常规飞机和一架具有过失速机动能力的飞机，从相同的初始状态出发，常规飞机拉到极限使用过载后，轨迹上弯；而具有过失速机动能力的飞机以 $\dot{\alpha}=50$ (°)/s 机动，飞机很快达到 90°迎角，其轨迹高度变化不大。从图中可见，在 $t=2$ s 位置到 $t=8$ s 位置内，常规飞机始终落在具有过失速机动能力飞机的导弹或火炮攻击包线之内，总计达 6 s 之久。这种“位于火力包线内的时间”可视为过失速机动占有空战优势的一种标志。

图 3.33(c)表示不同迎角变化率对过失速机动的影响。两架具有过失速机动能力的飞机，以不同 $\dot{\alpha}$ 作过失速机动，具有较高 $\dot{\alpha}$ 的飞机将占优势。从图中可见，两机的 $\dot{\alpha}$ 仅差 20 (°)/s 时，较高 $\dot{\alpha}$ 飞机具有的“位于火力包线内的时间”仅 2 s。如果将 $\dot{\alpha}$ 差值增加到 40 (°)/s，则“位于火力包线内的时间”可增加到 10 s。

图 3.33(d)表示采用过失速机动逃避追击的实例。当过失速飞机在常规飞机的前方，这时过失速机动的显著减速作用能甩开常规飞机的追击，让其冲到前面，改变了交战双方的位置，便于进一步攻击。

目前见到的过失速机动动作较多，但最常见的有尾冲、眼镜蛇和 Herbst 等机动动作。该类机动均利用飞机动力学特性结合飞控系统来实现。下面简要介绍这些机动。

(a) 过失速机动的有效时机

(b) 过失速机动与常规机动的比较

(c) $\dot{\alpha}$ 对过失速机动性能的影响

(d) 逃避的过失速机动

图 3.33 过失速机动技术的效果

3.7.1 尾冲和眼镜蛇机动

这两种典型的机动飞行过程如图 3.34 所示。尾冲机动时，飞机开始控制在小迎角下接近垂直爬升，飞机俯仰姿态基本保持不变，飞行高度增加，速度不断减小；在轨迹倾角接近 90° 时，飞机垂直速度为零，随即竖直下落，速度矢量急剧变化，迎角达到失速迎角，进入过失速状态；然后飞机开始自动低头，迎角迅速减小；进入小迎角区后，驾驶员操纵退出机动。



而眼镜蛇机动时，飞机在进入平飞后，驾驶员急速拉杆到底，飞机抬头，随后迎角迅速增大，速度减小，当超过失速迎角后，进入过失速区，飞机开始自动低头，迎角减小，再推杆操纵，退出机动。整个机动过程中飞机高度变化不大。

粗看起来这两种机动外观很不一样，但它们有共同点：飞机达到同样的过失速迎角，同时能量急剧损失，待 2～3 s 后，下俯力矩的作用使飞机迅速恢复到小迎角状态。整个过失速机动完成动作时间很短，因而飞机运动参数变化较大，作用在飞机上的气动力将是非线性、非定常的。这种气动力特性有时会对完成过失速机动产生很大影响。

此时，在大迎角下飞机本体的航向静稳定很差，甚至出现静不稳定，气动舵面操纵效率很低，因此要完成尾冲、响尾蛇过失速机动还必须采用有效的控制系统，如推力矢量控制等。

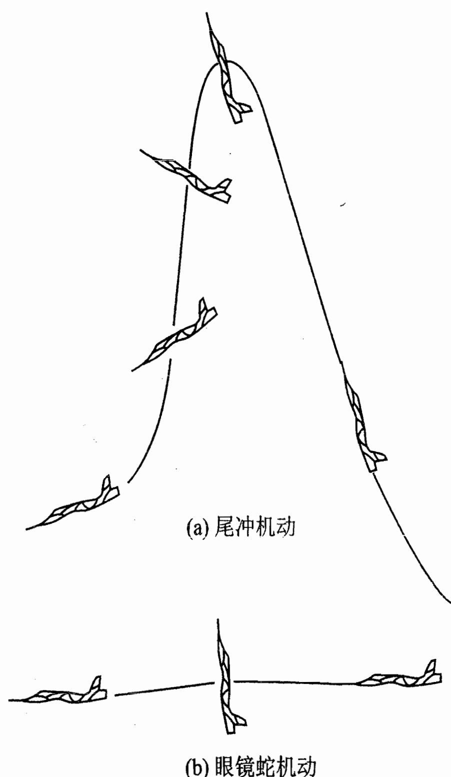


图 3.34　尾冲、眼镜蛇机动

3.7.2　Herbst 机动

这个机动是以德国人 W. B. Herbst 的名字命名的。该机动能在空战中获得战术优势，是非常有代表性的机动。其机动过程如图 3.35 所示。

飞机从高速进入，急拉杆至迎角超过失速迎角($\alpha=70°$)，并伴随速度骤减；随后在过失速状态下进行绕速度矢量滚转，力图以最小半径、最快速度改变机头指向 180°；再推杆卸载和利用重力下滑加速，最后返回小迎角飞行。

显然该机动的最大特点是其转弯半径较常规机动显著减小，从而能使飞机迅速占据有利位置或迅速将机身指向目标，获得抢先开火的机会，在空战中占有明显优势。攻击完后，飞机恢复到原始速度/能量状态较快，具备了准备再次进攻或躲避敌人进攻的能力。

实现这类过失速机动，关键是飞机要有较大的上俯加速度和设法防止飞机在大迎角下的航向偏离。美国 X—31A 采用俯仰和偏航方向推力矢量控制和引入防偏离装置，解决了这个关键问题。当然，Herbst 机动也存在问题，飞机在机动中由于短时间呈现一种“悬挂”或“滞止”状态，在多机空战时，容易受到其他敌机的攻击。因此驾驶员必须谨慎地决定是否作 Herbst 机动。

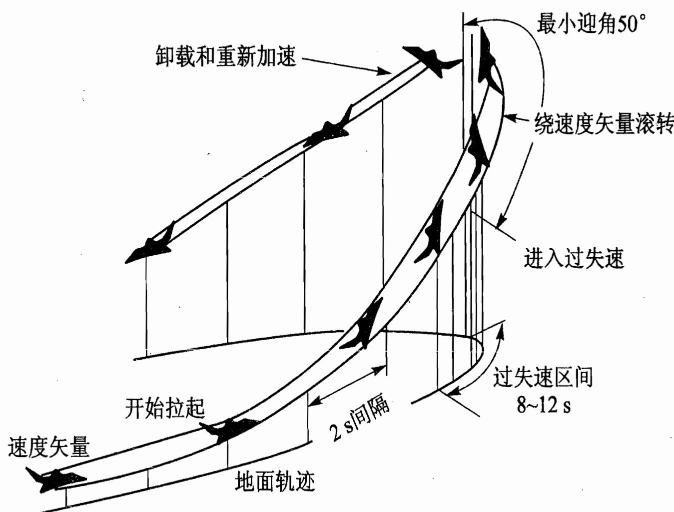


图 3.35　Herbst 机动

复习思考题

3.1　何谓飞机的机动性？分析运动轨迹与过载之间的关系。

3.2　某飞机重量 W=49 000 N，机翼面积 S=25 m^2，在 10 000 m 高度上以初速度 V_0=260 m/s开始跃升，假设跃升过程中发动可用推力 T_a与飞机阻力 D 平衡，试确定跃升高度。已知最大允许使用升力系数如下：

Ma	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
C_L	0.95	0.80	0.70	0.62	0.57

3.3　设某飞机重量 W=58 800 N，机翼面积 S=28 m^2，在 H=6 000 m 高度上以 V=250 m/s作水平直线飞行。设飞机开始平飞加速，为获得加速度 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$=5 m/s^2，试问此时发动机可用推力应为多少？(其极曲线可表示为 $C_D=0.014\,4+0.08C_L^2$)。

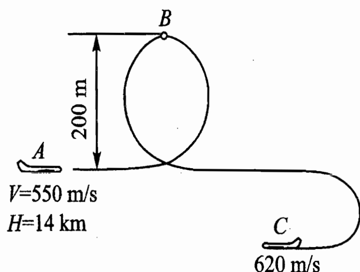


图 3.36　平面机动

3.4　设我机最初以 H=14 000 m，V=550 m/s 巡航，发现敌机后与敌机作筋斗格斗、下滑倒转，最后返航，如图 3.36 所示。若整个空战过程中忽略(T_a-D)所作的功，试用能量法求该机筋斗顶点 B 的速度和返航状态 C 的高度。

3.5　某飞机重量 W=70 000 N，机翼面积 S=25 m^2，极曲线可表示为 $C_D=0.015+0.06C_L^2$ 和 $C_{L\max}=1.4$。极限过载 $n_{n.\max}=8$。若飞机以 V=300 km/h 在水平面内15 s 完成 180°的转弯时，试确定相应的倾斜角 μ、升阻比 K、法向



过载 n_n、转弯半径 R 以及所需的可用推力 T_a。

3.6　某飞机重量 $W=85\,000$ N，机翼面积 $S=32$ m²，$C_{L\max}=1.5$，$C_D=0.04+0.0833C_L^2$ 和 $n_{n.\max}=6$。试问该机 6 s 内在水平面完成 90°协调转弯所需发动机的推力应多大？

3.7　某机重量 $W=68\,000$ N，推重比 $T/W=0.6$，假设翼面积 $S=24$ m²，$C_D=0.025+0.07C_L^2$，$C_{L\max}=1.2$ 和 $n_{n.\max}=8$。当飞机在 H=2 250 m 高度作 180°转弯时，试确定：① 保持高度下的最小盘旋时间；② 允许高度损失下的最小盘旋时间及相应的高度损失。

3.8　何谓飞机的能量机动性？分析能量机动性与高度机动性、速度机动性之间的关系。

3.9　试说明反映飞机综合机动能力的过载极曲线的确定方法。

3.10　何谓飞机的敏捷性？目前用来评价敏捷性的指标有哪些？

第4章　方案飞行与弹道

前面介绍了飞机的有关性能，本章及第5章将开始介绍有关导弹的特性，这里重点介绍导弹的轨迹特性。在研究轨迹特性时仍然可将导弹看作一个可以控制的质点。根据导弹攻击的目标不同，其轨迹控制方式有所不同，大致可分为两类：方案飞行（或程序飞行）弹道和导引飞行弹道。本章介绍方案飞行弹道，第5章介绍导引飞行弹道。

方案飞行导弹一般是用来攻击静止的或运动缓慢的目标（如桥梁、机场、坦克、军舰等），或将导弹及其他飞行器送到预定点（如地空导弹的起控点、反弹道导弹的预测拦截点、卫星等航天器的入轨点或预定轨道等），故该导弹可按某种固定的飞行程序飞行。由于该飞行程序是事先设计好的，故导弹一旦发射出去就不再改变。

方案飞行是比较常用的一种飞行方式。弹道导弹的主动段一般是按方案飞行的。飞航式导弹的发射爬升段和续航段也采用方案飞行弹道。许多导弹除了末制导段外，也常使用方案飞行弹道，比如前述的地空导弹和反导导弹。运载火箭也按照方案飞行程序将航天器送入预定的入轨点或预定轨道。

方案飞行程序是指导弹某一运动变量按给定的规律变化。这一运动变量变化规律可以是关于弹道倾角 $\gamma_*(t)$、迎角 $\alpha_*(t)$、俯仰角 $\theta_*(t)$、法向过载 $n_{z*}(t)$ 或高度 $h_*(t)$ 等。下面仅就按迎角、俯仰角及弹道倾角方案飞行弹道进行讨论。

4.1　按给定迎角或俯仰角的方案飞行

在弹道坐标系（航迹坐标系）下，导弹质心运动的动力学方程由式(1.36)得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{T\cos\alpha\cos\beta - D}{m} - g\sin\gamma = g(n_x - \sin\gamma)\\
\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{V\cos\gamma}\frac{T(\sin\alpha\sin\mu - \cos\alpha\sin\beta\cos\mu) + C\cos\mu + L\sin\mu}{m} = \frac{1}{V\cos\gamma}gn_y\\
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{V}\left(\frac{T(\sin\alpha\cos\mu + \cos\alpha\sin\beta\sin\mu) - C\sin\mu + L\cos\mu}{m} - g\cos\gamma\right) = \frac{1}{V}g(n_z - \cos\gamma)
\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

式中 V，γ 和 χ 分别为导弹的速度大小、弹道倾角和弹道偏角；α，β，μ 分别为迎角、侧滑角和速度滚转角；m，T，D，L 和 C 分别为导弹质量、作用在导弹上的推力、阻力、升力和侧力；n_x，n_y，n_z 分别为作用在导弹上的轴向、侧向和法向过载，且有



$$
\left.
\begin{aligned}
n_x &= \frac{T\cos\alpha\cos\beta - D}{mg} \\
n_y &= \frac{T(\sin\alpha\sin\mu - \cos\alpha\sin\beta\cos\mu) + C\cos\mu + L\sin\mu}{mg} \\
n_z &= \frac{T(\sin\alpha\cos\mu + \cos\alpha\sin\beta\sin\mu) - C\sin\mu + L\cos\mu}{mg}
\end{aligned}
\right\} \tag{4.2}
$$

g 为重力加速度。导弹质心运动的运动学方程由式(1.37)得

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t} &= V_x = V\cos\gamma\cos\chi \\
\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}t} &= V_y = V\cos\gamma\sin\chi \\
\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t} &= V_z = -V\sin\gamma
\end{aligned}
\right\} \tag{4.3}
$$

从方程(4.3)可知，为了得到导弹弹道，首先需要知道 V,γ 和 χ 的变化规律，而要得到 V,γ 和 χ 的变化规律，又需要知道导弹的质量 m、推力 T 的大小，同时还要知道导弹的迎角 α、侧滑角 β 以及作用在导弹上的阻力 D、升力 L 和侧力 C 的大小，而 D,L 和 C 又依赖于 α,β 以及导弹所处的高度和导弹速度的大小。一般导弹质量变化规律、推力变化规律是事先给定的，而轴对称导弹常采用侧滑转弯方式(即 $\mu\approx 0$)，因而剩下 α,β 为待定变量。一旦 α,β 变化规律已知，同时又知道初值 V_0,γ_0,χ_0,x_{g0},y_{g0},z_{g0}，则积分方程式(4.1)和式(4.3)就可以得到导弹的弹道。

考虑到方案飞行的导弹基本上在垂直平面内进行，下面仅就导弹在垂直平面内的方案飞行弹道进行讨论。在这种情况下导弹质心运动方程可简化为

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{T\cos\alpha - D}{m} - g\sin\gamma = g(n_x - \sin\gamma) \\
\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{V}\left(\frac{T\sin\alpha + L}{m} - g\cos\gamma\right) = \frac{1}{V}g(n_z - \cos\gamma) \\
\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t} &= V\cos\gamma \\
\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t} &= -V\sin\gamma
\end{aligned}
\right\} \tag{4.4}
$$

式中

$$
\left.
\begin{aligned}
n_x &= \frac{T\cos\alpha - D}{mg} \\
n_z &= \frac{T\sin\alpha + L}{mg}
\end{aligned}
\right\} \tag{4.5}
$$

由于已经假定质量 m、推力 T 的变化规律已知，因此只要给定迎角 α 的变化规律，就可以根据式(4.4)得到导弹的飞行弹道。

4.1.1 按给定迎角的方案飞行

按给定迎角设计方案弹道，主要有以下不同的考虑：

① 在跨声速阶段由于气动特性变化剧烈，导弹的可控性会变差，因此，要求迎角为零；

② 为了保证级间可靠分离，需要尽可能减小级间分离时的气动力和气动力矩的干扰，因此，需要使迎角为零；

③ 为了获得良好的转弯性能，常常需要让迎角按一定规律变化，同时对最大迎角进行限制；

④ 为了防止弹道法向过载超出可用值，也需要对迎角进行限制。

基于上述考虑，设 $\alpha_*(t)$ 为给定的迎角变化规律，那么只要在式(4.4)中令

$$\alpha=\alpha_*(t)$$

就可以通过数值积分得到需要的方案弹道。

如果是直接提出的对法向过载的限制，即

$$n_z=n_{z*}(t)$$

那么由式(4.5)可得

$$n_z=\frac{T\sin\alpha+L}{mg}=n_{z*}(t) \tag{4.6}$$

也可以近似地得

$$n_z=\frac{T\sin\alpha+L}{mg}\approx n_{z*}\Big|_{\alpha=0}+n_{z*}^{\alpha}\alpha=n_{z*}(t) \tag{4.7}$$

因此

$$\alpha=\frac{n_{z*}(t)-n_{z*}\Big|_{\alpha=0}}{n_{z*}^{\alpha}} \tag{4.8}$$

其中 $n_{z*}\Big|_{\alpha=0}$ 为平衡状态下迎角为零时的过载(对于非轴对称导弹一般有此项)，n_{z*}^{α} 为平衡状态下过载的一阶导数项。对于轴对称导弹，有 $n_{z*}\Big|_{\alpha=0}=0$，且在小迎角下有

$$n_{z*}^{\alpha}\alpha\approx\frac{T\sin\alpha+L}{mg}\approx\frac{T/57.3+L_*^{\alpha}}{mg}\alpha$$

即

$$n_{z*}^{\alpha}\approx\frac{T/57.3+L_*^{\alpha}}{mg} \tag{4.9}$$

因此式(4.8)可具体化为

$$\alpha=\frac{mg}{T/57.3+L_*^{\alpha}}n_{z*}(t) \tag{4.10}$$

当然迎角 α 也可以由式(4.6)通过迭代法求解。



4.1.2　按给定俯仰角的方案飞行

如果迎角测量还具有一定难度，而且精度也比较差，那么就很难利用测量迎角进行反馈，控制导弹准确地按方案弹道飞行。因此，在实际中常将迎角方案 $\alpha_*(t)$ 转化为俯仰角方案 $\theta_*(t)$，即

$$\theta_*(t) = \alpha(t) + \gamma(t) \tag{4.11}$$

这样，可以将弹道方程式(4.4)作如下改变：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{T\cos\alpha - D}{m} - g\sin\gamma \\
&\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{V}\left(\frac{T\sin\alpha + L}{m} - g\cos\gamma\right) \\
&\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t} = V\cos\gamma \\
&\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t} = -V\sin\gamma \\
&\alpha = \theta - \gamma \\
&\theta = \theta_*(t)
\end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

4.2　按给定弹道倾角的方案飞行

应该说，迎角或俯仰角弹道方案对弹道形状的改变都是间接的，而弹道倾角则直接决定着弹道的平直或弯曲。比如说直线弹道对应着 $\gamma_*(t)=$常数，而等速圆周弹道则对应于 $\dot{\gamma}_*(t)=$常数。如果给定了弹道倾角方案 $\gamma_*(t)$，则利用式(4.4)的第二式及式(4.7)，可得到

$$\alpha = \frac{1}{n_{z*}^{\alpha}}\left(\frac{V}{g}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \cos\gamma - n_{z*}\Big|_{\alpha=0}\right) \tag{4.13}$$

这样，对应该方案弹道的运动微分方程变为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{T\cos\alpha - D}{m} - g\sin\gamma \\
&\frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t} = V\cos\gamma \\
&\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t} = -V\sin\gamma \\
&\alpha = \frac{1}{n_{z*}^{\alpha}}\left(\frac{V}{g}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \cos\gamma - n_{z*}\Big|_{\alpha=0}\right) \\
&\gamma = \gamma_*(t)
\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

下面讨论几个特殊的弹道。

4.2.1 直线飞行弹道

直线飞行弹道是比较常见的一种弹道，例如飞航式导弹的水平直线掠海飞行、地空导弹在初始弹道段的飞行等。

此时方案弹道为

$$\gamma = \gamma_*(t) = 常数 \tag{4.15}$$

方程式(4.13)变为

$$\alpha = \frac{\cos\gamma - n_{z*}\big|_{\alpha=0}}{n_{z*}^{\alpha}} \tag{4.16}$$

对于水平直线弹道

$$\alpha = \frac{1 - n_{z*}\big|_{\alpha=0}}{n_{z*}^{\alpha}} \tag{4.17}$$

4.2.2 垂直上升弹道

对于垂直上升弹道，有 $\gamma=\gamma_*(t)=90°$，运动方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{T\cos\alpha - D}{m} - g\\
&\frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t} = -V\\
&\alpha = \frac{-n_{z*}\big|_{\alpha=0}}{n_{z*}^{\alpha}}
\end{aligned}\right\} \tag{4.18}$$

迎角的表达式说明，垂直飞行时法向过载为零，即

$$n_{z*}^{\alpha}\alpha + n_{z*}\big|_{\alpha=0} = 0 \tag{4.19}$$

特别是对于轴对称导弹，垂直飞行时迎角为零。

4.2.3 等高飞行弹道

对于轴对称导弹，为了保证等高飞行，需要满足如下关系方程：

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \frac{T\cos\alpha - D}{m} - g\\
&z = h_0\\
&\alpha_0 = \frac{1}{n_{z*}^{\alpha}}\\
&C_{m\alpha}\alpha_0 + C_{m\delta_e}\delta_{e0} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$



对于面对称导弹，只是式(4.20)中后两方程改成

$$\alpha_0=\frac{1-n_{z*}\big|_{\alpha=0}}{n_{z*}^{\alpha}}$$

$$C_{m0}+C_{m\alpha}\alpha_0+C_{m\delta_e}\delta_{e0}=0$$

式中 h_0 为等高飞行的高度；α_0 为保持等高飞行所需的迎角；δ_{e0} 为导弹保持等高飞行所需的升降舵偏角，其表达式可按式(4.20)中的第四式得到，即

$$\delta_{e0}=-\frac{C_{m\alpha}}{C_{m\delta_e}}\alpha_0 \tag{4.21}$$

但实际飞行过程中，因为导弹的质量、速度等都在不断地变化，维持法向力平衡的迎角 α_0 也是要变化的，所以升降舵偏角 δ_{e0} 也要随着进行调节。具体的调节方法是通过高度信号反馈实现，其调节规律为

$$\delta_{e0}=\delta_{e0*}+k_h\Delta h \tag{4.22}$$

式中高度差 $\Delta h=h-h_0$ 可采用微动气压计或无线电高度表测量得到，h 为导弹的实际飞行高度；而 δ_{e0*} 为一个常值舵偏角，可取为导弹转入等高飞行时所需要的舵偏角；k_h 为高度差反馈放大系数，表示单位高度偏差升降舵所对应偏转的角度大小。

从式(4.22)可以看出，如果导弹飞行在所要求的高度上，则升降舵偏角维持在 δ_{e0*} 位置上不变。如果导弹的飞行高度低于规定的高度，即 Δh 为一负值，那么，对于正常式布局的导弹，升降舵偏角就要在原来的常值舵偏角 δ_{e0*} 的基础上再偏转一个角度 $\Delta\delta_e$，即

$$\Delta\delta_e=k_h\Delta h \tag{4.23}$$

反之亦然。$\Delta\delta_e$ 是为保持导弹的等高飞行所必需的。

从表面上看，似乎只要让导弹的升降舵偏角随着高度差 $\Delta h=h-h_0$ 变化而变化就可以了，但是在实际飞行过程中，由于控制系统和导弹具有惯性，造成导弹在由实际高度 h 转向规定高度 h_0 的过程中，不可避免地会出现超高(即 $\Delta h>0$)和欠高(即 $\Delta h<0$)的现象。导弹则在给定高度 h_0 附近振荡。

为了使导弹尽快地稳定在规定的高度上飞行，需要改善导弹从实际高度向规定高度过渡的过渡过程品质。为此，在舵偏角调节规律中除引入高度差反馈信号外，还可以进一步引入高度差的变化率反馈信号，即

$$\delta_{e0}=\delta_{e0*}+k_h\Delta h+k_{\dot h}\Delta\dot h \tag{4.24}$$

式中 $k_{\dot h}$ 为高度变化率反馈放大系数，表示高度变化率变化一个单位时，升降舵应偏转的角度。高度变化率反馈的作用相当于速度反馈，目的是提高响应的灵敏度，抑制高度变化。高度变化率 $\Delta\dot h$ 可由高度变化率传感器获得。

复习思考题

4.1 何谓“方案飞行”和“飞行方案”?

4.2 研究方案飞行有什么实际意义?

4.3 如何保持飞航式飞行器的定高飞行?

4.4 垂直飞行时,其飞行迎角是否一定等于零?如不等于零,如何使其保持垂直飞行?

4.5 平衡升力系数的导数是如何推出来的?它与哪些参数有关?

4.6 按迎角方案飞行和按俯仰角方案飞行分别是如何考虑的?

4.7 怎样实现按给定的弹道倾角飞行?

第5章 导引飞行与弹道

本章介绍导弹的导引弹道特性。由于现代导弹的制导系统可分为三个基本类型:自主控制、遥远控制和自动瞄准(自动寻的),因此其弹道特性也相对复杂些。

具有遥控或自动瞄准制导系统的导弹(例如“地对空”导弹、“空对空”导弹等)的飞行,通常称为导引飞行。这类导弹主要用于攻击活动目标,其制导系统是按目标的运动来导引导弹的运动。也就是说,随着目标航迹的变化,制导系统根据事先选定的导引方法,不断地改变导弹在空间运动的弹道,以达到最终命中目标的目的。所谓导引规律就是指导弹在向目标接近的整个过程中应满足的运动学关系。

对各种导引规律的运动学分析是导弹飞行力学的重要任务之一。大家知道,导弹的可用过载是有限的,人们总不希望导弹弹道上的需用过载大于导弹的可用过载。而导引规律不同就会直接影响导弹弹道上的需用过载的大小。另外,选择不同的导引规律又会直接影响整个制导系统实现的繁易程度。

因此在导弹弹体和控制系统的初步设计阶段,为了近似地确定导弹的运动轨迹、需用法向过载和飞行时间等参数(这些都是弹道参数),就必须首先迅速地确定这些基本弹道特性。通过研究导引规律的运动学,可以寻找和确定较为理想的导引规律,也可作为制导系统设计的依据。

为了能独立地和最简单地研究导引规律的运动学特性,作了如下假设:

① 控制系统的工作是理想的;

② 导弹的速度是已知的时间函数,不受导引规律的影响;

③ 把导弹和目标的运动都看成是可控制的质点运动。目标的运动规律是已知的,而导弹的运动则要服从于某些理想约束关系。

5.1 导弹的相对运动方程

所谓相对运动方程是指描述两个运动物体之间相对运动关系的方程。相对运动方程可以用来描述导弹和目标之间的相对运动关系,也可以用来描述导弹(或目标)和制导站之间的相对运动关系。相对运动方程是研究各种导引规律运动学特性的基础。

5.1.1 自动导引相对运动方程

自动导引相对运动方程,实际上描述的是导弹和目标之间的相对运动关系,也就是研究导



弹和目标之间的相对距离向量在空间的变化规律。通过对此规律的研究，找出导弹的弹道特性。相对距离向量的变化规律可以通过其大小的变化率和方向的变化率来表示，它们可分别在惯性直角坐标系和极坐标系下来描述。

为了研究问题方便起见，设导弹和目标在同一平面内运动（该平面被称为攻击平面或攻击面），如图 5.1 所示。图中各符号含义如下：

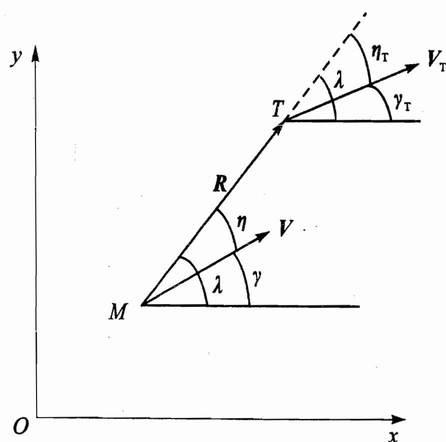


图 5.1　自动导引相对运动关系

Oxy 为某一惯性坐标系，Ox 轴作为基准线；M，T 分别为某一时刻导弹和目标所处位置；$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{V}_T$ 分别为该时刻导弹和目标运动的速度向量；$\boldsymbol{R}$ 为目标相对导弹的距离向量，其模值为导弹至目标的距离。导弹和目标之间的连线也称为目标相对导弹视线（简称目标视线）。λ 为目标视线与基准线之间的夹角，称为目标视线角。以导弹所在位置为原点，从基准线逆时针转向目标线时，目标视线角为正，即 $\lambda>0$；反之为负。η 为导弹速度向量 $\boldsymbol{V}$ 和距离向量 $\boldsymbol{R}$ 之间的夹角，称为导弹速度向量前置角。当 $\boldsymbol{V}$ 以逆时针方向通过最小夹角转向目标距离向量 $\boldsymbol{R}$ 时，η 角为正值；反之为负值。η_T 为目标速度向量 $\boldsymbol{V}_T$ 和距离向量 $\boldsymbol{R}$ 之间的夹角，称为目标速度向量前置角。当 $\boldsymbol{V}_T$ 以逆时针方向通过最小夹角转向目标距离向量 $\boldsymbol{R}$ 时，η_T 角为正值；反之为负值。γ 为在攻击平面内导弹速度向量与基准线之间的夹角，称为导弹的弹道角。由基准线出发以逆时针方向通过最小夹角转向目标距离向量 $\boldsymbol{R}$ 时，γ 为正值；反之为负值。γ_T 为在攻击平面内目标速度向量与基准线之间的夹角，称为目标的弹道角。由基准线出发以逆时针方向通过最小夹角转向目标运动速度向量 $\boldsymbol{V}_T$ 时，γ_T 为正值；反之为负。

如果攻击平面为铅垂平面，而基准线为当地水平面，那么，弹道角 γ，γ_T 分别为导弹和目标的弹道倾角；同样，如果导弹和目标在同一高度上飞行，则攻击平面就是一个水平面，若基准线平行于地面坐标系中的 x 轴，则弹道角 γ，γ_T 分别为导弹和目标的弹道偏角 χ 和 χ_T。

根据图 5.1，在极角坐标系下可得如下相对运动方程：

$$\left.\begin{aligned}\dot{R}&=-V\cos\eta+V_T\cos\eta_T\\ R\dot{\lambda}&=V\sin\eta-V_T\sin\eta_T\\ \lambda&=\gamma+\eta\\ \lambda&=\gamma_T+\eta_T\end{aligned}\right\}\tag{5.1}$$

假设 V，V_T，γ_T（或 η_T）都已知的情况下，式(5.1)中的未知数为 R，λ，η，γ 和 η_T（或 γ_T）这五个变量。方程式数目小于未知变量数，方程组不封闭。为此还需要一个使方程组封闭起来的方程。



这个方程就是通常所说的导引规律方程，它告诉人们如何去改变导弹的速度方向，即 η(或 γ)的变化规律。

如图 5.1 所示，在惯性直角坐标系 Oxy 下有

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= V\cos\gamma \\ \dot{y} &= V\sin\gamma \\ \dot{x}_T &= V_T\cos\gamma_T \\ \dot{y}_T &= V_T\sin\gamma_T \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

在上述假设参数已知情况下，方程式(5.2)同样有五个未知数 x,y,x_T,y_T,γ，通过补充关于导弹速度方向 γ 变化规律的导引律及相应的初始条件 $x(0),y(0),x_T(0),y_T(0)$后，方程可解。从而可进一步得到相对运动关系

$$R=\sqrt{(x_T-x)^2+(y_T-y)^2} \tag{5.3}$$

$$\lambda=\arctan\frac{y_T-y}{x_T-x} \tag{5.4}$$

$$\dot{R}=\frac{(x_T-x)(\dot{x}_T-\dot{x})+(y_T-y)(\dot{y}_T-\dot{y})}{R} \tag{5.5}$$

$$\dot{\lambda}=\frac{(x_T-x)(\dot{y}_T-\dot{y})-(y_T-y)(\dot{x}_T-\dot{x})}{R^2} \tag{5.6}$$

在自动瞄准导引系统中常用的导引规律有：纯追踪法、平行接近法和比例导引法。下面介绍这些导引规律的定义和数学描述方法。

1. 纯追踪法

所谓纯追踪法是指导弹在接近目标的过程中，导弹的速度向量永远指向目标，也就是说导弹的前置角 η 永远等于零。所以纯追踪法的理想控制方程可表示为

$$\eta\equiv 0 \qquad 或 \qquad \gamma\equiv\lambda \tag{5.7}$$

2. 平行接近法

所谓平行接近法是指导弹在向目标导引的过程中，目标视线始终保持平行，即 $\dot{\lambda}\equiv 0$，或者说 λ 保持为一常数。故平行接近法的理想控制方程可以表示为

$$\dot{\lambda}\equiv 0 \qquad 或 \qquad \lambda\equiv\lambda_0 \tag{5.8}$$

即

$$\sin\eta=\frac{V_T}{V}\sin\eta_T \tag{5.9}$$

3. 比例导引法

所谓比例导引法是指导弹在向目标导引的过程中，导弹速度向量的转动角速度 $\dot{\gamma}$ 正比于目标视线的转动角速度 $\dot{\lambda}$，即

$$\dot{\gamma} = K\dot{\lambda} \tag{5.10}$$

式中 K 称为比例导引法的比例系数。

方程组式(5.1)加上导引规律方程式之后，未知变量数等于方程式数。在给出微分方程组初始条件后，方程组即可求解。

5.1.2 遥控导引相对运动方程

遥控导引的控制信号一般是由导弹和目标之外的遥控制导站形成的。所以遥控导引的相对运动方程都是通过导弹和制导站之间的相对运动关系以及目标和制导站之间的相对运动关系来描述的。为了使问题简单化，还是假设导弹、目标和制导站都在同一平面内运动。它们之间的相对运动学的几何关系如图 5.2 所示。图中各符号所表示的意义为：N，M，T 分别表示制导站、导弹和目标在某一时刻在空间的位置；$\boldsymbol{V}_N$，$\boldsymbol{V}$，$\boldsymbol{V}_T$ 分别表示制导站、导弹和目标的运动速度向量；$\boldsymbol{R}_M$，$\boldsymbol{R}_T$ 分别表示制导站到导弹的距离向量和制导站到目标的距离向量，又分别称为导弹视线和目标视线；ε，ε_T 分别表示 $\boldsymbol{R}_M$ 和 $\boldsymbol{R}_T$ 与基准线之间的夹角，ε 称为导弹视线角，ε_T 称为目标视线角。当基准线以逆时针通过最小角转向 $\boldsymbol{R}_M$（或 $\boldsymbol{R}_T$）时，ε（或 ε_T）为正值。γ_N 为 $\boldsymbol{V}_N$ 和基准线之间的夹角，称为制导站的弹道角。当基准线以逆时针方向通过最小夹角转向 $\boldsymbol{V}_N$ 时，γ_N 为正值，反之为负。

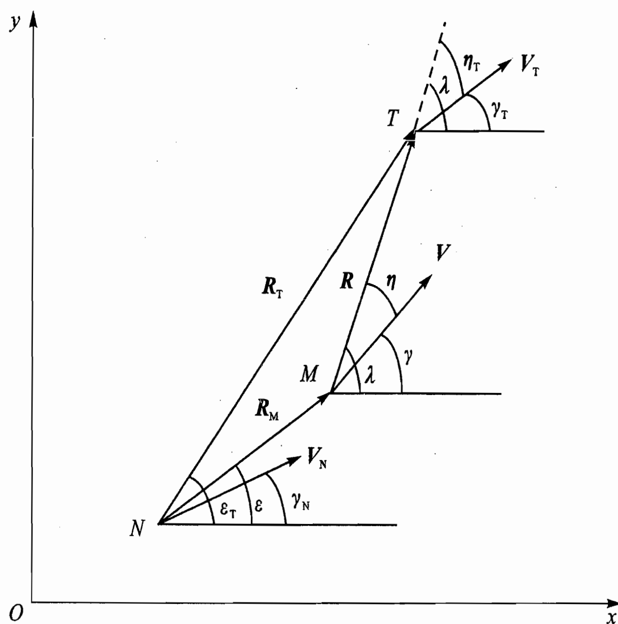


图 5.2　遥控导引相对运动关系

图 5.2 中其他的符号定义与图 5.1 中的定义相同，这里不再重述。

根据图 5.2，可以求得导弹和目标分别相对制导站的相对运动方程如下：



$$\left.\begin{aligned}
\dot{R}_{M} &= -V_{N}\cos(\varepsilon-\gamma_{N})+V\cos(\varepsilon-\gamma)\\
R_{M}\dot{\varepsilon} &= V_{N}\sin(\varepsilon-\gamma_{N})-V\sin(\varepsilon-\gamma)\\
\dot{R}_{T} &= -V_{N}\cos(\varepsilon_{T}-\gamma_{N})+V_{T}\cos(\varepsilon_{T}-\gamma)\\
R_{T}\dot{\varepsilon}_{T} &= V_{N}\sin(\varepsilon_{T}-\gamma_{N})-V_{T}\sin(\varepsilon_{T}-\gamma)
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

从式(5.11)中可以看出，当 $\boldsymbol{V}_{N}$,$\boldsymbol{V}$,$\boldsymbol{V}_{T}$,γ_{T} 随时间的变化关系均为已知的条件下，需要求解的参数为 $\boldsymbol{R}_{M}$,$\boldsymbol{R}_{T}$,ε,ε_{T},γ_{N},γ 共六个未知数。这时方程的数目小于未知数个数，故方程组不封闭，不能求解，需要再补充两个方程：一个是制导站和目标之间所应满足的导引关系方程；另一个是制导站(或目标)和导弹之间应满足的导引关系方程。这两个方程可通过描述导引方法的方程来求得。活动的制导站若自动追踪目标，此时可以采用追踪法、平行接近法和比例接近法等导引规律。

导弹和制导站(或目标)之间应满足的导引关系，可按遥控导引规律确定。常用的遥控导引规律有三点法和前置量法，即矫直系数法和半矫直系数法。下面介绍数学描述。

1. 三点法

$$\varepsilon=\varepsilon_{T} \tag{5.12}$$

2. 矫直系数法

$$\varepsilon=\varepsilon_{T}+\Delta\varepsilon=\varepsilon_{T}-\frac{\dot{\varepsilon}_{T}}{\dot{R}}R \tag{5.13}$$

式中

$$R=|\boldsymbol{R}_{T}-\boldsymbol{R}_{M}| \tag{5.14}$$

3. 半矫直系数法

$$\varepsilon=\varepsilon_{T}+\Delta\varepsilon=\varepsilon_{T}-C_{\varepsilon}\frac{\dot{\varepsilon}_{T}}{\dot{R}}R \tag{5.15}$$

式中当 $C_{\varepsilon}=0$ 时，即为三点法；当 $C_{\varepsilon}=1$ 时，即为矫直系数法；当取 $C_{\varepsilon}=1/2$ 时，即为半矫直系数法。

这些导引方法将在5.4节、5.5节作具体介绍。根据上述相对运动方程，就可以分析各种导引规律下的运动学特性。

当制导站固定不动时，情况就简单得多了，方程式(5.11)变为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{R}_{M} &= V\cos(\varepsilon-\gamma)\\
R_{M}\dot{\varepsilon} &= -V\sin(\varepsilon-\gamma)\\
\dot{R}_{T} &= V_{T}\cos(\varepsilon_{T}-\gamma)\\
R_{T}\dot{\varepsilon}_{T} &= -V_{T}\sin(\varepsilon_{T}-\gamma)
\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

在惯性直角坐标系 Oxy 下，也可按式(5.2)～式(5.6)来求解导弹相对于制导站以及目标



相对于制导站的相对运动关系。

5.2　平行接近法

所谓平行接近法是指：导弹在攻击目标的过程中目标视线保持平行移动，即目标视线角始终不变，如图 5.3 所示。

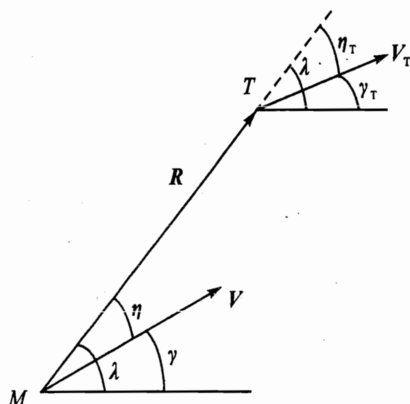


图 5.3　平行接近法相对运动关系图

$$\lambda \equiv \lambda_0 = \text{const} \qquad 或 \qquad \dot{\lambda} \equiv 0 \tag{5.17}$$

将式(5.17)代入相对运动方程组式(5.1)的第二式有

$$V_T \sin \eta_T = V \sin \eta \qquad 或 \qquad \eta = \arcsin\left(\frac{V_T}{V}\sin \eta_T\right) \tag{5.18}$$

其物理意义是：不管目标作何种机动飞行，导弹和目标垂直于目标视线方向的速度分量始终保持相等。

这时导弹和目标之间的相对运动方程就可以表示为

$$\left.\begin{aligned}
&\dot{R} = -V\cos \eta + V_T \cos \eta_T \\
&R\dot{\lambda} = V\sin \eta - V_T \sin \eta_T \\
&\lambda = \gamma + \eta \\
&\lambda = \gamma_T + \eta_T \\
&\eta = \arcsin\left(\frac{V_T}{V}\sin \eta_T\right) \qquad 或 \qquad \lambda = \lambda_0 = \text{const}
\end{aligned}\right\} \tag{5.19}$$

5.2.1　直线弹道问题

由图 5.4 和图 5.5 可以看到，采用平行接近法，无论目标作何种机动，目标视线总是平行移动；而且，从任何方向按平行接近法攻击目标，导弹相对目标的相对弹道都是直线弹道，即相对速度方向始终指向目标。

如果目标是作等速直线飞行，导弹是作等速飞行，则导弹按平行接近法攻击目标的绝对弹道也是直线弹道。

证明：导弹速度向量前置角 η 为

$$\eta = \arcsin\left(\frac{V_T}{V}\sin \eta_T\right) = \arcsin\left(\sin \eta_T / C_v\right) = \text{const} \tag{5.20}$$



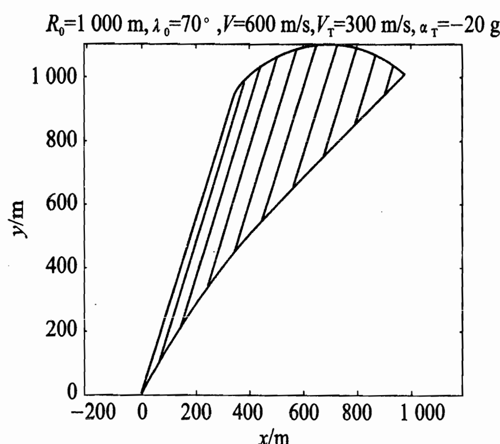


图 5.4　平行接近法导弹与目标的绝对弹道

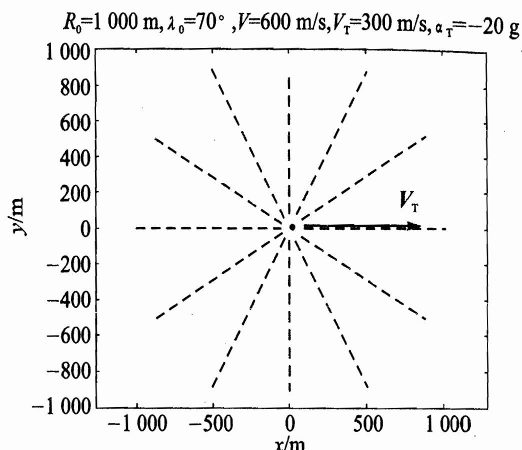


图 5.5　平行接近法导弹相对目标的相对弹道

式中 C_v 称为速比，为导弹速度与目标速度之比。由上式可以看出，导弹的前置角 η 为一常数。由于平行接近法目标视线角 λ 也为常数，所以由几何关系方程有

$$\gamma = \lambda - \eta = \text{const} \tag{5.21}$$

即导弹的速度方向不变，故导弹的飞行轨迹是一条直线航道。由此可见，在任意 λ_0 条件下攻击目标，只要按式(5.20)选择速度前置角($C_v>1$)就可以获得直线弹道。这就是平行接近法相对于追踪法的一个很大的优点。

5.2.2　弹道法向加速度特性

首先给出目标作变速机动飞行，导弹也作变速飞行，导弹用平行接近法攻击目标时，弹道的需用法向加速度 a_n 与目标弹道法向加速度 a_{nT} 的关系，如图 5.6 所示。图中，a_n 为导弹法向加速度，a_t 为导弹切向加速度，a_{nT} 为目标法向加速度，a_{tT} 为目标切向加速度，且有

$$\left.\begin{aligned} a_n &= V\dot{\gamma} \\ a_t &= \dot{V} \\ a_{nT} &= V_T\dot{\gamma}_T \\ a_{tT} &= \dot{V}_T \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

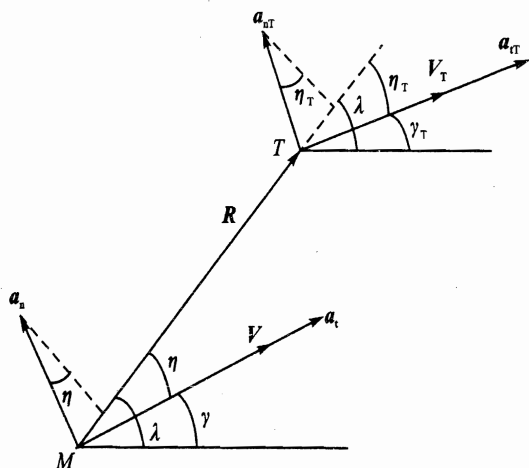


图 5.6　弹道加速度分量示意图

同时，由理论力学可知，点 T 相对点 M 的加速度 $d^2\boldsymbol{R}/dt^2$ 在视线长度和视线转动方向的分量为

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} - R\dot{q}^2 \\ R\ddot{q} + 2\dot{R}\dot{q} \end{bmatrix} \tag{5.23}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}^2 \boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a}_{\mathrm{T}} - \boldsymbol{a} \tag{5.24}$$

于是不难得到

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} - R\dot{\lambda}^2 \\ R\ddot{\lambda} + 2\dot{R}\dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{\mathrm{nT}}\sin\eta_{\mathrm{T}} + a_{\mathrm{tT}}\cos\eta_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{n}}\sin\eta - a_{\mathrm{t}}\cos\eta \\ a_{\mathrm{nT}}\cos\eta_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{tT}}\sin\eta_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{n}}\cos\eta + a_{\mathrm{t}}\sin\eta \end{bmatrix} \tag{5.25}$$

根据式(5.25)，若导弹按平行接近法接近目标，则有

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{a_{\mathrm{nT}}\cos\eta_{\mathrm{T}} - a_{\mathrm{tT}}\sin\eta_{\mathrm{T}} + a_{\mathrm{t}}\sin\eta}{\cos\eta} = \frac{a_{\mathrm{nT}}\cos\eta_{\mathrm{T}} - \dot{V}_{\mathrm{t}}\sin\eta_{\mathrm{T}} + \dot{V}\sin\eta}{\cos\eta} \tag{5.26}$$

将式(5.20)代入上式得

$$a_{\mathrm{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2\eta_{\mathrm{T}}/C_{\mathrm{v}}^2}}\left(a_{\mathrm{nT}}\sqrt{1 - \sin^2\eta_{\mathrm{T}}} + (\dot{V} - C_{\mathrm{v}}\dot{V}_{\mathrm{t}})\frac{\sin\eta_{\mathrm{T}}}{C_{\mathrm{v}}}\right) \tag{5.27}$$

如果速比变化率 $\dot{C}_{\mathrm{v}} \leqslant 0$，则

$$\dot{V} \leqslant C_{\mathrm{v}}\dot{V} \tag{5.28}$$

因此，式(5.27)化为

$$a_{\mathrm{n}} \leqslant a_{\mathrm{nT}}\frac{\sqrt{1 - \sin^2\eta_{\mathrm{T}}}}{\sqrt{1 - \sin^2\eta_{\mathrm{T}}/C_{\mathrm{v}}^2}} \tag{5.29}$$

若速比 $C_{\mathrm{v}} > 1$，则

$$a_{\mathrm{n}} < a_{\mathrm{nT}} \tag{5.30}$$

由此可以得到以下结论：在速比 $C_{\mathrm{v}} > 1$ 的情况下，且不要求 C_{v} 随时间的增加而增加，则无论目标作何种机动飞行，采用平行接近法导引时，导弹的弹道法向加速度总是小于目标的弹道法向加速度，即弹道的弹道弯曲程度比目标的弹道弯曲程度要小。

注意：目标作等速机动飞行，导弹作等速飞行时的情况只是上述结论的一个特例。

平行接近法可以用于自动瞄准导引系统，也可用于遥控制导系统中。平行接近法最主要的优点在于弹道比较平直，而其严重的缺点在于控制系统比较复杂。它要求制导系统在每时每刻都要精确测量目标及导弹的速度和前置角，并严格保持平行接近法的运动学关系(式(5.20))。实际上，由于发射偏差或干扰的存在，不可能绝对保证相对速度方向始终指向目标。



5.3 比例导引法

所谓比例导引法是指导弹在向目标接近的过程中，使导弹的速度向量 $\boldsymbol{V}$ 在空间的转动角速度正比于目标视线的转动角速度。其物理意义(如图 5.7 所示)是：设导弹和目标速度大小为常值，且目标作直线运动，I 为拦截点，即导弹和目标同时到达此点，即 $\boldsymbol{V}_{vT}=\boldsymbol{V}_v$(其中 $\boldsymbol{V}_{vT}$ 和 $\boldsymbol{V}_v$ 分别为目标和导弹垂直于视线方向的速度分量)。假如目标提前到达点 I，说明 $\boldsymbol{V}_{vT}>\boldsymbol{V}_v$，即视线角 λ 是不断减小的。要想使导弹命中目标，即与目标同时到达点 I，可以相应地通过减小导弹弹道倾角 γ 来增大 V_v，也就是说使 γ 的变化正比于 λ 的变化。

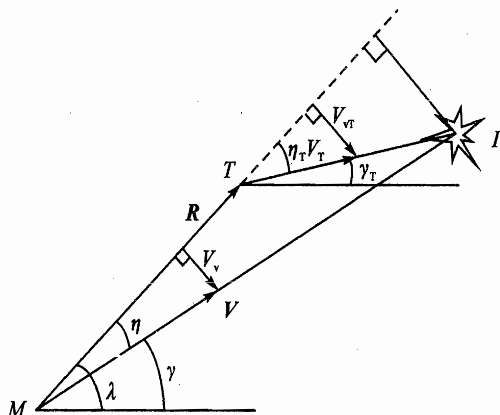


图 5.7 比例导引法示意图

由图 5.7 可见，对于导弹和目标同时在一个铅垂平面内的运动，比例导引法可以表示为

$$\dot{\gamma}=K\dot{\lambda} \tag{5.31}$$

式中 K 为比例系数，也称为导引比；$\dot{\gamma}$ 为弹道倾角的变化率((°)/s 或 rad/s)；$\dot{\lambda}$ 为目标视线的转动角速度((°)/s 或 rad/s)。

利用几何关系式 $\lambda=\gamma+\eta$，比例导引法还可以表示为

$$\dot{\eta}=(1-K)\dot{\lambda} \tag{5.32}$$

和

$$\dot{\eta}=\frac{1-K}{K}\dot{\gamma} \tag{5.33}$$

若比例系数 K 是一常数，则比例导引法还可以写成下面的积分表达形式：

$$\gamma=\gamma_0+K(\lambda-\lambda_0) \tag{5.34}$$

和

$$\eta=\eta_0+(1-K)(\lambda-\lambda_0) \tag{5.35}$$



式中 γ_0 为启控时导弹的弹道倾角；η_0 为启控时导弹的速度前置角；λ_0 为启控时的目标视线角。

按比例导引法导引导弹时，导弹和目标之间的相对运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\dot{R} &= -V\cos\eta + V_{\mathrm{T}}\cos\eta_{\mathrm{T}}\\ R\dot{\lambda} &= V\sin\eta + V_{\mathrm{T}}\sin\eta_{\mathrm{T}}\\ \lambda &= \gamma + \eta\\ \lambda &= \gamma_{\mathrm{T}} + \eta_{\mathrm{T}}\\ \dot{\gamma} &= K\dot{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{5.36}$$

下面在给定的一些特殊条件下，对比例导引弹道的运动学特性进行分析。

5.3.1 直线弹道的条件、条数

假设目标作等速直线运动，导弹作等速运动，不失一般性，设目标的弹道倾角 γ_{T} 为零，式(5.36)可改写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{R} &= -V\cos\eta + V_{\mathrm{T}}\cos\lambda\\ R\dot{\lambda} &= V\sin\eta - V_{\mathrm{T}}\sin\lambda\\ \eta &= \lambda - \gamma\\ \dot{\gamma} &= K\dot{\lambda}\end{aligned}\right\} \tag{5.37}$$

从方程式(5.37)中可以看出，在比例系数为一有限常数的条件下，要想获得一条直线弹道，即要求 $\dot{\gamma}\equiv 0$，也就是要求目标视线的转动角速度 $\dot{\lambda}\equiv 0$。从式(5.37)的第二式中可以看出，要使目标视线的转动角速度 $\dot{\lambda}$ 为零，就要使导弹速度向量的前置角 η 满足下述关系：

$$\sin\eta = \frac{V_{\mathrm{T}}}{V}\sin\lambda \tag{5.38}$$

或

$$\eta = \arcsin\left(\frac{V_{\mathrm{T}}}{V}\sin\lambda\right) \tag{5.39}$$

所以，当目标作等速直线运动，导弹作变速运动时，只要按式(5.39)选择导弹的前置角 η，就可以使导弹的飞行轨迹为一条直线弹道。

下面分析直线弹道可能存在的条数。由方程式(5.35)可将方程式(5.37)改写为

$$\left.\begin{aligned}\dot{R} &= -V\cos\eta + V_{\mathrm{T}}\cos\lambda\\ R\dot{\lambda} &= V\sin\eta - V_{\mathrm{T}}\sin\lambda\\ \eta &= \eta_0 + (1-K)(\lambda - \lambda_0)\end{aligned}\right\} \tag{5.40}$$

将上式第三式代入第二式得



$$R\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=V\sin\left[\eta_0+(1-K)(\lambda-\lambda_0)\right]-V_\mathrm{T}\sin\lambda$$

即

$$R\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=V\sin\left[\eta_0-(1-K)\lambda_0+(1-K)\lambda\right]-V_\mathrm{T}\sin\lambda \tag{5.41}$$

要想得到直线弹道，应使 $\dot{\gamma}=K\dot{\lambda}=0$，即

$$V\sin\left[\eta_0-(1-K)\lambda_0+(1-K)\lambda\right]-V_\mathrm{T}\sin\lambda=0 \tag{5.42}$$

或

$$C_\mathrm{v}\sin\left[\eta_0-(1-K)\lambda_0+(1-K)\lambda\right]-\sin\lambda=0 \tag{5.43}$$

在 $\eta_0-(1-K)\lambda_0$ 一定的情况下，即

$$\eta_0-(1-K)\lambda_0=\mathrm{const} \tag{5.44}$$

方程式(5.42)的零点 λ 所对应的就是导弹直线飞行弹道，可由作图法(见图 5.8)求出。由图 5.9 可知当 $K=3$ 时，有四条直线弹道，实际上它们是两条正弦曲线的交点。一般的规律是直线弹道的条数等于 $2|1-K|$。

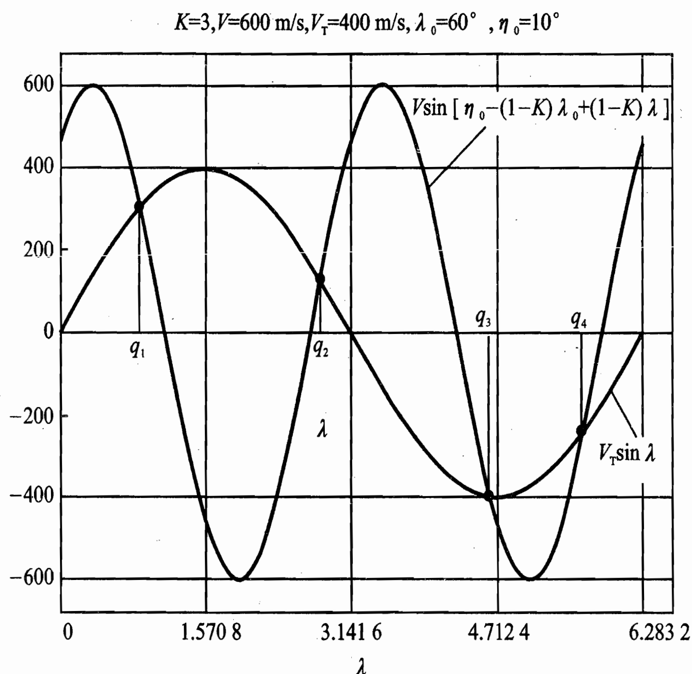


图 5.8　直线弹道图解

应该说明的是，对于每一组初值(η_0,λ_0)，其附近都有一条稳定的直线弹道，如图 5.10、图 5.11 所示。前者对应于 $\eta_0=10°$，λ_0 分别等于 $30\times i(i=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)$，而后者对应于 $\eta_0=-10°$，λ_0 取值与前者一样。从图中还可以发现，由于(η_0,λ_0)取值的不同，其附近的直线弹道形状也大不相同。这更接近实际情况，因为在导弹攻击目标开始起控时的

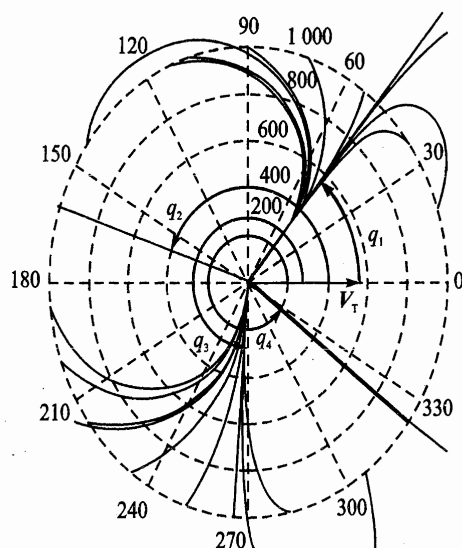


图 5.9　稳定直线弹道示意图

(η_0,λ_0)具有一定的任意性，并不按式(5.44)来组合。但当希望导弹沿所期望的直线弹道飞行时，按式(5.42)所求解出来的直线弹道及其分析会有所帮助，即已知当时的 λ_0，则便能知道应该以多大的 η_0 使导弹按设计的直线弹道飞行。

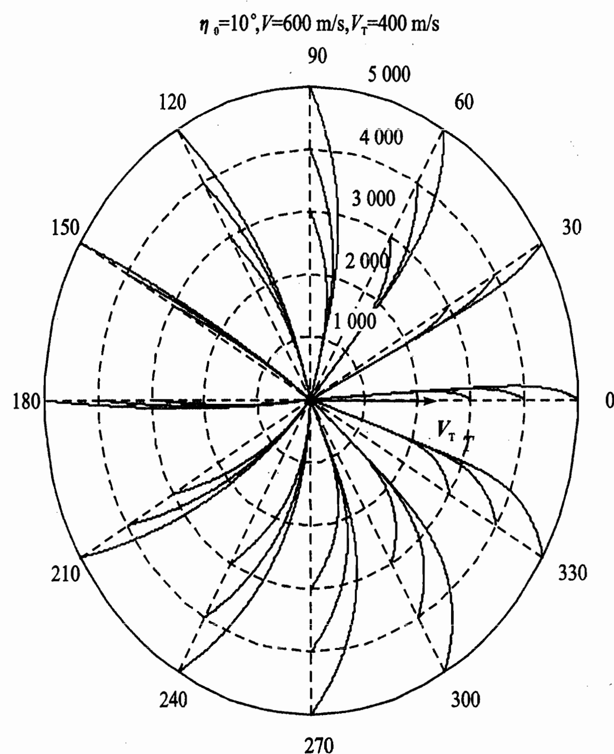


图 5.10　初值对直线弹道的影响($\eta_0=10°$)



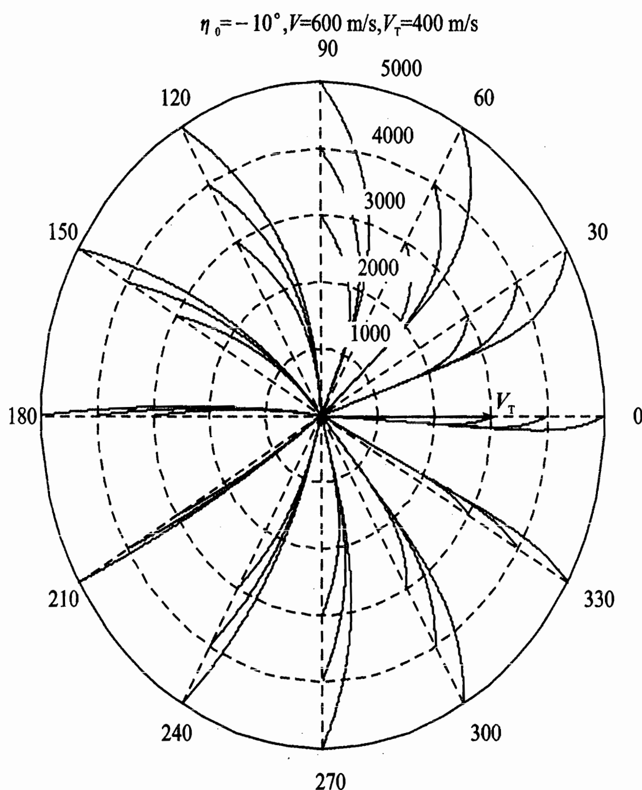


图 5.11　初值对直线弹道的影响($\eta_0=-10°$)

5.3.2　直线弹道的稳定性

导弹在飞行的过程中，由于受到各种干扰的作用，不可能每时每刻都满足直线弹道飞行的条件。若导弹受到某些干扰，使其运动偏离了原先飞行的直线弹道，形成扰动弹道，那么人们关心的是扰动弹道是收敛的还是发散的，如果是收敛的，则导弹最后又会回复到原先的直线弹道上去，否则将偏离原直线弹道越来越远。下面就讨论产生稳定直线弹道的条件。

设在目标等速直线运动和导弹等速运动的前提下，导弹的基准直线弹道为$\bar{R},\bar{\lambda},\bar{\eta}$，弹道扰动为$\Delta R=R-\bar{R},\Delta\lambda=\lambda-\bar{\lambda},\Delta\eta=\eta-\bar{\eta}$，因而

$$R=\bar{R}+\Delta R,\qquad \lambda=\bar{\lambda}+\Delta\lambda,\qquad \eta=\bar{\eta}+\Delta\eta \tag{5.45}$$

且由式(5.35)有

$$\Delta\eta=\eta-\bar{\eta}=(1-K)(\lambda-\bar{\lambda})=(1-K)\Delta\lambda \tag{5.46}$$

将式(5.45)代入方程式(5.40)第二式，得扰动方程为

$$\Delta R\dot{\bar{\lambda}}+\bar{R}\Delta\dot{\lambda}=V\cos\bar{\eta}\Delta\eta-V_{\mathrm{T}}\cos\bar{\lambda}\Delta\lambda$$

再将式(5.46)代入上式得

$$\Delta R\dot{\bar{\lambda}} + \bar{R}\Delta\dot{\lambda} = [V(1-K)\cos\bar{\eta} - V_T\cos\bar{\lambda}]\Delta\lambda$$

又由于对于基准直线弹道 $\dot{\lambda}=0$,因此得扰动方程为

$$\bar{R}\Delta\dot{\lambda} = [V(1-K)\cos\bar{\eta} - V_T\cos\bar{\lambda}]\Delta\lambda \tag{5.47}$$

构造 Liapunov 函数

$$v = \frac{1}{2}\Delta\lambda^2 \tag{5.48}$$

则有

$$\dot{v} = \Delta\lambda\Delta\dot{\lambda} = [V(1-K)\cos\bar{\eta} - V_T\cos\bar{\lambda}]\Delta\lambda^2/\bar{R} \tag{5.49}$$

若使扰动运动收敛,须 $\dot{v}<0$,即要求

$$V(1-K)\cos\bar{\eta} - V_T\cos\bar{\lambda} < 0 \tag{5.50}$$

例如图 5.9 中 ,已知 $\bar{\lambda}=\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4=49.715\ 9°,161.202\ 4°,265.837\ 6°,323.244\ 1°$;$\eta_0-(1-K)\lambda_0=130°$,则 $\bar{\eta}=130°+(1-K)\bar{\lambda}=30.568\ 2°,167.595\ 2°,-41.675\ 2°,203.511\ 8°$。对应的不等式(5.50)左端的值分别为−3.229 6,3.876 6,−2.191 5,1.949 742,所以所研究的四条弹道分别为稳定、不稳定、稳定和不稳定。一般的规律为稳定和不稳定的直线弹道数各为直线弹道数的一半,即$|1-K|$条。

从直线弹道稳定性出发还可以提出对比例系数 K 的取值范围的要求。由式(5.50)得

$$KC_v\cos\bar{\eta} > C_v\cos\bar{\eta} - \cos\bar{\lambda} \tag{5.51}$$

由于一般速比 $C_v>1$,所以 $\bar{\eta}\in[-\pi/2,\pi/2]$,因此

$$K > 1 - \frac{\cos\bar{\lambda}}{C_v\cos\bar{\eta}} \tag{5.52}$$

根据式(5.38)有

$$K > 1 - \frac{\cos\bar{\lambda}}{C_v\sqrt{\dfrac{C_v^2 - \sin^2\bar{\lambda}}{C_v^2}}}$$

即

$$K > K_{min} = 1 - \frac{\cos\bar{\lambda}}{\sqrt{(C_v + \sin\bar{\lambda})(C_v - \sin\bar{\lambda})}} \tag{5.53}$$

从图 5.12 可以看出,在速比 $C_v>1$ 的情况下,若导弹从目标后半球,即 $\lambda_0\in[1-\pi/2,\pi/2]$攻击目标,则只要选择比例系数 $K\geqslant1$,都可以获得稳定的直线弹道;从图 5.13 可以看出,若导弹从前半球,即 $\lambda_0\in[-\pi,-\pi/2]\cup[\pi/2,\pi]$攻击目标,则取 $K\geqslant2$,也可以获得稳定的直线弹道。因此只要选取 $K\geqslant2$,则能保证在 λ_0 为任意值时,都能使相应的直线弹道为稳定的直线弹道。



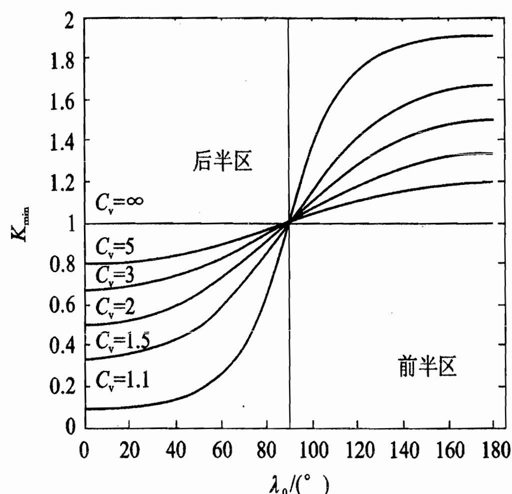


图 5.12 K_{min}与 λ_0,C_v 的关系曲线

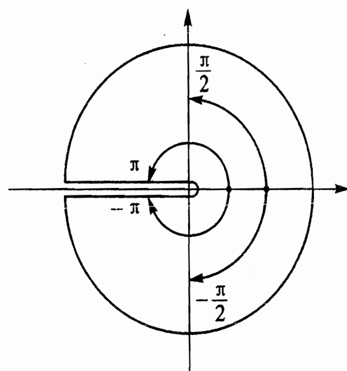


图 5.13 前后半球划分

5.3.3 弹道需用法向加速度

下面来分析目标等速直线运动、导弹等速运动情况下的弹道法向加速度特性。

如图 5.14 所示,$\boldsymbol{a}$ 为导弹法向加速度,导弹切向加速度为零,目标的法向加速度和切向加速度都为零。$\boldsymbol{a}_r$ 为相对加速度,a_{rn},a_{rt}分别为其法向和切向分量,且对于比例导引法有

$$\boldsymbol{a} = V\dot{\gamma} = KV\dot{\lambda} \tag{5.54}$$

同时,由理论力学可知,点 T 相对点 M 的加速度 $\boldsymbol{a}_r = \mathrm{d}^2\boldsymbol{R}/\mathrm{d}t^2$ 在视线长度和视线转动方向的分量为

$$\begin{bmatrix} a_{rt} \\ a_{rn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{R} - R\dot{\lambda}^2 \\ R\ddot{\lambda} + 2\dot{R}\dot{\lambda} \end{bmatrix} \tag{5.55}$$

由于

$$\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{a}_T - \boldsymbol{a} = 0 - \boldsymbol{a} \tag{5.56}$$

由图 5.14 不难得到

$$\begin{bmatrix} \ddot{R} - R\dot{\lambda}^2 \\ R\ddot{\lambda} + 2\dot{R}\dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a\sin\eta \\ -a\cos\eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V\dot{\gamma}\sin\eta \\ -V\dot{\gamma}\cos\eta \end{bmatrix} \tag{5.57}$$

如果导弹在启控时,不满足直线弹道条件,则导弹在接近目标的过程中视线就要发生转动,即 $\dot{\lambda}$ 是变化的,那么期望的是 $\dot{\lambda}$ 朝着收敛的方向变化,也就是 $\dot{\lambda}$ 越来越小直至为零,从而弹道需用法向加速度是收敛的。



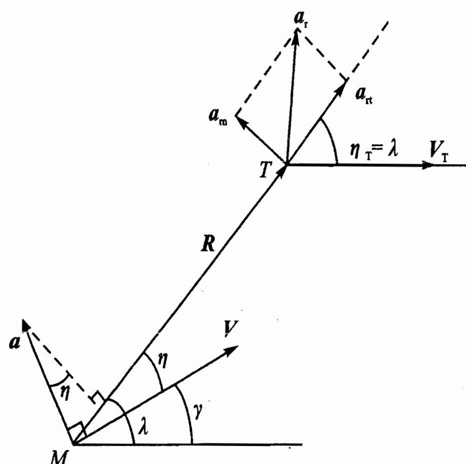


图 5.14 弹道加速度示意图

由式(5.57)的第二式得

$$R\ddot{\lambda}+2\dot{R}\dot{\lambda}=-V\dot{\gamma}\cos\eta$$

利用式(5.54),上式可改写为

$$R\ddot{\lambda}+2\dot{R}\dot{\lambda}=-KV\dot{\lambda}\cos\eta$$

即

$$R\ddot{\lambda}=-(2\dot{R}+KV\cos\eta)\dot{\lambda} \tag{5.58}$$

若 $\dot{\lambda}\ddot{\lambda}<0$,也就是

$$\dot{\lambda}\ddot{\lambda}=-(2\dot{R}+KV\cos\eta)\dot{\lambda}^2/R<0$$

此即

$$2\dot{R}+KV\cos\eta>0 \tag{5.59}$$

则 $\dot{\lambda}$ 收敛,因而弹道需用法向加速度是收敛的。

图 5.15 和图 5.16 对应于不同的比例导引系数 K 值时 $\dot{\lambda}$ 和 $\dot{\gamma}$ 的变化情况。图中,在初始时刻,若 $\dot{\lambda}$ 相同,则大的 K 值初始时刻的 $\dot{\gamma}$ 较大,说明初始段内弹道比较弯曲,而到后面又要比小的 K 值情况的弹道平直。因此在选择 K 值时应注意不要选得过大,否则可能会使在启控点附近,弹道需用法向加速度超出限制。

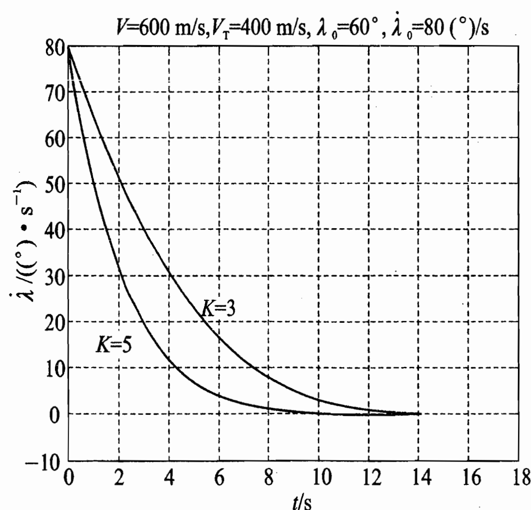


图 5.15 不同 K 值 $\dot{\lambda}$ 的变化

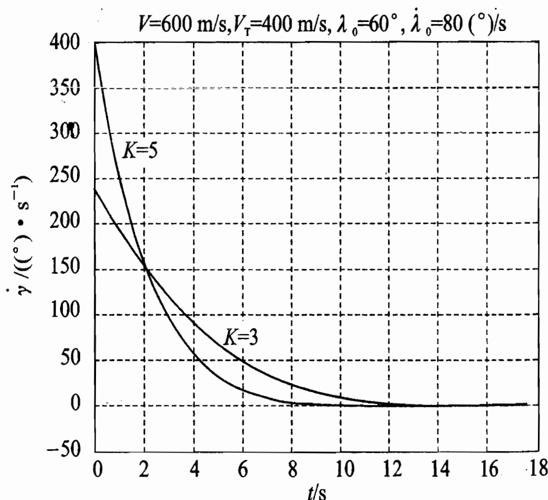


图 5.16 不同 K 值 $\dot{\gamma}$ 的变化

5.3.4 一般情况下的导引弹道特性

当目标变速机动飞行和导弹变速飞行时,图 5.6 为描述导弹和目标之间相对运动的一般



关系图。根据式(5.25)的第二式有

$$R\ddot{\lambda}+2\dot{R}\dot{\lambda}=a_{nT}\cos\eta_T-a_{tT}\sin\eta_T-a_n\cos\eta+a_t\sin\eta=$$
$$V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T-\dot{V}_T\sin\eta_T-KV\dot{\lambda}\cos\eta+\dot{V}\sin\eta$$

进一步

$$R\ddot{\lambda}=-(2\dot{R}+KV\cos\eta)\dot{\lambda}+V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T-V_T\sin\eta_T+\dot{V}\sin\eta=$$
$$-(2\dot{R}+KV\cos\eta)\left(\dot{\lambda}-\frac{V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T-\dot{V}_T\sin\eta_T+\dot{V}\sin\eta}{2\dot{R}+KV\cos\eta}\right)$$

令

$$\dot{\lambda}^*=\frac{V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T-\dot{V}_T\sin\eta_T+\dot{V}\sin\eta}{2\dot{R}+KV\cos\eta}\tag{5.60}$$

则有

$$R\ddot{\lambda}=-(2\dot{R}+KV\cos\eta)(\dot{\lambda}-\dot{\lambda}^*)\tag{5.61}$$

当目标等速直线运动、导弹等速运动时，$\dot{\lambda}^*=0$，式(5.61)变为式(5.58)。对于一般情况，令$x=\dot{\lambda}$，$x^*=\dot{\lambda}^*$，式(5.61)可改写为

$$R\dot{x}=-(2\dot{R}+KV\cos\eta)(x-x^*)$$

设$\Delta x=x-x^*$，则进一步有

$$R\Delta\dot{x}=-(2\dot{R}+KV\cos\eta)\Delta x$$

同理，若$\Delta\dot{x}\Delta x<0$，即当

$$2\dot{R}+KV\cos\eta>0$$

时，Δx是收敛到零的，即$\dot{\lambda}$是向$\dot{\lambda}^*$收敛的。根据式(5.36)第一式，上式还可以写成如下形式：

$$(K-2)V\cos\eta+2V_T\cos\eta_T>0\tag{5.62}$$

而不同K值情况下$\dot{\lambda}$和$\dot{\gamma}$的变化规律与图5.15和图5.16类似，所不同的是这里是分别收敛到$\dot{\lambda}^*$和$K\dot{\lambda}^*$。

由于$\dot{\lambda}$最终收敛到$\dot{\lambda}^*$，下面来分析一下不同形式的比例导引律对终点(命中点)的$\dot{\lambda}^*$或法向加速度的影响。比例导引律常采用下面三种形式：

$$\dot{\gamma}=K\dot{\lambda},\qquad a=KV\dot{\lambda}=K_1\dot{\lambda},\qquad a=-K_2\dot{R}\dot{\lambda}$$

其中a为法向加速度大小。对应于三种导引律的弹道终点法向加速度分别为

$$a_f=V\dot{\gamma}\Big|_{t=t_f}=\frac{KV(V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T-\dot{V}_T\sin\eta_T+\dot{V}\sin\eta)}{2\dot{R}+KV\cos\eta}\Big|_{t=t_f}$$



$$a_f = V\dot{\gamma}\Big|_{t=t_f} = \frac{K_1(V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T - \dot{V}_T\sin\eta_T + \dot{V}\sin\eta)}{2\dot{R} + KV\cos\eta}\Bigg|_{t=t_f} =$$

$$\frac{K_1(V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T - \dot{V}_T\sin\eta_T + \dot{V}\sin\eta)}{2\dot{R} + K_1\cos\eta}\Bigg|_{t=t_f}$$

$$a_f = V\dot{\gamma}\Big|_{t=t_f} = \frac{-K_2\dot{R}(V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T - \dot{V}_T\sin\eta_T + \dot{V}\sin\eta)}{2\dot{R} + KV\cos\eta}\Bigg|_{t=t_f} =$$

$$\frac{-K_2\dot{R}(V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T - \dot{V}_T\sin\eta_T + \dot{V}\sin\eta)}{2\dot{R} - K_2\dot{R}\cos\eta}\Bigg|_{t=t_f} =$$

$$\frac{V_T\dot{\gamma}_T\cos\eta_T - \dot{V}_T\sin\eta_T + \dot{V}\sin\eta}{\cos\eta - 2/K_2}\Bigg|_{t=t_f}$$

从三个加速度表达式可以看出，较之第一种比例导引法，第二种的导弹速度 V 对终点的法向加速度 a_f 的影响相对较小，但相对距离变化律 $\dot{R}$ 还存在直接影响；第三种不仅导弹速度 V 对 a_f 没有直接关系，而且相对距离变化律 $\dot{R}$ 也没有直接的关系。

5.4 三点法

三点法是遥控导引的一种方法，图 5.17 为遥控导引一般的几何描述。所谓三点法是指导弹在攻击目标的过程中，始终在制导站和目标的连线上。

如图 5.18 所示，三点法可用如下关系表示，即

$$\varepsilon = \varepsilon_T \tag{5.63}$$

由上式可以看出三点法的技术实施比较简单。比如，可以只用一部雷达同时跟踪目标和控制导弹。假设雷达波束中心线正好对准目标，则该中心线的高低角即为ε_T。如果导弹与制导站

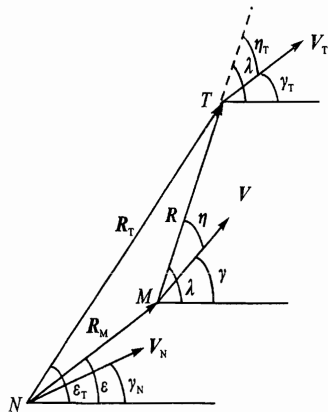


图 5.17 遥控导引几何关系图

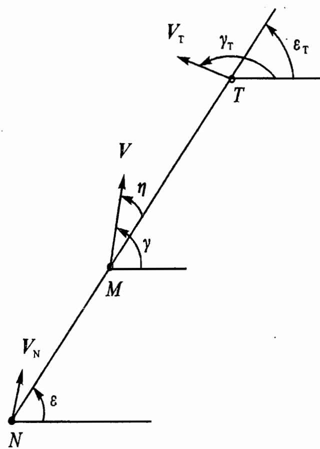


图 5.18 三点法示意图



的连线高低角偏离波束中心线，则制导系统将根据偏差量 $\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon_T$ 发出控制指令，控制导弹回到波束中心线上来。

如图 5.18 所示，按三点导引法导引导弹时，导弹和目标分别与制导站（设制导站静止不动）之间的相对运动方程为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{R}_M &= V\cos\eta \\
R_M\dot{\varepsilon} &= V\sin\eta \\
\dot{R}_T &= V_T\cos\eta_T \\
R_T\dot{\varepsilon}_T &= V_T\sin\eta_T \\
\eta &= \gamma-\varepsilon \\
\eta_T &= \gamma_T-\varepsilon_T \\
\varepsilon &= \varepsilon_T
\end{aligned}\right\} \tag{5.64}$$

其中假设导弹运动速度 V 和目标运动参数 V_T,γ_T 已知。

5.4.1 导引弹道的一般特性

将式(5.64)的第二式除以第四式得

$$\frac{R_M}{R_T}\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_T}=\frac{V}{V_T}\frac{\sin\eta}{\sin\eta_T}$$

根据三点法导引规律(式(5.64)的第七式)有 $\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_T$，因此上式变为

$$\frac{R_M}{R_T}=\frac{V}{V_T}\frac{\sin\eta}{\sin\eta_T}$$

即

$$\sin\eta=\frac{V_T}{V}\frac{R_M}{R_T}\sin\eta_T \tag{5.65}$$

由式(5.65)可知

① 在弹道初始段，$R_M/R_T\ll1$，因此，$\eta\approx0$，导弹的速度矢量近似指向目标，此时的弹道近似于纯追踪导引弹道。

② 在弹道末段，$R_M/R_T\approx1$，因此，$\sin\eta=(V_T/V)\sin\eta_T$，此时的弹道近似于平行接近导引弹道。

5.4.2 弹道需用法向加速度

1. 目标等速直线飞行和导弹等速飞行情况

如图 5.19 所示，$\gamma_T=\pi$，且

$$H=R_T\sin\varepsilon_T \tag{5.66}$$

式(5.64)可化为

$$\left.\begin{aligned}&\dot{R}_{\mathrm{M}}=V\cos\eta\\&R_{\mathrm{M}}\dot{\varepsilon}=V\sin\eta\\&\dot{R}_{\mathrm{T}}=V_{\mathrm{T}}\cos\eta_{\mathrm{T}}\\&R_{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}=V_{\mathrm{T}}\sin\eta_{\mathrm{T}}\\&\eta=\gamma-\varepsilon\\&\varepsilon=\varepsilon_{\mathrm{T}}\end{aligned}\right\}\tag{5.67}$$

图 5.19 目标等速直线运动时的三点法

由图 5.19 可知

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2}=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}\\&\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t^2}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.68}$$

其在垂直视线方向的投影形式为

$$\left.\begin{aligned}&R_{\mathrm{M}}\ddot{\varepsilon}+2\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{\varepsilon}=a_{\mathrm{n}}\cos\eta=V\dot{\gamma}\cos\eta\\&R_{\mathrm{T}}\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}+2\dot{R}_{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}=0\end{aligned}\right\}\tag{5.69}$$

由式(5.67)第一式,式(5.69)的第一式可改写为

$$R_{\mathrm{M}}\ddot{\varepsilon}+2\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{\varepsilon}=\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{\gamma}$$

由此得

$$\dot{\gamma}=2\dot{\varepsilon}+\frac{R_{\mathrm{M}}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}}\ddot{\varepsilon}\tag{5.70}$$

根据式(5.67)的第三式及式(5.66)

$$\dot{\varepsilon}=\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}=\frac{V_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}\sin\varepsilon_{\mathrm{T}}=\frac{V_{\mathrm{T}}}{H}\sin^2\varepsilon_{\mathrm{T}}\tag{5.71}$$

由式(5.67)的第四式,式(5.69)的第二式可化为

$$\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}=\frac{2\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}V_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}\cos\varepsilon_{\mathrm{T}}$$

再进一步根据式(5.66)得

$$\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}=\frac{V_{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}}{H}\sin2\varepsilon_{\mathrm{T}}\tag{5.72}$$

又由式(5.67)的第一和第二式可得

$$\dot{R}_{\mathrm{M}}=V\cos\eta=V\sqrt{1-\sin^2\eta}=V\sqrt{1-\left(\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{\varepsilon}}{V}\right)^2}$$

将式(5.71)代入得



$$\dot{R}_{M} = \frac{V}{pH}\sqrt{p^{2}H^{2} - R_{M}^{2}\sin^{4}\varepsilon_{T}} \tag{5.73}$$

将式(5.71),式(5.72)和式(5.73)代入式(5.70),最后得

$$\dot{\gamma} = \left(2 + \frac{R_{M}\sin 2\varepsilon_{T}}{\sqrt{p^{2}H^{2} - R_{M}^{2}\sin^{4}\varepsilon_{T}}}\right)\frac{V_{T}}{H}\sin^{2}\varepsilon_{T} \tag{5.74}$$

根据式(5.66),上式也可以表示成如下形式:

$$\dot{\gamma} = 2\left[1 + \frac{\cos\varepsilon_{T}}{\sqrt{(pR_{T}/R_{M})^{2} - \sin^{2}\varepsilon_{T}}}\right]\frac{V_{T}}{H}\sin^{2}\varepsilon_{T} \tag{5.75}$$

根据式(5.75),可画出导弹弹道需用法向加速度大小 $a_{n} = V\dot{\gamma}$ 在空域 $\{x, y\} \in \{[-30\ \text{km}, 30\ \text{km}], [0\ \text{km}, 10\ \text{km}]\}$ 内的等值线,结果见图 5.20。

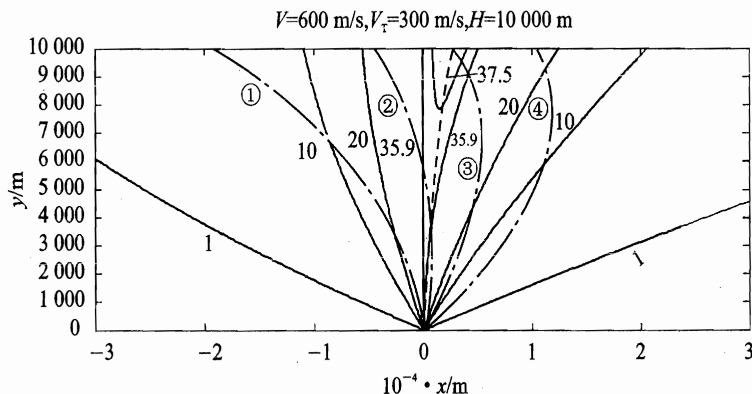


图 5.20 等法向加速度曲线

图 5.20 中,虚线是各等法向加速度曲线最低点的连线,表示法向加速度由小到大的变化趋势,沿此虚线越往上法向加速度越大,因此,又称为主梯度线。图中各等值线(实线)分别表示加速度大小为 1 m/s², 10 m/s², 20 m/s², 35.9 m/s² 和 37.5 m/s²。

图中点画线代表导弹弹道。以主梯度线为界可将弹道分为三组,即左侧弹道(弹道①)、右侧弹道(弹道③,④)和与主梯度线相交弹道(弹道②)。各弹道特点如下:

① 左侧弹道(尾追弹道):弹道法向加速度越来越小。法向加速度在命中点最小,在发射点最大,其最大值为

$$a_{n.\max} = \frac{2VV_{T}\sin^{2}\varepsilon_{0}}{H} \tag{5.76}$$

当初始发射高低角 $\varepsilon_{0} = \pi/2$ 时,即目标飞临正上空时发射导弹,上式达到最大值

$$a_{n.\max} = \frac{2VV_{T}}{H} \tag{5.77}$$

② 右侧弹道(迎击弹道):弹道法向加速度越来越大。法向加速度在发射点最小,在命中点最大,其最大值为

$$a_{\mathrm{n.max}}=\left(2+\frac{R_{\mathrm{Mf}}\sin 2\varepsilon_{\mathrm{f}}}{\sqrt{p^2H^2-R_{\mathrm{Mf}}^2\sin^4\varepsilon_{\mathrm{f}}}}\right)\frac{V_{\mathrm{T}}}{H}\sin^2\varepsilon_{\mathrm{f}} \tag{5.78}$$

其中，ε_{f}，R_{Mf}为导弹在命中点处的高低角和斜距。

③ 相交弹道：弹道法向加速度由小变大，再由大变小。法向加速度最大值出现在弹道中段的某一点上。

2. 目标变速机动飞行和导弹变速飞行情况

由图 5.21 有

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_{\mathrm{M}}}{\mathrm{d}t^2}&=\boldsymbol{a}_{\mathrm{n}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{t}}\\ \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{R}_{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}t^2}&=\boldsymbol{a}_{\mathrm{nT}}+\boldsymbol{a}_{\mathrm{tT}}\end{aligned}\right\} \tag{5.79}$$

上式第一式在垂直视线方向的投影形式为

$$R_{\mathrm{M}}\ddot{\varepsilon}+2\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{\varepsilon}=a_{\mathrm{n}}\cos\eta+a_{\mathrm{t}}\sin\eta=V\dot{\gamma}\cos\eta+V\sin\eta$$

由式(5.67)的第一式和第二式得

$$R_{\mathrm{M}}\ddot{\varepsilon}+2\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{\varepsilon}=\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{\gamma}+\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{V}}{V}\dot{\varepsilon} \tag{5.80}$$

或

$$\dot{\gamma}=\left(2-\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{V}}{V\dot{R}_{\mathrm{M}}}\right)\dot{\varepsilon}+\frac{R_{\mathrm{M}}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}}\ddot{\varepsilon} \tag{5.81}$$

同理，对目标有

$$R_{\mathrm{T}}\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}+2\dot{R}_{\mathrm{T}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}+\dot{R}_{\mathrm{T}}\dot{\gamma}_{\mathrm{T}}+\frac{R_{\mathrm{T}}\dot{V}_{\mathrm{T}}}{V_{\mathrm{T}}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \tag{5.82}$$

对于三点法，理论上 $\ddot{\varepsilon}=\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}$。因此根据式(5.82)，式(5.81)可化为

$$\dot{\gamma}=\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{R}_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}\dot{R}_{\mathrm{M}}}\dot{\gamma}_{\mathrm{T}}+\left(2-\frac{2R_{\mathrm{M}}\dot{R}_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}\dot{R}_{\mathrm{M}}}-\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{V}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}V}+\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{V}_{\mathrm{T}}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}V_{\mathrm{T}}}\right)\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \tag{5.83}$$

或者

$$\dot{\gamma}=\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{R}_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}\dot{R}_{\mathrm{M}}}\dot{\gamma}_{\mathrm{T}}+2\left(1-\frac{R_{\mathrm{M}}\dot{R}_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}\dot{R}_{\mathrm{M}}}\right)\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}+\left(\frac{\dot{V}_{\mathrm{T}}}{V_{\mathrm{T}}}-\frac{\dot{V}}{V}\right)\frac{R_{\mathrm{M}}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}}\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \tag{5.84}$$

在命中点 $R_{\mathrm{M}}=R_{\mathrm{T}}$，由式(5.67)的一式和二式有

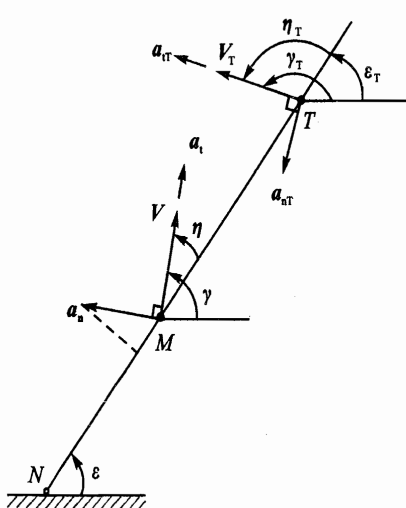


图 5.21　一般情况时的三点法



$$\dot{\gamma}_f = \frac{\dot{R}_T}{\dot{R}_M}\dot{\gamma}_T + 2\left(1-\frac{\dot{R}_T}{\dot{R}_M}\right)\dot{\varepsilon}_T + \left(\frac{\dot{V}_T}{V_T}-\frac{\dot{V}}{V}\right)\tan(\gamma-\varepsilon_T) \tag{5.85}$$

对应的导弹弹道法向加速度为

$$a_{nf} = \left[\frac{\dot{R}_T}{\dot{R}_M}V\dot{\gamma}_T + 2\left(1-\frac{\dot{R}_T}{\dot{R}_M}\right)V\dot{\varepsilon}_T + \left(\frac{\dot{V}_T}{V_T}-\frac{\dot{V}}{V}\right)V\tan(\gamma\text{-}\varepsilon_T)\right]_{t=t_f} \tag{5.86}$$

从上式可以看出，三点法导引时，在命中点处，导弹的弹道法向加速度与导弹切向加速度 $\dot{V}$、目标切向加速度 $\dot{V}_T$ 和目标法向加速度参数 $\dot{\gamma}_T$ 有关。

5.5　角度法

三点法的弹道比较弯曲，特别是在命中点处（迎击时）弹道尤为弯曲，法向加速度达最大值。这容易引起较大的动态误差，且不易形成补偿信号。为了克服法向加速度过大的缺点，使弹道尽量平直一些，特别是在弹道末段，需要寻求其他的导引方法。角度法就是其中的一种方法。

角度法也称前置量法，或矫直系数法，是指在飞行过程中，制导站与导弹的连线始终超前于制导站与目标的连线。如图 5.22 所示，其中

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_T \tag{5.87}$$

称为前置角。在飞行过程中，可让前置角按某种规律变化，而且为了命中目标，在命中点须使 $\Delta\varepsilon=0$。

为了实现角度法，需要使用双波束导引。其中一根波束跟踪目标，另一根波束跟踪导弹。

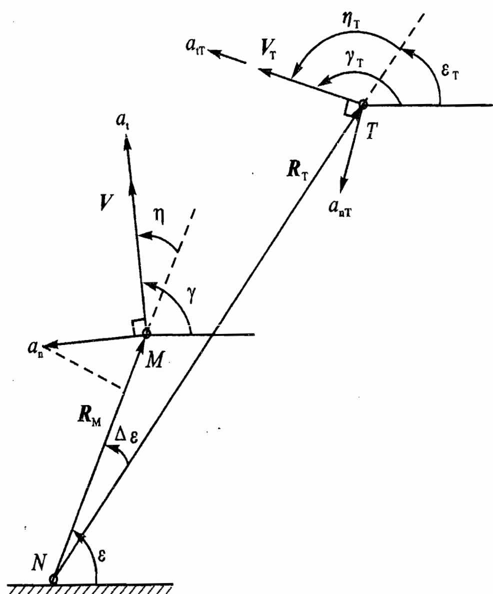


图 5.22　前置量法

5.5.1　前置量法(矫直系数法)

根据导弹命中目标的条件，即 $R=|\boldsymbol{R}_T-\boldsymbol{R}_M|\to 0$，应使 $\Delta\varepsilon\to 0$。因此可以假设 $\Delta\varepsilon$ 具有如下形式：

$$\Delta\varepsilon = A_\varepsilon R$$

根据该式有

$$\varepsilon = \varepsilon_T + A_\varepsilon R \tag{5.88}$$

对上式求导有

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_{T} + \dot{A}_{\varepsilon}R + A_{\varepsilon}\dot{R} \tag{5.89}$$

为了使弹道在命中点处更平直一些，还可进一步取

$$A_{\varepsilon} = -\frac{\dot{\varepsilon}_{T}}{\dot{R}} \tag{5.90}$$

使得当 $R\to 0$ 时，$\dot{\varepsilon}\to 0$。将式(5.90)代入式(5.88)，便得到前置量法的导引关系式

$$\varepsilon = \varepsilon_{T} - \frac{\dot{\varepsilon}_{T}}{\dot{R}}R \tag{5.91}$$

上式对时间的一阶导数为

$$\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{T}\ddot{R}}{\dot{R}^{2}} - \frac{\ddot{\varepsilon}_{T}}{\dot{R}}\right)R \tag{5.92}$$

二阶导数为

$$\ddot{\varepsilon} = \frac{\dot{\varepsilon}_{T}\ddot{R}}{\dot{R}} - \ddot{\varepsilon}_{T} + \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{\varepsilon}_{T}\ddot{R}}{\dot{R}^{2}} - \frac{\ddot{\varepsilon}_{T}}{\dot{R}}\right)R \tag{5.93}$$

在命中点处

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\varepsilon}_{f} = 0 \\ &\ddot{\varepsilon}_{f} = \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{T}\ddot{R}}{\dot{R}} - \ddot{\varepsilon}_{T}\right)_{t=t_{f}} \end{aligned}\right\} \tag{5.94}$$

其中利用式(5.82)$\ddot{\varepsilon}_{Tf}$可表示为

$$\ddot{\varepsilon}_{Tf} = \frac{1}{R_{T}}\left(-2\dot{R}_{T}\dot{\varepsilon}_{T} + \frac{R_{T}\dot{V}_{T}}{V_{T}}\dot{\varepsilon}_{T} + \dot{R}_{T}\dot{\gamma}_{T}\right)_{t=t_{f}} \tag{5.95}$$

在命中点处，将上式及式(5.94)代入式(5.81)，并且进一步利用式(5.67)的第三、第四式可得

$$\dot{\gamma}_{f} = \left[\left(2\frac{\dot{R}_{T}}{\dot{R}_{M}} + \frac{R_{M}\ddot{R}}{\dot{R}_{M}\dot{R}}\right)\dot{\varepsilon}_{T} - \frac{\dot{V}_{T}}{\dot{R}_{M}}\sin(\gamma_{T} - \varepsilon_{T}) - \frac{\dot{R}_{T}}{\dot{R}_{M}}\dot{\gamma}_{T}\right]_{t=t_{f}} \tag{5.96}$$

相应的导弹弹道法向加速度为

$$a_{nf} = \left[\left(2\frac{\dot{R}_{T}}{\dot{R}_{M}} + \frac{R_{M}\ddot{R}}{\dot{R}_{M}\dot{R}}\right)V\dot{\varepsilon}_{T} - \frac{\dot{V}_{T}}{\dot{R}_{M}}V\sin(\gamma_{T} - \varepsilon_{T}) - \frac{\dot{R}_{T}}{\dot{R}_{M}}V\dot{\gamma}_{T}\right]_{t=t_{f}} \tag{5.97}$$

从式(5.97)可以看出，前置量法导引时，在命中点处，导弹的弹道法向加速度与导弹切向加速度 $\dot{V}$ 大小无关，但与目标机动参数，即目标切向加速度 $\dot{V}_{T}$、目标法向加速度参数 $\dot{\gamma}_{T}$ 有直接关系。同时，还可以发现，同样的目标机动 $\dot{\gamma}_{T}$，在三点法中的影响与在前置量中的影响正好相反。



5.5.2 半前置量法(半矫直系数法)

比较式(5.86)和式(5.97)可以看出,弹道法向加速度都受到目标机动的影响,同时目标机动对法向加速度的作用在两种导引律中相反。这说明,矫直系数法可能“矫直”过度。因此引入一个大于零小于1的系数 C_ε,对矫直进行修正。导引关系式由式(5.91)修正为

$$\varepsilon = \varepsilon_{\mathrm{T}} - C_\varepsilon \frac{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}}{\dot{R}} R \tag{5.98}$$

显然当 $C_\varepsilon=0$ 时,为三点法;当 $C_\varepsilon=1$ 时,为前置量法。对上式求一阶和二阶导数得

$$\dot{\varepsilon} = (1 - C_\varepsilon)\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} + C_\varepsilon \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \frac{\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}}{\dot{R}} \right) R \tag{5.99}$$

$$\ddot{\varepsilon} = (1 - 2C_\varepsilon)\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} + C_\varepsilon \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} \dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} + C_\varepsilon \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}\ddot{R}}{\dot{R}^2} - \frac{\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}}}{\dot{R}} \right) R \tag{5.100}$$

在命中点得

$$\dot{\varepsilon}_{\mathrm{f}} = \left[(1 - C_\varepsilon)\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \right]_{t=t_{\mathrm{f}}} \tag{5.101}$$

$$\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{f}} = \left[(1 - 2C_\varepsilon)\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} + C_\varepsilon \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} \dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \right]_{t=t_{\mathrm{f}}} \tag{5.102}$$

将式(5.101)和式(5.102)代入式(5.81)得

$$\dot{\gamma}_{\mathrm{f}} = \left\{ \left(2 - \frac{R_{\mathrm{M}}\dot{V}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}V} \right)(1 - C_\varepsilon)\dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} + \frac{R_{\mathrm{M}}}{\dot{R}_{\mathrm{M}}} \left[(1 - 2C_\varepsilon)\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} + C_\varepsilon \frac{\ddot{R}}{\dot{R}} \dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \right] \right\}_{t=t_{\mathrm{f}}} \tag{5.103}$$

由式(5.95)可知,$\ddot{\varepsilon}_{\mathrm{Tf}}$含有目标切向加速度和法向加速度。因此,只要在上式中令 $C_\varepsilon=1/2$,就可以使命中点处的弹道法向加速度的大小与目标机动没有直接关系。此时,对应的导引方法称为半前置量法或半矫直系数法。命中点处的导弹弹道法向加速度为

$$a_{\mathrm{nf}} = \left[\left(1 - \frac{R_{\mathrm{M}}\dot{V}}{2\dot{R}_{\mathrm{M}}V} + \frac{R_{\mathrm{M}}\ddot{R}}{2\dot{R}_{\mathrm{M}}\dot{R}} \right) V \dot{\varepsilon}_{\mathrm{T}} \right]_{t=t_{\mathrm{f}}} \tag{5.104}$$

最后,对三种导引方法作一个小结:从弹道特性来看,三点法弹道最弯曲,前置量法弹道最平直。在命中点处,从目标机动对导弹弹道法向加速度的影响来看,半前置量法最具优势,其制导误差较小。但由于前置量法(或半前置量法)需要测量更多的信息(如导弹和目标的斜距、高低角及其导数等参数)来形成制导指令,因此制导系统结构较为复杂,且技术实施比较困难。特别是当目标带有积极干扰源时,雷达无法进行测距,因而无法求出 R,$\dot{R}$ 等参数,也就无法获得高低角的前置量 $\Delta\varepsilon$,前置量法(或半前置量法)便无法实现。

5.6 选择导引方法的一般原则

显然，不同的导引规律的弹道特性是不同的。在选择导引规律时，需要从导弹的飞行性能、作战空域、技术实施、导引精度、制导设备和战术使用等方面进行综合考虑。导引律的选择原则可归纳为以下几点。

1. 弹道需用法向加速度小

在导引飞行段内，特别是命中点附近，弹道上的需用法向加速度要小。如果要使导弹能始终沿着理论弹道飞行，就必须使弹道上各点的需用法向加速度均小于导弹的可用法向加速度。考虑到导弹在实际飞行过程中还存在着各种干扰，那么，在设计导引律时还应考虑留有一定的法向加速度余量，即

$$a_{n.a} \gg a_n + \Delta a_{n1} + \Delta a_{n2} + \Delta a_{n3} \tag{5.105}$$

式中 $a_{n.a}$为导弹的可用法向加速度；a_n 为按某一导引规律飞行时，弹道上的需用法向加速度；Δa_{n1}为导弹为消除随机干扰所需的法向加速度余量；Δa_{n2}为消除系统误差及导弹波动等因素所需的法向加速度余量；Δa_{n3}为消除导弹纵向加速度的影响所需的法向加速度余量。

显然，如果$|a_n|$大，就要求$|a_{n.a}|$大。对于用气动升力面进行控制的导弹来讲，可用法向加速度 $a_{n.a}$的增加，就意味着要增加升力面的面积，进而会增加导弹的结构重量。这显然是不利的。

同时，导引误差是与导弹飞行时的弹道法向加速度成正比的。所以，为了提高导引精度也需要选择需用法向加速度$|a_n|$较小的导引规律。

此外，弹道的需用法向加速度越大，弹道就越弯曲。这会增加导弹的攻击时间和航程，从而缩小了导弹的作战空域，这显然也是不利的。

2. 作战空域大

应能在尽可能大的作战空域内摧毁目标。空中活动目标的高度和速度都可能在很大范围内发生变化。因此在选择导引规律时应该考虑目标参数的变化范围，尽量使导弹能在较大的空域内攻击目标。如地空导弹对目标不仅可以进行迎击，而且还能尾追和侧击。空空导弹能进行越肩发射，可对目标实施全向攻击。

为了获得大的作战空域，单一的一种导引律通常已经不能满足作战需要，而需要将不同的导引律组合起来使用，即采用复合导引。

3. 抗目标机动性好

通常在导弹脱靶量中，目标机动所占的比例是最大的。有些导引律由于包含了对目标机动影响的补偿项，而具有较好的抗目标机动性能。比如半矫直系数法，由于弹道上的需用法向加速度与目标的机动飞行参数$(\dot{V}_T,\dot{\gamma}_T)$无直接关系，因而可减小动态误差，提高导引精度。



4. 抗干扰性能好

目标为了逃避导弹的攻击，常释放干扰来破坏导弹的跟踪，进而影响导引信号的产生。因此选择的导引规律应尽可能不受目标干扰的影响。比如当目标带有积极干扰源时，雷达无法进行测距，因而无法求出 ΔR 和 $\Delta\dot{R}$，也就无法确定高低角的前置量 $\Delta\varepsilon_T$，故矫直系数法和半矫直系数法导引规律都无法实现。而三点法导引律并不需要测得这些参数，因此说三点法的抗干扰性强，比前两者要好。

5. 技术简易可行

导引方法在技术上应简易可行。这是指：应使导引规律所需的参数尽量少，并且不应使计算装置过于庞杂。此外，还要注意保证导引规律中所需参数能在导引系统中比较简单、可靠地获得。

5.7　攻击区

上述分析中，将重点放在命中点条件上。实际上要使导弹能命中目标，其发射点条件也是不能任意的，只有在相对于目标的某一特定区域内发射导弹才可能命中目标。这一特定区域称为理论发射区，又称攻击区。对不同的导弹，限制其攻击区的条件也不同，为了叙述上的方便，这里仅以“响尾蛇”空空导弹为例加以介绍。下面是限制攻击区的主要因素。

1. 导引头截获目标的距离限制

“响尾蛇”导弹红外导引头主要接收敌机发动机的红外线辐射，因此有较明显的方向性。对某型飞行器，导引头截获距离示意图如图5.23所示。只有当导引头截获目标以后，也就是说只有在截获区内才具有发射导弹的最起码的条件。

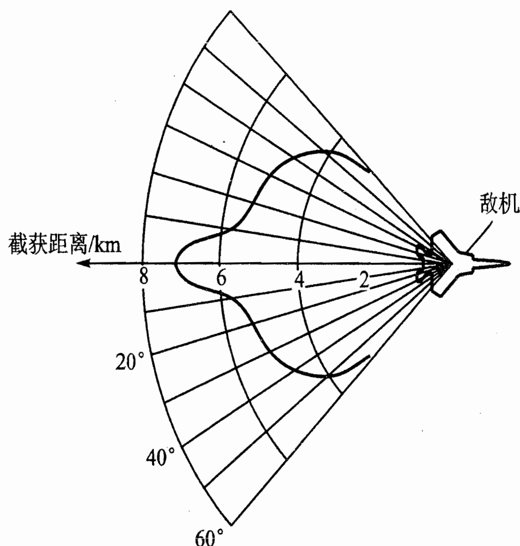


图 5.23　导引头截获距离示意图

2. 最大能源工作时间限制

即使在导引头截获区内发射导弹，若导弹飞行时间（到命中目标）大于导弹控制系统能源工作时间，那么在这种情况下，命中目标以前导弹已经失去控制，因而不可能命中目标。故最大发射距离应小于能源最大工作时间所对应的距离。

3. 最大、最小相对速度限制

根据参考文献[1]，由引信和战斗部的配合，要求导弹与目标之间的相对速度为 $150\ \text{m/s} \leqslant V_r \leqslant 800\ \text{m/s}$。虽然弹道计算要求导弹严格命中目标，但由于实际参数与设计参数



的偏差、各种随机干扰及动态误差，往往不可能直接命中，而是有一定的脱靶距离。在有脱靶的情况下，只有相对速度 V_r 满足要求，引信和战斗部才能有较好的配合。“响尾蛇”导弹红外光学引信，由 45°～75°两通道信号经过的时间间隔，即图 5.24 由 $A \sim B$ 所经过的时间间隔 Δt 不得大于 35 ms。当 $\Delta t \leqslant 20$ ms 时引信能可靠工作。其对最小相对速度要求由下式确定，即

$$V_r = \frac{R}{\Delta t}(\cot 45° - \cot 75°) \tag{5.106}$$

式中 R 为脱靶距离。技术条件规定 $V_r \geqslant 150$ m/s，这相当于 $R \leqslant 4$ m 的情况下引信能可靠工作。若发射距离不小于由此最小 V_r 所对应的最大发射距离，即使其他条件都满足，仍不能摧毁目标。

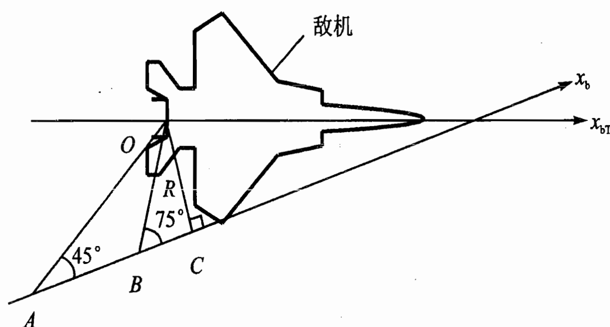


图 5.24 “响尾蛇”导弹红外引信起爆条件

此外，只有 $V_r \leqslant 800$ m/s，战斗部与目标要害部位之间才能有较好的配合。由此最大相对速度 V_r 确定一个最小发射距离。若发射距离小于此最小发射距离，则 V_r 就要大于 800 m/s，使战斗部与目标要害部位之间不能有较好的配合，因而不能摧毁目标。

4. 引信解除保险所需时间的限制

要摧毁目标，则必须引信能正常工作，首先要求引信解除保险。“响尾蛇”导弹在发射后 1.8～4.0 s 后引信才能解除保险，正常工作。为可靠起见，取引信解除保险所需时间为 $t=4$ s。由此时间可确定一个导弹最小发射距离。只有大于此距离发射导弹，引信才能工作，达到摧毁目标的目的。

5. 导弹可用过载 n_a 的限制

由于沿纯追踪方向发射导弹，发射时导弹的轴线方向亦即导弹的速度方向指向目标。在一定投影比（或进入角 λ_0）的情况下，若发射距离较小，就要求导弹作大机动飞行，才能跟踪目标。由于导弹可用过载是有限的，故由导弹可用过载可确定出一条边界，即对应一个进入角 q_0 有一个最小发射距离，发射导弹应大于此最小发射距离，否则将不能命中目标。

6. 导引头最大跟踪角速度的限制

由于导引头始终对准目标，所以导引头角速度即目标线的转动角速度 $\dot{q}$ 在一定进入角 q_0 的情况下，发射距离越小，目标视线转动角速度越大，因而要求导引头的转动角速度越大。当发射距离小于某一值以后，目标视线转动角速度将超过导引头最大跟踪角速度，此时导弹就要



丢失目标，因而不能实现控制飞行。“响尾蛇”导弹的导引头技术指标规定跟踪角速度为不小于 5 (°)/s。由 $\dot{\lambda}_{max}=5$ (°)/s 可确定一个最小发射距离，只有大于此最小距离发射，导弹才能实现正常跟踪。

7. 导引头最大离轴角的限制

因为导引头轴线总是指向目标的，导引头离轴角即为弹体纵轴与目标线的夹角。由图 5.25 可见，离轴角 μ 为

$$\mu=\eta-\beta \tag{5.107}$$

“响尾蛇”导弹的 $\mu_{max}=25°$，由此 μ_{max} 可确定一条边界，只有在此边界限制范围内发射，才能使导弹正常跟踪目标。

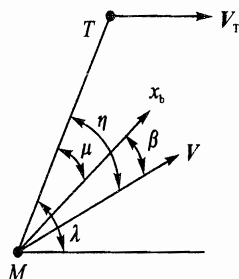


图 5.25 离轴角示意图

当然还有其他一些因素影响导弹的发射区域，如载机安全等要求，在此就不一一列举了。图 5.26 为空空导弹某高度上的攻击区的典型形状。

在纯追踪发射的基础之上，又发展了离轴发射。所谓离轴发射，即当导引头捕获目标后，载机不按纯追踪方向跟踪目标，而是在某一允许范围内的前置方向(见图 5.25)或后置方向飞行，此时导引头仍然要跟踪目标，因此导引头轴线相对弹体纵轴有一个偏转角，即离轴角 μ。这种发射方式称为前置离轴发射或后置离轴发射。

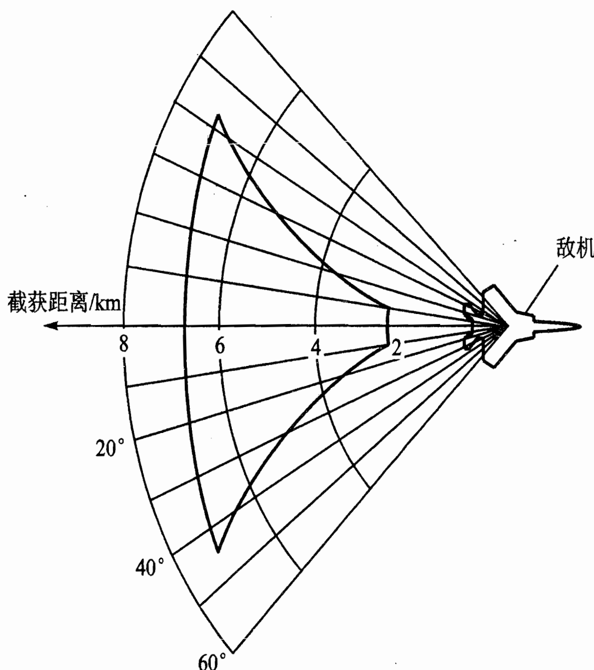


图 5.26 典型攻击区形状

离轴发射中有一种是按特定的前置角瞬时命中点方向发射的方式，称为拦射。当导弹速度相对于瞬时命中点方向为前置或后置时所进行的发射通常又称为快速拦射。



对于离轴发射的空空导弹，影响命中目标的因素大致相同，所不同的是在拦射攻击时可用过载限制转化成允许发射误差的限制。

随着技术的进步，特别是导引头探测技术的发展，导弹不再局限在目标尾后的一个喇叭管状的区域内才能攻击目标，而是可以在目标的所有方位，或者几乎所有的方位实施攻击，并且机头无须始终对准目标，即所谓的"发射前截获全向攻击"，如图 5.27 所示。这种全向攻击只是指从目标周围的各个方向(即进入角 0°～360°)都可以攻击目标。

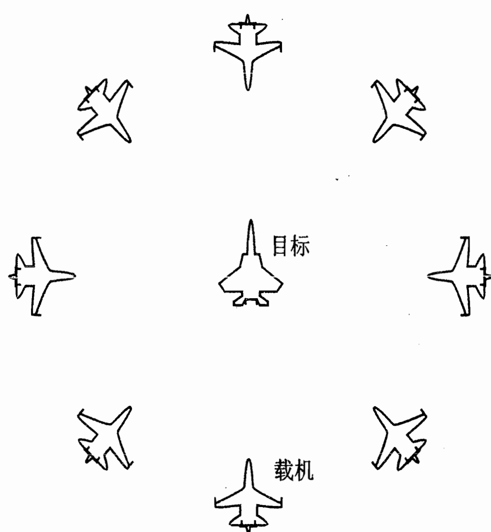


图 5.27　发射前截获全向攻击

"全向攻击"这一概念刚一出现时，是指载机在与目标处于基本相等的高度上所进行的攻击。后来随着导弹性能的不断改善，全向攻击的范围已不仅仅限于平面的 360°内，而且可以对以目标为中心的部分球形区域的各个方向进行攻击，即载机既可向上打仰视的目标，又可向下打低空飞行的目标。

全向攻击较之以往的尾追攻击方式有了很大的飞跃，但是仍然没有从根本上摆脱使目标处于载机前方的限制。为了满足这些条件，载机就不得不作很大的机动进行占位。

随着导弹性能的不断提高，"全向攻击"概念又有了新的含义。攻击方式从"以目标为中心"转变为"以载机为中心"。这一攻击方式可使载机能够攻击其周围各个方位的目标，如图 5.28 所示。在攻击载机后半球目标时，一般是发射后截获目标的，因而这里又称其为"发射后截获全向攻击"。

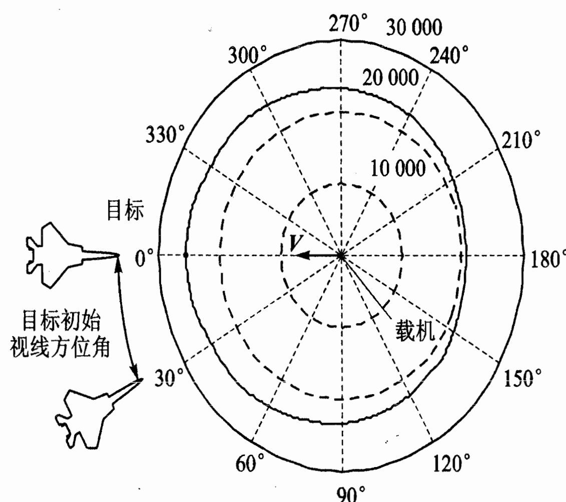


图 5.28　发射后截获全向攻击区



复习思考题

5.1　导引规律运动学分析的假设条件是什么?

5.2　导引弹道的特点是什么?

5.3　写出平面内的飞行器相对运动的方程组。

5.4　什么是相对弹道、绝对弹道?

5.5　已知导弹和目标的绝对弹道,试给出相对运动参数的表达式。

5.6　什么是平行接近法? 它有哪些优缺点?

5.7　平行接近法的绝对弹道是否是直线弹道? 为什么? 在什么情况下是直线弹道?

5.8　要保持飞行器-目标线在空间的方位不变,应满足什么条件? 其含义是什么?

5.9　什么是比例导引法? 其物理解释是什么?

5.10　研究比例导引法下的直线弹道条件有什么意义?

5.11　试从三点法的等法向加速度曲线分析三点法的弹道特性。

5.12　写出三点法、矫直系数法和半矫直系数法的导引关系式,并解释各自的物理含义。

5.13　比较三点法、矫直系数法和半矫直系数法的优缺点。

5.14　选择导引方法时要考虑的因素有哪些?

5.15　什么是攻击区? 限制攻击区的条件有哪些?

第 6 章　刚性飞行器运动方程

前面五章讨论了飞机的飞行性能和导弹的轨迹特性问题，从本章开始，将转到飞行力学中的另一类重要问题，即飞行器的稳定性和操纵性。所谓稳定性，简言之是指飞行器在受到外界瞬时扰动后，自动地恢复其原来平衡状态的能力。而操纵性则指飞行器对驾驶员操纵或舵面指令输入的响应，即从一种飞行状态过渡到另一种飞行状态的能力。从力学角度来看，无论稳定性或操纵性，都是研究飞行器在外力和力矩作用下，它的各个运动参数随时间变化的特性。因此在分析之前，首先必须建立飞行器的运动方程。

一般来说，飞行器运动特性会受到各种因素的影响，例如机体的弹性变形、飞行器上的旋转部件、重量随时间的变化、地球的曲率和自转、大气的运动等。如果把所有这些因素都考虑进去，将会使方程的推导变得非常复杂，并且很难进行解析处理。因此，为了简化，本章在推导运动方程时，假设地球为平面大地，忽略了地球的曲率和自转；飞行器为刚体，不考虑机体弹性变形和旋转部件的影响；大气为静止的标准大气，不考虑风的影响等。当然，在飞行器的基本运动规律揭示认识后，还是需要深入探讨这些被忽略的因素对飞行器运动的影响，以保证设计的飞行器安全飞行。但这部分内容由于涉及的知识面较多，本书不作介绍，读者需要时可参考有关文献资料。

飞行器作为刚体在空中的运动，一般有六个自由度，相应地有六个动力学方程，其中三个用来描述质心的运动，还有三个描述飞行器绕质心的转动。另外，还有六个运动学方程，用来描述飞行器在空间的位置和姿态的变化。本章的主要内容是，应用牛顿运动定律，导出飞行器相对于动坐标轴系的一般运动方程组；利用小扰动法，将非线性运动方程组线性化；再根据某些简化条件将纵向运动和横侧运动分开，而得出飞行器的纵向和横侧运动方程组。这些方程即成为第 9 章至第 12 章讨论飞行器稳定性与操纵性的基础。

6.1　刚性飞行器动力学方程

6.1.1　飞行器质心移动的动力学方程

1. 任意动系中的质心动力学方程

利用理论力学中的动量定理，在原点为飞行器质心的任意动坐标系 $Oxyz$ 上投影，得出的质心动力学标量方程组已在第 1 章中导出。现抄录如下：



$$\left.\begin{aligned}
m\left(\frac{\mathrm{d}V_x}{\mathrm{d}t}+V_z\omega_y-V_y\omega_z\right)&=F_x\\
m\left(\frac{\mathrm{d}V_y}{\mathrm{d}t}+V_x\omega_z-V_z\omega_x\right)&=F_y\\
m\left(\frac{\mathrm{d}V_z}{\mathrm{d}t}+V_y\omega_x-V_x\omega_y\right)&=F_z
\end{aligned}\right\}$$

式中($\omega_x,\omega_y,\omega_z$)为动系相对惯性系的转动角速度在动系上的投影分量;(F_x,F_y,F_z)为作用在飞行器上外力的合力矢量在动系上的投影分量。

2. 航迹轴系中的质心动力学方程

该坐标系中的质心动力学标量方程组也在第1章中导出,用于飞行器质心运动规律的研究。现抄录如下:

$$\left.\begin{aligned}
&m\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}=T\cos(\alpha+\varphi)\cos\beta-D-mg\sin\gamma\\
&mV\cos\gamma\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}=T[\sin(\alpha+\varphi)\sin\mu-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\cos\mu]+C\cos\mu+L\sin\mu\\
&-mV\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}=T[-\sin(\alpha+\varphi)\cos\mu-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\sin\mu]+C\sin\mu-L\cos\mu+mg\cos\gamma
\end{aligned}\right\}$$

3. 机体轴系中的质心动力学方程

类似质心动力学方程在航迹轴系上的投影,先找出速度、角速度和合外力矢量在$Ox_\mathrm{b}y_\mathrm{b}z_\mathrm{b}$上的投影,然后直接代入式(1.35)即成。速度$\boldsymbol{V}$的投影表示为

$$\begin{bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{bmatrix}_\mathrm{b}=\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$$

角速度$\boldsymbol{\omega}$的投影表示为

$$\begin{bmatrix}\omega_x\\\omega_y\\\omega_z\end{bmatrix}_\mathrm{b}=\begin{bmatrix}p\\q\\r\end{bmatrix}$$

合外力矢量$\boldsymbol{F}$的投影中,发动机推力$\boldsymbol{T}$位于飞行器对称平面内,与Ox_b轴构成安装角φ,故

$$\begin{bmatrix}T_x\\T_y\\T_z\end{bmatrix}_\mathrm{b}=\begin{bmatrix}T\cos\varphi\\0\\-T\sin\varphi\end{bmatrix}$$

空气动力$\boldsymbol{A}$在$Ox_\mathrm{b}y_\mathrm{b}z_\mathrm{b}$的投影可通过转换矩阵$\boldsymbol{L}_\mathrm{ba}=\boldsymbol{L}_\mathrm{ab}^\mathrm{T}$得出



$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}_b = \boldsymbol{L}_{ba}\begin{bmatrix} -D \\ C \\ -L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -D\cos\alpha\cos\beta - C\cos\alpha\sin\beta + L\sin\alpha \\ -D\sin\beta + C\cos\beta \\ -D\sin\alpha\cos\beta - C\sin\alpha\sin\beta - L\cos\alpha \end{bmatrix}$$

重力 mg 在 $Ox_by_bz_b$ 的投影，可通过转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{bg}$ 得出，即

$$m\begin{bmatrix} g_x \\ g_y \\ g_z \end{bmatrix}_b = \boldsymbol{L}_{bg}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} -g\sin\theta \\ g\sin\phi\cos\theta \\ g\cos\phi\cos\theta \end{bmatrix}$$

将上述的投影表达式代入式(1.35)，最终得出的机体轴系中质心动力学方程组的标量形式为

$$\left.\begin{aligned} m\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + qw - rv\right) &= T\cos\varphi - D\cos\alpha\cos\beta - C\cos\alpha\sin\beta + L\sin\alpha - mg\sin\theta \\ m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + ru - pw\right) &= -D\sin\beta + C\cos\beta + mg\sin\phi\cos\theta \\ m\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} + pv - qu\right) &= -T\sin\varphi - D\sin\alpha\cos\beta - C\sin\alpha\sin\beta - L\cos\alpha + mg\cos\phi\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{6.1}$$

在探讨飞行器大迎角、大机动运动特性时，常将方程组式(6.1)中速度矢量投影$(u,v,w)^{\mathrm{T}}$通过转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{ba}$，用(V,α,β)来表示，即

$$\left.\begin{aligned} u &= V\cos\alpha\cos\beta \\ v &= V\sin\beta \\ w &= V\sin\alpha\cos\beta \end{aligned}\right\} \tag{6.2}$$

相应地对时间的导数为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\cos\alpha\cos\beta - \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}V\sin\alpha\cos\beta - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}V\cos\alpha\sin\beta \\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\sin\beta + \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}V\cos\beta \\ \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\sin\alpha\cos\beta + \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}V\cos\alpha\cos\beta - \frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}V\sin\alpha\sin\beta \end{aligned}\right\} \tag{6.3}$$

气动力 $\boldsymbol{A}$ 直接投影在 $Ox_by_bz_b$ 上，即

$$[A_x, A_y, A_z]_b^{\mathrm{T}} = [X_b, Y_b, Z_b]^{\mathrm{T}}$$

将速度 $\boldsymbol{V}$ 和气动力 $\boldsymbol{A}$ 的投影式直接代入式(6.1)，经整理后得质心在机体轴系中的动力学方程组的又一标量形式：



$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= -\left(\frac{T\cos\varphi + X_b}{m} - g\sin\theta\right)\cos\alpha\cos\beta - \left(\frac{Y_b}{m} + g\sin\phi\cos\theta\right)\sin\beta + \\
&\quad \left(\frac{T\sin\varphi + Z_b}{m} - g\cos\phi\cos\theta\right)\sin\alpha\cos\beta \\
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} &= q + \frac{1}{\cos\beta}\left[\left(-\frac{T\cos\varphi + X_b}{mV} + \frac{g}{V}\sin\theta - r\sin\beta\right)\sin\alpha + \right. \\
&\quad \left.\left(-\frac{T\sin\varphi - Z_b}{mV} + \frac{g}{V}\cos\phi\cos\theta - p\sin\beta\right)\cos\alpha\right] \\
\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} &= -\left[\left(\frac{T\sin\varphi + X_b}{mV} - \frac{g}{V}\sin\theta\right)\sin\beta + r\right]\cos\alpha + \left(\frac{Y_b}{mV} + \frac{g}{V}\sin\phi\cos\theta\right)\cos\beta + \\
&\quad \left[\left(\frac{T\sin\varphi - Z_b}{mV} - \frac{g}{V}\cos\phi\cos\theta\right)\sin\beta + p\right]\sin\alpha
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}
$$

对于某些特殊情况，例如飞行器的横滚机动飞行，可以认为 α 和 β 不大，且不考虑速度变化，于是速度关系式(6.2)可简化为

$$
\left.\begin{aligned}
u &\approx V = \text{const} \\
v &\approx V\beta \\
w &\approx V\alpha
\end{aligned}\right\}
$$

机体轴系中的质心动力学方程组可以只取式(6.1)的第二、第三方程，经整理后得

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t} &= q - p\beta - \frac{T\cos\varphi - Z_b}{mV} + \frac{g}{V}\cos\phi\cos\theta \\
\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} &= p\alpha - r + \frac{Y_b}{mV} + \frac{g}{V}\sin\phi\cos\theta
\end{aligned}\right\} \tag{6.5}
$$

6.1.2　飞行器绕质心转动的动力学方程

由理论力学可知，描述飞行器绕质心的转动运动，可用动量矩定理来表示，即

$$
\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{h}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{M} \tag{6.6}
$$

式中 $\boldsymbol{h}$ 为飞行器对坐标系原点的动量矩；$\boldsymbol{M}$ 为作用在飞行器上的外力对原点的合力矩。

按动量矩的定义，飞行器上的任意微元质量为 $\mathrm{d}m$，对坐标系原点的动量矩(见图 6.1)为

$$
\Delta\boldsymbol{h} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{V}\mathrm{d}m
$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 为微元质量到坐标原点的矢径；$\boldsymbol{V}$ 为该微元质量的速度矢量，则

$$
\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}
$$

式中 $\boldsymbol{V}_O$ 为坐标原点速度(如坐标原点取为飞行器质心，则为质心速度)；$\boldsymbol{\omega}$ 为坐标系转动角速度。

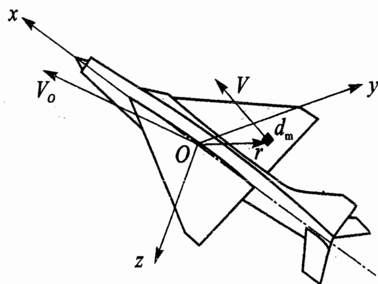


图 6.1　对质心的动量矩

于是飞行器的总动量矩可积分得出

$$h = \int r \times V \mathrm{d}m = \int r \mathrm{d}m \times V_O + \int r \times (\omega \times r) \mathrm{d}m$$

取坐标系原点为质心时，有

$$\int r \mathrm{d}m = 0$$

飞行器的动量矩简化为

$$h = \int r \times (\omega \times r) \mathrm{d}m \tag{6.7}$$

上式表明，飞行器的动量矩只取决于转动产生的速度部分，而与质心运动速度 V_O 无关。矢径 r 和角速 ω 用坐标系中投影分量表示为

$$\omega = \omega_x i + \omega_y j + \omega_z k$$

$$r = xi + yj + zk$$

将上述关系式代入式(6.7)，经简单整理得

$$\left.\begin{aligned} h_x &= \omega_x I_x - \omega_y I_{xy} - \omega_z I_{zx} \\ h_y &= \omega_y I_y - \omega_x I_{xy} - \omega_z I_{yz} \\ h_z &= \omega_z I_z - \omega_x I_{zx} - \omega_y I_{yz} \end{aligned}\right\} \tag{6.8}$$

式中 I_x，I_y 和 I_z 为飞行器对 Ox 轴、Oy 轴和 Oz 轴的惯性矩，分别为

$$\left.\begin{aligned} I_x &= \int (y^2 + z^2) \mathrm{d}m \\ I_y &= \int (x^2 + z^2) \mathrm{d}m \\ I_z &= \int (x^2 + y^2) \mathrm{d}m \end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

而 I_{xy}，I_{yz} 和 I_{zx} 则为对 Ox 与 Oy 轴、Oy 与 Oz 轴和 Oz 与 Ox 轴的惯性积，分别为

$$\left.\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy \mathrm{d}m \\ I_{yz} &= \int yz \mathrm{d}m \\ I_{zx} &= \int xz \mathrm{d}m \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

1. 固连于飞行器的任意动系中绕质心转动动力学方程

具体研究飞行器绕质心转动规律时，矢量形式方程式(6.6)使用不太方便，工程习惯上，将其投影在一动坐标系上，建成方程的标量形式。此时，由于动系在空中以 ω 转动，类同第1章中的加速度 $\mathrm{d}V/\mathrm{d}t$，动量矩导数 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t$，可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = \frac{\delta h}{\delta t} + \omega \times h$$



代入式(6.6)，得到在动坐标系中表示的飞行器绕质心转动动力学方程

$$\frac{\delta \boldsymbol{h}}{\delta t}+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{h}=\boldsymbol{M} \tag{6.11}$$

其中$\frac{\delta \boldsymbol{h}}{\delta t}$为动系角速度$\boldsymbol{\omega}=0$时的动量矩导数，称为动量矩相对导数，用其投影表示为

$$\frac{\delta \boldsymbol{h}}{\delta t}=\frac{\mathrm{d}h_x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}h_y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}h_z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$$

而$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{h}$称为动量矩的转换导数，是由于$\boldsymbol{\omega}$存在动坐标系方向改变所引起的动量矩变化，可以表示为

$$\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{h}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ h_x & h_y & h_z \end{vmatrix}$$

合外力矩$\boldsymbol{M}$在动系中的投影表示式为

$$\boldsymbol{M}=M_x\boldsymbol{i}+M_y\boldsymbol{j}+M_z\boldsymbol{k}$$

将上述的投影表示式代入式(6.11)，即得转动运动方程的标量形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}h_x}{\mathrm{d}t}+(h_z\omega_y-h_y\omega_z)=M_x\\
&\frac{\mathrm{d}h_y}{\mathrm{d}t}+(h_x\omega_z-h_z\omega_x)=M_y\\
&\frac{\mathrm{d}h_z}{\mathrm{d}t}+(h_y\omega_x-h_x\omega_y)=M_z
\end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

再将动量矩关系式(6.8)代入上式，经过适当整理，最后推得飞机绕质心转动的动力学方程为

$$\left.\begin{aligned}
&I_x\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}+(I_z-I_y)\omega_y\omega_z+I_{yz}(\omega_z^2-\omega_y^2)+\\
&\qquad I_{xy}\left(\omega_x\omega_z-\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}\right)-I_{zx}\left(\omega_x\omega_y+\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}\right)=M_x\\
&I_y\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}+(I_x-I_z)\omega_x\omega_z+I_{zx}(\omega_x^2-\omega_z^2)+\\
&\qquad I_{yz}\left(\omega_x\omega_y-\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}\right)-I_{xy}\left(\omega_y\omega_z+\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\right)=M_y\\
&I_z\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t}+(I_y-I_x)\omega_x\omega_y+I_{xy}(\omega_y^2-\omega_x^2)+\\
&\qquad I_{zx}\left(\omega_y\omega_z-\frac{\mathrm{d}\omega_x}{\mathrm{d}t}\right)-I_{yz}\left(\omega_z\omega_x+\frac{\mathrm{d}\omega_y}{\mathrm{d}t}\right)=M_z
\end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

2. 机体轴系中绕质心转动动力学方程

对于一般的飞行器，Ox_bz_b平面常为对称面。由式(6.10)可知，此时$I_{xy}=I_{yz}=0$。角速度在机体轴上投影常表示为$[\omega_x,\omega_y,\omega_z]_b^T=[p,q,r]^T$。外力矩在机体轴上投影表示为$[M_x,M_y,$

$M_z]_b^T=[L,M,N]^T$。于是式(6.13)可简化为

$$\left.\begin{aligned} I_x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(I_z-I_y)qr-I_{zx}\left(pq+\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)&=L\\ I_y\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(I_x-I_z)rp+I_{zx}(p^2-r^2)&=M\\ I_z\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(I_y-I_x)pq+I_{zx}\left(qr-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}\right)&=N \end{aligned}\right\}\tag{6.14}$$

对于轴对称飞行器，通常 I_{zx} 也为零，从而得到转动动力学方程的最简形式为

$$\left.\begin{aligned} I_x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+(I_z-I_y)qr&=L\\ I_y\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}+(I_x-I_z)rp&=M\\ I_z\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}+(I_y-I_x)pq&=N \end{aligned}\right\}\tag{6.15}$$

6.2 刚性飞行器运动学方程

6.2.1 飞行器质心运动学方程

若质心的动力学方程是建立在航迹轴系上的，则得出的质心速度变化表示为$[V,\chi,\gamma]^T$，通过转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{qk}$ 可获得质心速度在地面轴系上的投影$[V_x,V_y,V_z]_g^T$，再对各分速分别进行积分，得到质心位置在空间的变化规律，即运动轨迹。该情况下的质心运动学方程在第 1 章已导出，在此仅抄录如下：

$$\left.\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x_g}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma\cos\chi\\ \frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}t}&=V\cos\gamma\sin\chi\\ \frac{\mathrm{d}z_g}{\mathrm{d}t}&=-V\sin\gamma \end{aligned}\right\}$$

若质心动力学方程是建立在机体轴系上的，则得出的质心速度变化表示为$[u,v,w]^T$，同样可通过转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{gb}$ 得到质心速度在地面轴系上的投影，即

$$\begin{bmatrix}V_x\\V_y\\V_z\end{bmatrix}_g=\boldsymbol{L}_{gb}\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}=\boldsymbol{L}_{bg}^T\begin{bmatrix}u\\v\\w\end{bmatrix}$$

将转换矩阵式(1.24)代入，展开后即得相应的质心运动学方程为



$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} &= u\cos\theta\cos\psi + v(\sin\theta\sin\phi\cos\psi - \cos\phi\sin\psi) + \\
&\quad w(\sin\theta\cos\phi\cos\psi + \sin\phi\sin\psi) \\
\frac{\mathrm{d}y_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} &= u\cos\theta\sin\psi + v(\sin\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\phi\cos\psi) + \\
&\quad w(\sin\theta\cos\phi\sin\psi - \sin\phi\cos\psi) \\
\frac{\mathrm{d}z_{\mathrm{g}}}{\mathrm{d}t} &= -u\sin\theta + v\sin\phi\cos\theta + w\cos\phi\sin\theta
\end{aligned}\right\}
\tag{6.16}
$$

6.2.2 飞行器绕质心转动运动学方程

飞行器在空间的姿态是通过机体轴系相对地面轴系的三个欧拉角(ψ,θ,ϕ)来表示的。飞行过程中欧拉姿态角将随时间变化。显然其变化规律与飞行器的旋转角速度(p,q,r)密切相关。通过找出它们之间的相互关系,得出描述飞行器姿态变化规律的方程,即绕质心转动的运动学方程。

下面将采用两种方法建立转动运动学方程。欧拉角表示法,是直接导出欧拉姿态角变化规律的方程;四元数表示法,则是间接导出姿态角变化的方程。

1. 欧拉角表示法

从机体轴系的形成过程(见图 1.15)可知,ψ角是由沿z_{g}轴的角速度 $\mathrm{d}\psi/\mathrm{d}t$ 形成的;θ角是由沿y'轴的角速度 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ 形成的,将其沿机体轴系投影为$[0,\dot\theta\cos\phi,-\dot\theta\sin\phi]^{\mathrm{T}}$;$\phi$角是由沿$x_{\mathrm{b}}$轴的角速度 $\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$ 形成的。由此可以写出旋转角速度在机体轴系上的投影为

$$
\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\phi \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dot\theta\cos\phi \\ -\dot\theta\sin\phi \end{bmatrix} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{bg}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot\psi \end{bmatrix}
$$

展开后得

$$
\left.\begin{aligned}
p &= \dot\phi - \dot\psi\sin\theta \\
q &= \dot\theta\cos\phi + \dot\psi\sin\phi\cos\theta \\
r &= -\dot\theta\sin\phi + \dot\psi\cos\phi\cos\theta
\end{aligned}\right\}
\tag{6.17}
$$

求解结果形成绕质心转动的运动学方程

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} &= p + \tan\theta(q\sin\phi + r\cos\phi) \\
\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} &= q\cos\phi - r\sin\phi \\
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\cos\theta}(q\sin\phi + r\cos\phi)
\end{aligned}\right\}
\tag{6.18}
$$

2. 四元数表示法

从绕质心旋转的运动学方程式(6.18)中的第三式可以看出，当飞行器作大机动飞行时，俯仰角 θ 接近 90°，方程会出现奇异点，仿真计算或飞行模拟将被迫中断。为避免这种奇异情况，可采用四元数法来描述飞行器绕质心转动的运动学方程。

四元数表示法的原理是，设想两个同原点的坐标系 S_a 和 S_b，总能够通过绕某一固定轴 OR 转动一个角度 σ，可使坐标系 S_a 与坐标系 S_b 重合。该转轴 OR 与空间坐标形成三个角度 A，B 和 C，于是定义四元数为

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= \cos\frac{\sigma}{2} \\ e_1 &= \cos A\sin\frac{\sigma}{2} \\ e_2 &= \cos B\sin\frac{\sigma}{2} \\ e_3 &= \cos C\sin\frac{\sigma}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.19}$$

且四元数之间还需满足约束条件

$$e_0^2 + e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = 1 \tag{6.20}$$

利用转轴 OR 与坐标轴 S_a 和 S_b 的相互关系，可以导出坐标系之间的转换矩阵。详细的数学证明这里从略，有兴趣者可参阅有关文献。转换矩阵为

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{ba}} = \begin{bmatrix} e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 & 2(e_1e_2 + e_0e_3) & 2(e_1e_3 - e_0e_2) \\ 2(e_1e_2 - e_0e_3) & e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 & 2(e_2e_3 + e_0e_1) \\ 2(e_0e_2 + e_1e_3) & 2(e_2e_3 - e_0e_1) & e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \end{bmatrix} \tag{6.21}$$

若以地面轴系 S_{g} 与机体轴系 S_{b} 间相互关系为例，则两者之间是用三个欧拉角 ψ，θ 和 ϕ 来表示的。地轴系可以先通过 z_{g} 轴转过偏航角 ψ，再绕 y' 轴转过俯仰角 θ，最后绕 x_{b} 轴转过滚转角 ϕ，就与机体轴相重合。通过三次旋转所对应的四元数可表示为

$$\left.\begin{aligned} e_0 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ e_1 &= \cos\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} - \sin\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} \\ e_2 &= \cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} \\ e_3 &= -\cos\frac{\psi}{2}\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\phi}{2} + \sin\frac{\psi}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\phi}{2} \end{aligned}\right\} \tag{6.22}$$

上式即是由欧拉角求四元数分量的公式。

此时地面轴系与机体轴系的四元数转换矩阵式(6.21)应写成 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{bg}}$。而这两个坐标系用欧拉角表示的转换矩阵 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{bg}}$ 已在第 1 章中导出，如式(1.24)所示，故两矩阵的各对应元素应该相



等，即

$$\cos\theta\cos\psi = e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2 \tag{6.23}$$

$$\cos\theta\sin\psi = 2(e_1e_2 + e_0e_3) \tag{6.24}$$

$$-\sin\theta = 2(e_1e_3 - e_0e_2) \tag{6.25}$$

$$\sin\theta\sin\phi\cos\psi - \sin\psi\cos\phi = 2(e_1e_2 - e_0e_3) \tag{6.26}$$

$$\sin\theta\sin\phi\sin\psi + \cos\psi\cos\phi = e_0^2 - e_1^2 + e_2^2 - e_3^2 \tag{6.27}$$

$$\cos\theta\sin\phi = 2(e_2e_3 + e_0e_1) \tag{6.28}$$

$$\sin\theta\cos\phi\cos\psi + \sin\psi\sin\phi = 2(e_0e_2 + e_1e_3) \tag{6.29}$$

$$\sin\theta\cos\phi\sin\psi - \cos\psi\sin\phi = 2(e_2e_3 - e_0e_1) \tag{6.30}$$

$$\cos\theta\cos\phi = e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2 \tag{6.31}$$

上述关系式即是由四元数求欧拉角的公式。根据需要，选取若干个关系式，即可求得 ψ,θ 和 ϕ 角。

通过对四元数表达式(6.22)的各式求导，并考虑到欧拉角速率与旋转角速度的关系式(6.18)，经整理最终得出用四元数表示的飞行器绕质心旋转的运动学方程为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}e_0}{\mathrm{d}t} &= -\frac{1}{2}(e_1p + e_2q + e_3r) \\
\frac{\mathrm{d}e_1}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}(e_0p + e_2r - e_3q) \\
\frac{\mathrm{d}e_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}(e_0q + e_3p - e_1r) \\
\frac{\mathrm{d}e_3}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{2}(e_0r + e_1q - e_2p)
\end{aligned}\right\} \tag{6.32}$$

上述方程积分，得四元数 e_0,e_1,e_2 和 e_3 的时间响应。再利用式(6.25)得飞行器俯仰角

$$\theta = \arcsin\left[-(e_1e_3 - e_0e_2)\right] \tag{6.33}$$

再利用式(6.28)和式(6.31)得飞行器滚转角

$$\phi = \arccos\left[\frac{e_0^2 - e_1^2 - e_2^2 + e_3^2}{\sqrt{1 - 4(e_1e_3 - e_0e_2)^2}}\right]\mathrm{sgn}\left[2(e_2e_3 + e_0e_1)\right] \tag{6.34}$$

式中 sgn（·）函数的含义是：当自变量为正值时，sgn（·）取+1 值；当自变量为负值时，则 sgn（·）取−1 值。

最后利用式(6.23)和式(6.24)得飞行器偏航角

$$\psi = \arccos\left[\frac{e_0^2 + e_1^2 - e_2^2 - e_3^2}{\sqrt{1 - 4(e_1e_3 - e_0e_2)^2}}\right]\mathrm{sgn}\left[2(e_1e_2 + e_0e_3)\right] \tag{6.35}$$

用四元数法求欧拉角，当 $\theta=\pi/2$ 时不会出现奇异情况。

6.3 刚性飞行器运动方程讨论

6.3.1 “机体-机体体系”运动方程组

质心运动和绕质心转动运动都在机体轴系上投影的方程组，简称为机体-机体体系运动方程组。通常由式(6.1)、式(6.13)(或式(6.14))、式(6.16)和式(6.18)共12个方程组成。通过对方程及其外力、外力矩的观察、分析，方程中的未知数计有(u,v,w)，(V,α,β)，(p,q,r)，(x_g,y_g,z_g)，(ϕ,θ,ψ)和$(\delta_a,\delta_r,\delta_e,\delta_p)$共19个。考虑到前两组参数表示同一个速度矢量，由式(6.2)给出了它们之间的附加关系式。即使这样未知数仍然比方程式多出4个。因此，为了求解这组方程，还需给出4个附加关系式。这些附加关系可根据研究不同类型的飞行力学问题来确定。

如果利用关系式(6.2)将方程式(6.1)转换成式(6.4)的形式，未知数(u,v,w)将不出现，此时方程式和未知数同时减少3个，未知数仍然比方程式多4个，仍需增加4个附加关系才能求解这个方程组。

6.3.2 “航迹-机体体系”运动方程组

这组方程其质心运动在航迹轴系上投影，而绕质心转动运动在机体轴系上投影，故称为航迹-机体体系运动方程组。方程组由式(1.36)、式(6.13)(或式(6.14))、式(1.37)和式(6.18)共12个方程组成，其未知数计有(V,χ,γ)，(p,q,r)，(α,β,μ)，(x_g,y_g,z_g)，(ϕ,θ,ψ)和$(\delta_a,\delta_r,\delta_e,\delta_p)$共19个。未知数多于方程式个数。但由于引入了两套坐标轴系，其中的8个角度$(\phi,\theta,\psi,\alpha,\beta,\mu,\chi,\gamma)$并不是完全独立的。例如，飞行器在飞行中的姿态角$(\phi,\theta,\psi)$以及飞行器相对气流的关系$(\alpha,\beta)$一经确定后，气流轴系相对空间方位$(\mu,\chi,\gamma)$也就确定了。这就是说，8个角度中只有5个是独立变量，另外3个可以通过几何关系来确定。根据不同的需求，可以导出许多形式的几何关系。这里仅介绍常见的形式，即由$\phi,\theta,\psi,\chi,\gamma$角度来求出$\alpha,\beta$和$\mu$的关系式。

利用转换矩阵的传递特性，有

$$\boldsymbol{L}_{ba}\boldsymbol{L}_{ak}=\boldsymbol{L}_{bg}\boldsymbol{L}_{gk} \tag{6.36}$$

式中$\boldsymbol{L}_{ba}=(\boldsymbol{L}_{ab})^{T}$；$\boldsymbol{L}_{ak}$，$\boldsymbol{L}_{bg}$和$\boldsymbol{L}_{gk}=(\boldsymbol{L}_{kg})^{T}$分别由式(1.28)、式(1.26)、式(1.24)和式(1.25)给出。把上式展开，并令两边的第3行第1列元素相等，得到

$$\begin{aligned}\sin\alpha=\{&[\sin\theta\cos\phi\cos(\psi-\chi)+\sin\phi\sin(\psi-\chi)]\cos\gamma-\\&\sin\gamma\cos\phi\cos\theta\}/\cos\beta\end{aligned} \tag{6.37}$$

然后令等式两边的第2行第1列元素相等，得到

$$\begin{aligned}\sin\beta=&[\sin\theta\sin\phi\cos(\psi-\chi)-\cos\phi\sin(\psi-\chi)]\cos\gamma-\\&\sin\gamma\sin\phi\cos\theta\end{aligned} \tag{6.38}$$



同样地，有

$$L_{ga} = L_{gb} L_{ba} \tag{6.39}$$

其中 $\boldsymbol{L}_{ga} = (\boldsymbol{L}_{ag})^T$，$\boldsymbol{L}_{gb} = (\boldsymbol{L}_{bg})^T$ 和 $\boldsymbol{L}_{ba} = (\boldsymbol{L}_{ab})^T$ 分别由式(1.27)、式(1.24)和式(1.28)给出。上式展开后，令等式两边的第 3 行第 2 列元素相等，得到

$$\sin\mu = (\sin\theta\cos\alpha\sin\beta - \cos\phi\cos\theta\sin\alpha\sin\beta + \sin\phi\cos\theta\cos\beta)/\cos\gamma \tag{6.40}$$

增加了 3 个几何关系式后，未知数仍比方程个数多 4 个，同样需要增加 4 个附加关系才能求解这组方程。

6.3.3　飞行力学的几类主要问题

1. 飞行器本体的稳定性和操纵性

研究飞行器本体的稳定性时，所有操纵机构的位置保持不变，即操纵变量(δ_a，δ_r，δ_e，δ_p)均保持常值。此时未知数个数与方程个数相等，故仅研究瞬时扰动下，飞行器能否保持原有平衡状态的运动特性。

研究飞行器本体的操纵性时，所有操纵机构的偏角都在给定变化规律下，即操纵变量(δ_a，δ_r，δ_e，δ_p)为已知时间函数。此时未知数个数与方程个数相等，故仅研究在这些操纵规律作用下飞行器从一个平衡状态转至另一平衡状态的运动过程。

显见，在研究飞行器本体稳定性和操纵性之前，首先需要确定相应的平衡状态，然后讨论实现不同平衡状态所需操纵机构偏角或杆力的大小等，这些又称为飞行器本体的静操纵性，将在第 7，8 章中详细介绍。

2. 带自动器飞行器的系统稳定性和操纵性

当飞行器上装有飞控系统时，操纵机构的运动参数与飞行器运动参数有关。此时的操纵机构运动规律通常称为自动器调节规律。飞行器的运动将由描述自动器动力学方程和飞机运动方程联立求解。如机体-机体体系运动方程组可表示成矢量形式：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\delta}) \tag{6.41}$$

式中状态变量 $\boldsymbol{x} = [u, v, w, p, q, r, \phi, \theta, \psi, x_g, y_g, z_g]^T$，操纵变量 $\boldsymbol{\delta} = [\delta_a, \delta_r, \delta_e, \delta_p]^T$。

自动器运动方程组可写成

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\delta}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{d}\right) \tag{6.42}$$

式中 $\boldsymbol{d} = [d_a, d_r, d_e, d_p]^T$ 为操纵指令矢量，如驾驶杆和脚蹬位移、油门杆位移等，应根据飞行任务给定。

从飞行力学的角度研究带自动器飞行器的运动特性时，为了认识自动器对飞行器动力学特性带来的影响和效果，有时常将自动器方程简化，略去其系统惯性、阻尼和非线性等因素的影响，于是自动器方程组可用一组代数方程代替，即

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{G}\left(\boldsymbol{x}, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}, \boldsymbol{d}\right) \tag{6.43}$$

联立求解式(6.41)和式(6.42)或式(6.43)，就可研究干扰信号和指令信号输入下的动态特性，即系统的稳定性和操纵性。

飞行器本体的和带自动器的稳定性和操纵性将在第9章至第12章详细介绍。

3. 飞行力学逆问题

所谓飞行力学逆问题是指，给定飞行器某些运动参数变化规律，求出其所需的操纵机构运动参数变化规律。这类问题在飞行力学优化问题中时常遇到，如实现最优轨迹或最佳机动来设计舵面的控制规律等。

6.3.4 多操纵机构情况

第1章中在介绍飞行器的飞行操纵概念时，曾提到现代飞行器为提高机动性、敏捷性，以增强空战效能，操纵机构除了采用常规的气动舵面和油门杆外($\delta_a,\delta_r,\delta_e,\delta_p$)，还引入推力矢量控制、直接力控制的附加舵面等。此时飞行器的操纵变量将有所增加，如推力矢量偏角(δ_{Tx}，δ_{Ty},δ_{Tz})、襟翼 δ_f 和鸭翼 δ_d 等。为求解方程，获得飞行器运动规律，还必须增加附加关系。通常可以直接给出附加操纵机构变化规律；或根据运动和操纵特点，给出这些附加操纵机构与常规操纵机构之间的协调关系。如引入推力矢量控制，则可给出推力矢量偏转与气动舵面偏角的协调关系；垂直方向直接力控制时，可以给出襟翼偏角与升降舵偏角之间的协调关系等，以保证未知数个数与方程个数封闭。欲详细了解有关协调关系，可参阅有关文献。

6.4 运动方程组线性化

6.1节和6.2节导出的运动方程组是变系数、非线性的方程，一般情况下得不到解析解，只能用数值法求解。这样，就不容易找出带有普遍意义的一般规律。

为便于研究飞行器的稳定性和操纵性，最常用的方法是利用“小扰动”假设，将微分方程线性化，通称为“小扰动法”。这样就可能用解析法求解或进行解析研究，并从中归纳出普遍规律，确定飞行品质指标，作为飞行器设计的指南。

6.4.1 小扰动法

1. 基本概念

研究飞行器的稳定性和操纵性问题时，一般把飞机运动分为基准运动和扰动运动。基准运动(或称未扰动运动)是指在理想条件下，飞行器不受任何外界干扰，按预定规律进行的运动，如定直平飞、定常盘旋等。基准运动参数用下标“*”表示，如V_*，α_*，θ_*等。

由于各种干扰因素，使飞行器的运动参数偏离了基准运动参数，因而运动不按预定的规律



进行，这种运动称为扰动运动。受扰运动的参数，不附加任何特殊标记，例如 V,α,θ 等。显然，在扰动运动中，飞行器运动参数变化与外界干扰有直接关系，干扰愈大则运动参数偏离基准运动愈大。

与基准运动差别甚小的扰动运动称为小扰动运动。“差别甚小”只能从相对的意义上理解，绝对量值的范围应视具体情况而定。根据已有的经验，对小扰动的限制往往不很严格。采用小扰动假定简化后的方程，在大多数情况下均能给出足够满意的结果。这是由于：① 在大多数飞行情况下，各主要气动参数的变化与扰动量成线性关系（详见第 7，8 章）；② 飞行中即使遇到相当强烈的扰动，在有限的时间内飞行器的线速度和角速度也往往只有很小的变化量。所以小扰动法是有客观实践依据的。

2. 基本假设

在小扰动假设条件下，一般情况就能将飞行器运动方程进行线性化。但为了便于将线性扰动运动方程组分离为彼此独立的两组，即纵向和横侧小扰动方程组，以减少方程组阶次而解析求解，还需要作下列假设：

① 飞行器具有对称平面（气动外形和质量分布均对称），且略去机体内转动部件的陀螺力矩效应。

② 在基准运动中，对称平面处于铅垂位置（即 $\phi=0$），且运动所在平面与飞行器对称平面相重合（即 $\beta=0$）。

在满足上述条件下，可以推论出：纵向气动力和力矩对横侧参数在其基准运动状态下的导数（如 $\left.\frac{\partial L}{\partial \beta}\right|_*,\left.\frac{\partial M}{\partial p}\right|_*$）均等于零。这从纵向气动力和力矩曲线图 6.2 中可以得到解释。这些曲线不仅对纵轴对称（飞行器具有对称面假设），而且在基准状态处的一阶导数连续，这与实验结果是相符的。

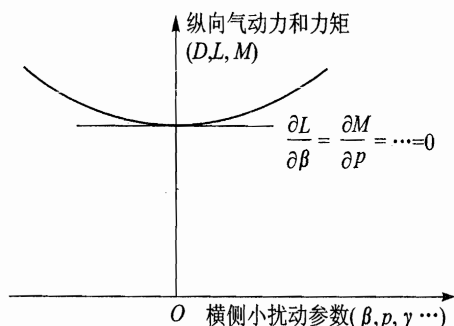


图 6.2　纵向气动力和力矩与横侧参数的示意关系

横侧气动力和力矩对纵向参数在基准运动下的导数（如 $\left.\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right|_*,\left.\frac{\partial N}{\partial q}\right|_*$）也均等于零。因为飞行器本身左右对称，当纵向扰动出现时，在不太大的迎角范围内，气流流动的对称性并不破坏，故通常不会产生横侧向气动力和力矩。

由此可以认为，在扰动运动中，纵向气动力和力矩只与纵向运动参数有关，而横侧向气动力和力矩也只与横侧运动参数有关。有了这些推论，就不难证明扰动运动方程可以分离为彼此独立的两组。其中一组只包含纵向参数，即飞行器在铅垂平面内作对称飞行时的运动参数 $u,w,q,\alpha,\theta,\gamma,x_g,z_g,\delta_e,\delta_p$ 等，称为纵向扰动运动方程组；另一组只包含横侧参数，即飞行器在

非对称面内的运动参数 $v,p,r,\beta,\psi,\chi,\phi,\mu,y_g,\delta_a,\delta_r$ 等，称为横侧向扰动运动方程组。

如果飞行器的基准运动不仅是在对称面内飞行，而且作等速直线运动，则这时的基准运动称为“对称定常直线飞行”或简称“对称定直飞行”。在该条件下，扰动运动方程不仅是线性和纵横向分离的，而且是常系数线性微分方程组。对于飞行器的一些典型飞行状态，如定直平飞、定直爬升等均属于对称定直飞行状态。因此，研究对称定直飞行时的小扰动问题是很有意义的。在后面研究的飞行器稳定性和操纵性，均属小扰动问题。

如果飞行器的基准运动是非定常的，则得出的扰动运动方程将是变系数线性微分方程组。变系数线性微分方程的求解是比较复杂的，一般只能在一定初始条件下数值求解。但实际工程上，常采用“系数冻结法”，将变系数线性微分方程在一定条件下转化为常系数线性微分方程。

所谓“系数冻结法”，是在飞行器基准运动轨迹(对于导弹即为未扰动弹道)上，选取若干特征点，认为每个特征点后的基准运动近似为定常运动。于是从特征点开始的扰动运动就可用常系数线性微分方程组描述。对于有控的飞行器，在扰动引起的过渡过程时间间隔内，非定常基准运动引起线性微分方程系数变化不超过 10 %～20 %，采用系数冻结法不会带来很大误差。问题的关键是如何选取特征点，一般应考虑基准运动轨迹上运动参数变化激烈的那些点，如发动机点火、控制方式转换、最大过载和最大动压等。通过对这些点上的扰动运动的研究，可取得对整个基准运动轨迹上扰动运动总的情况认识。

3. 线性化方法

飞行器的任何一个运动方程可以表示成如下的一般形式：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0 \tag{6.44}$$

式中变量 $x_i(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$可以是运动参数或它们的导数。根据前述，运动参数可以表示成基准运动参数 x_{i*} 和偏离量 Δx_i之和：

$$x_i = x_{i*} + \Delta x_i$$

于是方程式(6.44)可写成

$$f(x_{1*}+\Delta x_1,x_{2*}+\Delta x_2,\cdots,x_{n*}+\Delta x_n)=0 \tag{6.45}$$

在基准点$(x_{1*},x_{2*},\cdots,x_{n*})$处展开成台劳级数，并根据小扰动假设，略去二阶及以上各阶小量，得到

$$f(x_{1*},x_{2*},\cdots,x_{n*})+\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_*\Delta x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_*\Delta x_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_*\Delta x_n=0 \tag{6.46}$$

显然，基准运动也应满足运动方程式(6.44)，即

$$f(x_{1*},x_{2*},\cdots,x_{n*})=0 \tag{6.47}$$

将式(6.46)减去式(6.47)，得到

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)_*\Delta x_1+\left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)_*\Delta x_2+\cdots+\left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_*\Delta x_n=0 \tag{6.48}$$



这是由非线性方程式(6.44)简化得到的一个线性化方程，或称线性化小扰动方程。方程中$\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n$为变量。$\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_*$ $(i=1,2,\cdots,n)$为由基准运动状态确定的导数，一般是通过理论和实验的方法已经确定的物理量。

如果基准运动是定常运动，则上述线性化小扰动方程是常系数的；但如果基准运动是非定常运动，则上述方程就是变系数的。

6.4.2 外力和外力矩的线性化

在线性化运动方程过程中，会遇到扰动运动相对基准运动的力和力矩附加偏量。这些偏量可根据其与飞行器运动参数的关系，在小扰动条件下，用线性关系来表示。

设某个力或力矩 A 是若干变量的函数，即

$$A = A(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

一般来说，A 的偏量应为

$$\Delta A = \left(\frac{\partial A}{\partial x_1}\right)_* \Delta x_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial x_2}\right)_* \Delta x_2 + \cdots + \left(\frac{\partial A}{\partial x_n}\right)_* \Delta x_n$$

或写成

$$\Delta A = A_{x_1}\Delta x_1 + A_{x_2}\Delta x_2 + \cdots + A_{x_n}\Delta x_n \tag{6.49}$$

式中的偏导数均由基准运动状态确定，即

$$A_{x_i} = \left(\frac{\partial A}{\partial x_i}\right)_* = \frac{\partial A}{\partial x_i}(x_{1*}, x_{2*}, \cdots, x_{n*}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{6.50}$$

1. 力和力矩线性表达式

关于外力偏量的线性表达式，根据第1章中对外力的分析，可知发动机推力 T 可表示成

$$T = T(V, H, \delta_p)$$

因此其偏量为

$$\Delta T = T_V \Delta V + T_H \Delta H + T_{\delta_p} \Delta \delta_p \tag{6.51}$$

式中 δ_p 代表油门杆位置，不同油门杆位置对应发动机的不同转速，故 $T_{\delta_p}\Delta\delta_p$ 代表油门杆位置变化所引起的推力变化量。实际上由油门杆位置变化到推力变化有时间延迟，此处暂未考虑。

飞行器阻力 D 特性可表示为

$$D = D(V, H, \alpha, \beta, \delta_e)$$

并利用前面假设，横侧扰动参数对纵向气动力的影响可以忽略，即 $D_\beta = \left(\frac{\partial D}{\partial \beta}\right)_* = 0$，则其偏量为

$$\Delta D = D_V \Delta V + D_H \Delta H + D_\alpha \Delta \alpha + D_{\delta_e} \Delta \delta_e \tag{6.52}$$

飞行器升力 L 特性，同样利用前面的假设；为完整起见，还引入了迎角变化率 $\dot{\alpha}$ 和俯仰角速度 q 的影响因素，得出其偏量表达式为

$$\Delta L = L_V \Delta V + L_H \Delta H + L_\alpha \Delta \alpha + L_{\delta_e} \Delta \delta_e + L_{\dot{\alpha}} \Delta \dot{\alpha} + L_q \Delta q \tag{6.53}$$

飞行器侧力 C 特性可表示为

$$C = C(V, H, \beta, p, \gamma, \delta_r)$$

利用前面的假设，纵向扰动参数对横侧气动力的影响可以忽略，即 $C_V = \left(\frac{\partial C}{\partial V}\right)_* = 0, C_H = \left(\frac{\partial C}{\partial H}\right)_* = 0$，则其偏量为

$$\Delta C = C_\beta \Delta\beta + C_p \Delta p + C_\gamma \Delta\gamma + C_{\delta_r} \Delta\delta_r \tag{6.54}$$

关于外力矩偏量的线性表达式，在了解影响各气动力矩(详细内容在第 7,8 章中介绍)后，并考虑了前面的假设，纵向扰动只影响纵向力矩，横侧向扰动只影响横侧向扰动力矩，于是其偏量表达式可写成

$$\left.\begin{aligned} \Delta L &= L_\beta \Delta\beta + L_p \Delta p + L_r \Delta r + L_{\delta_a} \Delta\delta_a + L_{\delta_r} \Delta\delta_r \\ \Delta M &= M_V \Delta V + M_H \Delta H + M_\alpha \Delta\alpha + M_{\dot\alpha} \Delta\dot\alpha + M_q \Delta q + M_{\delta_e} \Delta\delta_e \\ \Delta N &= N_\beta \Delta\beta + N_p \Delta p + N_r \Delta r + N_{\delta_a} \Delta\delta_a + N_{\delta_r} \Delta\delta_r \end{aligned}\right\} \tag{6.55}$$

在这里还需说明，上述的力和力矩偏量表达式中，实际研究飞行器动力学特性时，可能会增加一些项，如推力偏心引起的附加力矩、附加操纵机构产生的操纵力矩和制造工艺误差引起的干扰力矩等。另外，还要说明，习惯上升力符号和滚转力矩符号用了同一个符号 L。

2. 各类力和力矩导数

现在来讨论上述力和力矩偏量公式中出现的偏导数。

(1) 对速度的导数

$$T_V = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_* = \left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\rho V^2 S C_T\right)}{\partial V}\right]_* =$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial Ma}\left(\frac{\mathrm{d}Ma}{\mathrm{d}V}\right)_* \frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S + C_{T*}\,\rho_* V_* S =$$

$$\rho_* V_* S\left(\frac{1}{2} C_{TMa} Ma_* + C_{T*}\right)$$

类似地得

$$D_V = \left(\frac{\partial D}{\partial V}\right)_* = \rho_* V_* S\left(\frac{1}{2} C_{DMa} Ma_* + C_{D*}\right)$$

$$L_V = \left(\frac{\partial L}{\partial V}\right)_* = \rho_* V_* S\left(\frac{1}{2} C_{LMa} Ma_* + C_{L*}\right)$$

$$M_V = \left(\frac{\partial M}{\partial V}\right)_* = \rho_* V_* Sc\left(\frac{1}{2} C_{mMa} Ma_* + C_{m*}\right)$$

式中 $C_{TMa} = \frac{\partial C_T}{\partial Ma}, C_{DMa} = \frac{\partial C_D}{\partial Ma}, C_{LMa} = \frac{\partial C_L}{\partial Ma}$ 和 $C_{mMa} = \frac{\partial C_m}{\partial Ma}$ 分别由可用推力特性曲线和纵向气动特性曲线用数值微分法求得。



(2) 对高度的导数

$$T_H=\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_*=\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\rho V^2 SC_T\right)}{\partial H}\right]_*=$$

$$\frac{\partial C_T}{\partial H}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S+C_{T*}\frac{1}{2}V_*^2 S\left(\frac{\partial \rho}{\partial H}\right)_*=$$

$$\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S\left(C_{TH}+C_{T*}\cdot\frac{\rho^H}{\rho^*}\right)$$

而

$$D_H=\left(\frac{\partial D}{\partial H}\right)_*=\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\rho V^2 SC_D\right)}{\partial H}\right]_*=$$

$$\frac{\partial C_D}{\partial Ma}\left(\frac{\partial Ma}{\partial c}\right)_*\left(\frac{\partial c}{\partial H}\right)_*\cdot\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S+C_{D^*}\frac{1}{2}V_*^2 S\left(\frac{\partial \rho}{\partial H}\right)_*=$$

$$\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S\left(-C_{DMa}Ma_*\frac{c^H}{c_*}+C_{D^*}\frac{\rho^H}{\rho_*}\right)$$

类似地得

$$L_H=\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S\left(-C_{LMa}Ma_*\frac{c^H}{c_*}+C_{L*}\frac{\rho^H}{\rho_*}\right)$$

$$M_H=\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 Sc\left(-C_{mMa}Ma_*\frac{c^H}{c_*}+C_{m*}\frac{\rho^H}{\rho_*}\right)$$

式中 $c^H=\frac{\partial c}{\partial H}$和 $\rho^H=\frac{\partial \rho}{\partial H}$可按标准大气表数据数值微分求得；$C_{TH}=\frac{\partial C_T}{\partial H}$则由可用推力特性曲线数值微分得出。

(3) 对角度的导数

纵向部分有

$$D_\alpha=\left(\frac{\partial D}{\partial \alpha}\right)_*=C_{D\alpha}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S$$

$$L_\alpha=\left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_*=C_{L\alpha}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S$$

$$M_\alpha=\left(\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right)_*=C_{m\alpha}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 Sc$$

$$D_{\delta_e}=\left(\frac{\partial D}{\partial \delta_e}\right)_*=C_{D\delta_e}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S$$

$$L_{\delta_e}=\left(\frac{\partial L}{\partial \delta_e}\right)_*=C_{L\delta_e}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 S$$

$$M_{\delta_e}=\left(\frac{\partial M}{\partial \delta_e}\right)_*=C_{m\delta_e}\frac{1}{2}\rho_* V_*^2 Sc$$

横侧向部分有

$$C_\beta=\left(\frac{\partial C}{\partial\beta}\right)_*=C_{c\beta}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2S$$

$$L_\beta=\left(\frac{\partial L}{\partial\beta}\right)_*=C_{l\beta}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2Sb$$

$$N_\beta=\left(\frac{\partial N}{\partial\beta}\right)_*=C_{n\beta}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2Sb$$

$$C_{\delta_r}=\left(\frac{\partial C}{\partial\delta_r}\right)_*=C_{c\delta_r}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2S$$

$$L_{\delta_r}=\left(\frac{\partial L}{\partial\delta_r}\right)_*=C_{l\delta_r}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2Sb$$

$$N_{\delta_r}=\left(\frac{\partial N}{\partial\delta_r}\right)_*=C_{n\delta_r}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2Sb$$

$$L_{\delta_a}=\left(\frac{\partial L}{\partial\delta_a}\right)_*=C_{l\delta_a}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2Sb$$

$$N_{\delta_a}=\left(\frac{\partial N}{\partial\delta_a}\right)_*=C_{n\delta_a}\frac{1}{2}\rho_*V_*^2Sb$$

式中的这些气动导数,称为静导数。如 $C_{D\alpha}=\frac{\partial C_D}{\partial\alpha},\cdots,C_{c\beta}=\frac{\partial C_c}{\partial\beta},\cdots$等,均可由理论估算或吹风得出。

(4) 对角速度的导数

纵向部分有

$$L_{\dot\alpha}=\left(\frac{\partial L}{\partial\dot\alpha}\right)_*=C_{L\dot\alpha}\frac{1}{2}\rho_*V_*Sc$$

$$M_{\dot\alpha}=\left(\frac{\partial M}{\partial\dot\alpha}\right)_*=C_{m\dot\alpha}\frac{1}{2}\rho_*V_*Sc^2$$

$$L_q=\left(\frac{\partial L}{\partial q}\right)_*=C_{Lq}\frac{1}{2}\rho_*V_*Sc$$

$$M_q=\left(\frac{\partial M}{\partial q}\right)_*=C_{mq}\frac{1}{2}\rho_*V_*Sc^2$$

式中 $C_{L\dot\alpha}=\frac{\partial C_L}{\partial\bar{\dot\alpha}},C_{Lq}=\frac{\partial C_L}{\partial\bar q};C_{m\dot\alpha}=\frac{\partial C_m}{\partial\bar{\dot\alpha}},C_{mq}=\frac{\partial C_m}{\partial\bar q}$。而 $\bar{\dot\alpha}$ 和 $\bar q$ 是引入的无因次角速度,可表示为

$$\bar{\dot\alpha}=\dot\alpha\frac{c}{V_*},\qquad \bar q=q\frac{c}{V_*}$$

横侧向部分有

$$C_p=\left(\frac{\partial C}{\partial p}\right)_*=C_{cp}\frac{1}{4}\rho_*V_*Sb$$

$$L_p=\left(\frac{\partial L}{\partial p}\right)_*=C_{lp}\frac{1}{4}\rho_*V_*Sb^2$$

$$N_p=\left(\frac{\partial N}{\partial p}\right)_*=C_{np}\frac{1}{4}\rho_*V_*Sb^2$$



$$C_r=\left(\frac{\partial C}{\partial r}\right)_*=C_{cr}\frac{1}{4}\rho_* V_* Sb$$

$$L_r=\left(\frac{\partial L}{\partial r}\right)_*=C_{lr}\frac{1}{4}\rho_* V_* Sb^2$$

$$N_r=\left(\frac{\partial N}{\partial r}\right)_*=C_{nr}\frac{1}{4}\rho_* V_* Sb^2$$

式中 $C_{cp}=\frac{\partial C_c}{\partial \bar{p}},\cdots;C_{cr}=\frac{\partial C_c}{\partial \bar{r}},\cdots$。而 $\bar{p}$ 和 $\bar{r}$ 为引入的无因次角速度，表示成

$$\bar{p}=\frac{pb}{2V_*},\qquad \bar{r}=\frac{rb}{2V_*}$$

上述式中的这些气动导数，称为动导数。如 $C_{mq}=\frac{\partial C_m}{\partial \bar{q}},\cdots;C_{lp}=\frac{\partial C_l}{\partial \bar{p}},\cdots;C_{nr}=\frac{\partial C_n}{\partial \bar{r}},\cdots$；也可通过估算或吹风得出。

6.4.3 运动方程的线性化

按习惯，研究飞行器的稳定性和操纵性所用的小扰动线性化方程常选用两种坐标体系的方程组形式。其中质心运动中的升力和阻力方程在风轴坐标系（在对称定直飞行情况下也就是航迹坐标系）上建立；而质心运动中侧力方程和绕质心运动中的力矩方程均在机体轴坐标系上建立。由于在两种坐标系中所得出的俯仰力矩方程是相同的，因此可以这样说，纵向小扰动运动方程是相对风轴系的，而横侧小扰动运动方程是相对机体轴系的。下面就具体线性化这些方程。

1. 质心动力学方程的线性化

首先对阻力方程，即式(1.36)中第一式进行线性化。按线性化的一般公式(6.48)处理并注意 m 和 φ 是常数，则有

$$m\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t}=\Delta T\cos(\alpha_*+\varphi)\cos\beta_*-T_*\sin(\alpha_*+\varphi)\cos\beta_*\Delta\alpha-$$
$$T_*\cos(\alpha_*+\varphi)\sin\beta_*\Delta\beta-\Delta D-mg\cos\gamma_*\Delta\gamma$$

利用小扰动法的假设，其基准状态 $\beta_*=0$，且把 ΔT 和 ΔD 表达式(6.51)、式(6.52)代入，得到

$$m\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t}=(T_V\Delta V+T_H\Delta H+T_{\delta_p}\Delta\delta_p)\cos(\alpha_*+\varphi)-T_*\sin(\alpha_*+\varphi)\Delta\alpha-$$
$$(D_V\Delta V+D_H\Delta H+D_\alpha\Delta\alpha+D_{\delta_e}\Delta\delta_e)-mg\cos\gamma_*\Delta\gamma \tag{6.56}$$

用同样的方法对升力方程，即式(1.36)中的三式进行线性化。利用假设，考虑到 $\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_*=0$，$\beta_*=0,\mu_*=0,C_*=0$，并将 ΔT 和 ΔL 的表达式即式(6.51)、式(6.53)代入，最后得到

$$mV_*\frac{\mathrm{d}\Delta\gamma}{\mathrm{d}t}=(T_V\Delta V+T_H\Delta H+T_{\delta_p}\Delta\delta_p)\sin(\alpha_*+\varphi)+T_*\cos(\alpha_*+\varphi)\Delta\alpha+$$
$$(L_V\Delta V+L_H\Delta H+L_\alpha\Delta\alpha+L_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}+L_q\Delta q+L_{\delta_e}\Delta\delta_e)+mg\sin\gamma_*\Delta\gamma \tag{6.57}$$

对侧力方程线性化，即是对式(6.1)中第二式进行线性化，有

$$m\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+r_*\Delta u+u_*\Delta r-p_*\Delta w-w_*\Delta p\right)=-\Delta D\sin\beta_*-D_*\cos\beta_*\Delta\beta+$$
$$\Delta C\cos\beta_*-C_*\sin\beta_*\Delta\beta-mg\sin\phi_*\sin\theta_*\Delta\theta+mg\cos\phi_*\cos\theta_*\Delta\phi$$

利用假设，$p_*=r_*=\beta_*=\phi_*=0, C_*=0$，于是上式为

$$m\left(\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t}+u_*\Delta r-w_*\Delta p\right)=-D_*\Delta\beta+\Delta C+mg\cos\theta_*\Delta\phi$$

再利用关系式(6.2)和式(6.3)，有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta V}{\mathrm{d}t}=V_*\frac{\mathrm{d}\Delta\beta}{\mathrm{d}t},\qquad u_*=V_*,\qquad w_*=V_*\alpha_*$$

并将 ΔC 表达式(6.52)代入，最后得

$$mV_*\frac{\mathrm{d}\Delta\beta}{\mathrm{d}t}+mV_*\Delta r-mV_*\alpha_*\Delta p=$$
$$-D_*\Delta\beta+(C_\beta\Delta\beta+C_p\Delta p+C_r\Delta r+C_{\delta_r}\Delta\delta_r)+mg\cos\theta_*\Delta\phi \tag{6.58}$$

2. 绕质心转动动力学方程的线性化

首先将倾斜力矩方程，即式(6.14)中第一式进行线性化，注意到惯性矩 I_x, I_y, I_z 和惯性积 I_{zx} 为常数，有

$$I_x\frac{\mathrm{d}\Delta p}{\mathrm{d}t}+(I_z-I_y)(q_*\Delta r+r_*\Delta q)-I_{zx}\left(p_*\Delta q+q_*\Delta p+\frac{\mathrm{d}\Delta r}{\mathrm{d}t}\right)=\Delta L$$

则用假设 $p_*=q_*=r_*=0$，并将倾斜力矩增量 ΔL 的表达式即式(6.55)中第一式代入，最后得

$$I_x\frac{\mathrm{d}\Delta p}{\mathrm{d}t}-I_{zx}\frac{\mathrm{d}\Delta r}{\mathrm{d}t}=L_\beta\Delta\beta+L_p\Delta p+L_r\Delta r+L_{\delta_a}\Delta\delta_a+L_{\delta_r}\Delta\delta_r \tag{6.59}$$

同样，对俯仰力矩和偏航力矩方程线性化，即对式(6.14)中第二、三式线性化，并利用同样的假设，结果为

$$I_y\frac{\mathrm{d}\Delta q}{\mathrm{d}t}=M_V\Delta V+M_H\Delta H+M_\alpha\Delta\alpha+M_{\dot\alpha}\Delta\dot\alpha+M_q\Delta q+M_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{6.60}$$

$$I_z\frac{\mathrm{d}\Delta r}{\mathrm{d}t}-I_{zx}\frac{\mathrm{d}\Delta p}{\mathrm{d}t}=N_\beta\Delta\beta+N_p\Delta p+N_r\Delta r+N_{\delta_a}\Delta_{\delta_a}+N_{\delta_r}\Delta\delta_r \tag{6.61}$$

3. 质心运动学方程的线性化

首先对运动学方程式(1.37)中第一式线性化，有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x_g}{\mathrm{d}t}=\cos\gamma_*\cos\chi_*\Delta V-V_*\sin\gamma_*\cos\chi_*\Delta\gamma-V_*\cos\gamma_*\sin\chi_*\Delta\chi$$

由于$\chi_*=v$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\Delta x_g}{\mathrm{d}t}=\cos\gamma_*\Delta V-V_*\sin\gamma_*\Delta\gamma \tag{6.62}$$

同样地对运动方程式(1.37)第二、三式线性化，结果为



$$\frac{\mathrm{d}\Delta y_g}{\mathrm{d}t} = V_* \cos\gamma_* \Delta\chi \tag{6.63}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta z_g}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}t} = -\sin\gamma_* \Delta V - V_* \cos\gamma_* \Delta\gamma \tag{6.64}$$

4. 绕质心运动学方程的线性化

首先对运动学方程式(6.18)中第一式线性化，有

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\phi}{\mathrm{d}t} = \Delta p + (q_* \sin\phi_* + r_* \cos\phi_*)\Delta(\tan\theta) +$$
$$\tan\theta_* (\sin\phi_* \Delta q + q_* \cos\phi_* \Delta\phi + \cos\phi_* \Delta r - r_* \sin\phi_* \Delta\phi)$$

利用假设 $p_* = q_* = r_* = 0, \phi_* = 0$，最后得

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\phi}{\mathrm{d}t} = \Delta p + \tan\theta_* \Delta r \tag{6.65}$$

同样地对运动方程式(6.18)中第二、三式线性化，结果为

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t} = \Delta q \tag{6.66}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Delta\psi}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\cos\theta_*}\Delta r \tag{6.67}$$

5. 几何关系方程的线性化

首先对几何关系方程式(6.37)进行线性化，有

$$\cos\alpha_* \Delta\alpha = \{[\sin\theta\cos\phi\cos(\psi-\chi) + \sin\phi\sin(\psi-\chi)]\cos\gamma - \sin\gamma\cos\phi\cos\theta\}_* \frac{\sin\beta_*}{\cos^2\beta_*} \cdot \Delta\beta +$$
$$\frac{1}{\cos\beta_*}\{-[\sin\theta\cos\phi\cos(\psi-\chi) + \sin\phi\sin(\psi-\chi)]_* \sin\gamma_* \Delta\gamma +$$
$$\cos\gamma_* [\cos\theta_* \cos\phi_* \cos(\psi_* - \chi_*)\Delta\theta - \sin\theta_* \sin\phi_* \cos(\psi_* - \chi_*)\Delta\phi -$$
$$\sin\theta_* \cos\phi_* \sin(\psi_* - \chi_*)(\Delta\psi - \Delta\chi) + \cos\phi_* \sin(\psi_* - \chi_*)\Delta\phi +$$
$$\sin\phi_* \cos(\psi_* - \chi_*)(\Delta\psi - \Delta\chi)] -$$
$$\cos\gamma_* \cos\phi_* \cos\theta_* \Delta\gamma + \sin\gamma_* \sin\phi_* \cos\theta_* \Delta\phi + \sin\gamma_* \cos\phi_* \sin\theta_* \Delta\theta\}$$

利用假设条件，$\beta_* = \phi_* = \psi_* = \chi_* = 0$，可改写成

$$\cos\alpha_* \Delta\alpha = -\sin\theta_* \sin\gamma_* \Delta\gamma + \cos\gamma_* \cos\theta_* \Delta\theta - \cos\gamma_* \cos\theta_* \Delta\gamma + \sin\gamma_* \sin\theta_* \Delta\theta =$$
$$\sin\theta_* \sin\gamma_* (\Delta\theta - \Delta\gamma) + \cos\gamma_* \cos\theta_* (\Delta\theta - \Delta\gamma) =$$
$$\cos(\theta_* - \gamma_*)(\Delta\theta - \Delta\gamma)$$

由于 $\theta_* - \gamma_* = \alpha_*$，最后上式为

$$\Delta\alpha = \Delta\theta - \Delta\gamma \tag{6.68}$$

类似地，几何关系方程式(6.38)的线性化结果为

$$\Delta\beta = \cos\gamma_* (\Delta\psi - \Delta\chi) + \sin\alpha_* \Delta\phi \tag{6.69}$$

几何关系式(6.40)的线性化结果为



$$\Delta\mu = \tan\gamma_* \Delta\beta + \frac{\cos\theta_*}{\cos\gamma_*}\Delta\phi \tag{6.70}$$

仔细观察所得到的线性化方程，就能发现这些方程可以划分成互相独立的两组。

方程式(6.56)、式(6.57)、式(6.60)、式(6.62)、式(6.64)、式(6.66)和式(6.68)只包含纵向扰动运动变量 $\Delta V, \Delta\gamma, \Delta x_g, \Delta z_g(\Delta H), \Delta\alpha, \Delta q, \Delta\theta, \Delta\delta_e, \Delta\delta_p$，故由这些方程组成的方程组称为纵向小扰动运动方程组。

方程式(6.58)、式(6.59)、式(6.61)、式(6.63)、式(6.65)、式(6.67)、式(6.69)和式(6.70)只包含横侧扰动运动变量 $\Delta\beta, \Delta\phi, \Delta p, \Delta r, \Delta\psi, \Delta\chi, \Delta\mu, \Delta y_g, \Delta\delta_a, \Delta\delta_r$，故由这些方程组成的方程组称为横侧小扰动运动方程组。

可见，在基准运动为铅垂平面内对称定常直线飞行条件下，的确可以把小扰动运动方程分离成相互独立的方程组，这样飞行器的纵向扰动运动和横侧扰动运动就可以分开处理了。

6.5 纵向小扰动运动方程组

6.5.1 纵向小扰动方程的自然形式

为便于分析应用，可把纵向方程组进行适当整理：① 将方程组分成两类：其中一类互相影响而必须联立求解，称为耦合方程；另一类可以在耦合方程解出以后单独求解，而不影响其他方程，称为非耦合方程。② 利用 $\Delta\gamma = \Delta\theta - \Delta\alpha$ 和 $\Delta q = \dfrac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}$ 的关系，在耦合方程中消去变量 $\Delta\gamma$ 和 Δq。③ 在耦合方程中，按变量 $\Delta V, \Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta H$ 的顺序排列，作为输出量放在等式左端；而把 $\Delta\delta_e$ 和 $\Delta\delta_p$ 作为输入量放在等式右端。经整理后，飞行器纵向小扰动方程如下：

耦合的方程组(包含 $\Delta V, \Delta\alpha, \Delta\theta, \Delta H, \Delta\delta_e, \Delta\delta_n$ 六个变量)

$$\left.\begin{aligned}
&\left\{m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} - [T_V\cos(\alpha_* + \varphi) - D_V]\right\}\Delta V + [T_*\sin(\alpha_* + \varphi) + D_\alpha - mg\cos\gamma_*]\Delta\alpha + \\
&\qquad mg\cos\Delta\gamma_*\Delta\theta - [T_H\cos(\alpha_* + \varphi) - D_H]\Delta H = \\
&\qquad -D_{\delta_e}\Delta\delta_e + T_{\delta_p}\cos(\alpha_* + \varphi)\Delta\delta_p \\
&-[T_V\sin(\alpha_* + \varphi) + L_V]\Delta V - \left\{(L_{\dot\alpha} + mV_*)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + [L_\alpha + T_*\cos(\alpha_* + \varphi) - mg\sin\gamma_*]\right\}\Delta\alpha - \\
&\qquad \left[(L_q - mV_*)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + mg\sin\gamma_*\right]\Delta\theta - [T_H\sin(\alpha_* + \varphi) + L_H]\Delta H = \\
&\qquad L_{\delta_e}\Delta\delta_e + T_{\delta_p}\sin(\alpha_* + \varphi)\Delta\delta_p \\
&-M_V\Delta V - \left(M_{\dot\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} + M_\alpha\right)\Delta\alpha + \left(I_y\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} - M_q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Delta\theta - M_H\Delta H = M_{\delta_e}\Delta\delta_e \\
&\sin\gamma_*\Delta V - V_*\cos\gamma_*\Delta\alpha + V_*\cos\gamma_*\Delta\theta + \frac{\mathrm{d}\Delta H}{\mathrm{d}t} = 0
\end{aligned}\right\} \tag{6.71}$$



非耦合的方程组(包括 $\Delta\gamma,\Delta q,\Delta x_g$ 三个变量)

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\gamma=\Delta\theta-\Delta\alpha\\&\Delta q=\frac{d\Delta\theta}{dt}\\&\frac{d\Delta x_g}{dt}=\cos\gamma_*\Delta V-V_*\sin\gamma_*\Delta\gamma\end{aligned}\right\}\tag{6.72}$$

线性方程组式(6.71)仍保持其原来的(线性化以前的)物理含义。第一式是切向力(或称阻力)方程;第二式是法向力(或称升力)方程;第三式是俯仰力矩方程;第四式是高度变化方程。因此,称它为自然形式的方程组。

研究飞行器纵向稳定性和操纵性时,当给定 $\Delta\delta_e$ 和 $\Delta\delta_p$ 后,由方程式(6.71)可得到运动变量 $\Delta V,\Delta\alpha,\Delta\theta,\Delta H$ 的动态响应,以便研究飞行器的操纵性;若令 $\Delta\delta_e=0,\Delta\delta_p=0$,则由该方程可得飞行器的纵向自由扰动运动,以便研究飞行器的运动稳定性。

为将上述方程组写得简洁些,使用起来方便,下面引入纵向动力学导数,简称动力系数:

$$\left.\begin{aligned}&X_V=[T_V\cos(\alpha_*+\varphi)-D_V]/m\\&X_\alpha=[-T_*\sin(\alpha_*+\varphi)-D_\alpha]/m\\&X_H=[T_H\cos(\alpha_*+\varphi)-D_H]/m\\&X_{\delta_e}=-D_{\delta_e}/m\\&X_{\delta_p}=T_{\delta_p}\cos(\alpha_*+\varphi)/m\\&Z_V=[T_V\sin(\alpha_*+\varphi)+L_V]/mV_*\\&Z_\alpha=[L_\alpha+T_*\cos(\alpha_*+\varphi)]/mV_*\\&Z_{\dot\alpha}=L_{\dot\alpha}/mV_*\\&Z_q=L_q/mV_*\\&Z_H=[T_H\sin(\alpha_*+\varphi)+L_H]/mV_*\\&Z_{\delta_e}=L_{\delta_e}/mV_*\\&Z_{\delta_p}=T_{\delta_p}\sin(\alpha_*+\varphi)/mV_*\\&\overline{M}_V=M_V/I_y\\&\overline{M}_\alpha=M_\alpha/I_y\\&\overline{M}_{\dot\alpha}=M_{\dot\alpha}/I_y\\&\overline{M}_q=M_q/I_y\\&\overline{M}_H=M_H/I_y\\&\overline{M}_{\delta_e}=M_{\delta_e}/I_y\end{aligned}\right\}\tag{6.73}$$

显然,这些系数均表示推力和气动力,或气动力矩对运动参数的导数。耦合的纵向小扰动方程式(6.71)可写成

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-X_V\right)\Delta V-(X_\alpha+g\cos\gamma_*)\Delta\alpha+g\cos\gamma_*\Delta\theta-X_H\Delta H=X_{\delta_e}\Delta\delta_e+X_{\delta_p}\Delta\delta_p\\&\quad -Z_V\Delta V-\left[(Z_{\dot\alpha}+1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+Z_\alpha-\frac{g}{V_*}\sin\gamma_*\right]\Delta\alpha-\left[(Z_q-1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{V_*}\sin\gamma_*\right]\Delta\theta-\\&\quad Z_H\Delta H=Z_{\delta_e}\Delta\delta_e+Z_{\delta_p}\Delta\delta_p\\&\quad -\overline{M}_V\Delta V-\left(\overline{M}_{\dot\alpha}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+\overline{M}_\alpha\right)\Delta\alpha+\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}-\overline{M}_q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)\Delta\theta-\overline{M}_H\Delta H=\overline{M}_{\delta_e}\Delta\delta_e\\&\quad \sin\gamma_*\Delta V-V_*\cos\gamma_*\Delta\alpha+V_*\cos\gamma_*\Delta\theta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Delta H=0\end{aligned}\right\}\tag{6.74}$$

6.5.2 纵向小扰动方程的矩阵形式

因为在计算机上一般都备有矩阵运算的标准程序,故将微分方程写成矩阵形式,不仅可使方程形式简洁清晰,而且便于用计算机求解。正因如此,飞行器小扰动运动方程的矩阵形式得到日益广泛的运用。为此先要将小扰动运动方程变换成如下的标准形式:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu}\tag{6.75}$$

式中 $\boldsymbol{x}$ 是 n 维状态矢量;

$\boldsymbol{A}$ 是 $n\times n$ 维系统矩阵;

$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 维控制矩阵;

$\boldsymbol{u}$ 是 m 维控制矢量。

此时,取 $\boldsymbol{x}=[\Delta V,\Delta\alpha,\Delta q,\Delta\theta,\Delta H]^{\mathrm{T}}$ 作为状态变量,$\boldsymbol{u}=[\Delta\delta_e,\Delta\delta_p]^{\mathrm{T}}$ 作为控制变量。再令方程式(6.74)第二、三式中的$\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}=\Delta q$,$\frac{\mathrm{d}^2\Delta\theta}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$;由第二式求得$\frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t}$表达式,代入第三式消去$\frac{\mathrm{d}\Delta\alpha}{\mathrm{d}t}$项,经简单整理后,即得纵向小扰动运动方程的矩阵形式:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta V\\\Delta\alpha\\\Delta q\\\Delta\theta\\\Delta H\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_V & X_\alpha+g\cos\gamma_*\\ -\dfrac{Z_V}{1+Z_{\dot\alpha}} & -\dfrac{Z_\alpha-g\sin\gamma_*/V_*}{1+Z_{\dot\alpha}}\\ \overline{M}_V-\dfrac{\overline{M}_{\dot\alpha}Z_V}{1+Z_{\dot\alpha}} & \overline{M}_\alpha-\dfrac{\overline{M}_{\dot\alpha}(Z_\alpha-g\sin\gamma_*/V_*)}{1+Z_{\dot\alpha}}\\ 0 & 0\\ -\sin\gamma_* & +V_*\cos\gamma_*\end{matrix}$$



$$
\begin{array}{ccc}
0 & -g\cos\gamma_* & X_H \\
\dfrac{1-Z_q}{1+Z_{\dot\alpha}} & \dfrac{-g\sin\gamma_*/V_*}{1+Z_{\dot\alpha}} & -\dfrac{Z_H}{1+Z_{\dot\alpha}} \\
\bar{M}_q+\dfrac{\bar{M}_{\dot\alpha}(1-Z_q)}{1+Z_{\dot\alpha}} & \dfrac{-\bar{M}_{\dot\alpha}g\sin\gamma_*/V_*}{1+Z_{\dot\alpha}} & \bar{M}_H-\dfrac{\bar{M}_{\dot\alpha}Z_H}{1+Z_{\dot\alpha}} \\
1 & 0 & 0 \\
0 & -V_*\cos\gamma_* & 0
\end{array}\left]\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\\ \Delta H\end{bmatrix}\right.+
$$

$$
\begin{bmatrix}
X_{\delta_e} & X_{\delta_p} \\
-\dfrac{Z_{\delta_e}}{1+Z_{\dot\alpha}} & -\dfrac{Z_{\delta_p}}{1+Z_{\dot\alpha}} \\
\bar{M}_{\delta_e}-\dfrac{\bar{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_e}}{1+Z_{\dot\alpha}} & \bar{M}_{\delta_p}-\dfrac{\bar{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_p}}{1+Z_{\dot\alpha}} \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta\delta_e\\ \Delta\delta_p\end{bmatrix}
\tag{6.76}
$$

非耦合方程则为

$$
\left.\begin{aligned}
&\Delta\gamma=\Delta\theta-\Delta\alpha\\
&\frac{\mathrm{d}\Delta x_g}{\mathrm{d}t}=\cos\gamma_*\Delta V-V_*\sin\gamma_*\Delta\gamma
\end{aligned}\right\}
$$

6.5.3　纵向小扰动方程的简化形式

在多数情况下，研究飞行器的纵向扰动运动时可以忽略 $L_{\dot\alpha}$ 和 L_q，即 $Z_{\dot\alpha}$ 和 Z_q。于是方程可进一步简化。

1. 简化情况Ⅰ

基准运动为水平直线飞行，即 $\gamma_*=0$。方程的矩阵形式可表示为

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\\ \Delta H\end{bmatrix}=
\begin{bmatrix}
X_V & X_\alpha+g & 0 & -g & X_H \\
-Z_V & -Z_\alpha & 1 & 0 & -Z_H \\
\bar{M}_V-\bar{M}_{\dot\alpha}Z_V & \bar{M}_\alpha-\bar{M}_{\dot\alpha}Z_\alpha & \bar{M}_q+\bar{M}_{\dot\alpha} & 0 & \bar{M}_H-\bar{M}_{\dot\alpha}Z_H \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & V_* & 0 & -V_* & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\\ \Delta H\end{bmatrix}+
$$

$$
\begin{bmatrix}
X_{\delta_e} & X_{\delta_p} \\
-Z_{\delta_e} & -Z_{\delta_p} \\
\bar{M}_{\delta_e}-\bar{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_e} & \bar{M}_{\delta_p}-\bar{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_p} \\
0 & 0 \\
0 & 0
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}\Delta\delta_e\\ \Delta\delta_p\end{bmatrix}
\tag{6.77}
$$

该方程可以用来研究飞行器的水平巡航飞行特性，特别是飞行高度稳定性问题。

2. 简化情况Ⅱ

如果不计扰动运动中高度变化引起的外力和力矩的影响，即 $X_H=Z_H=\overline{M}_H=0$，则此时高度变化方程可以独立求解。方程的矩阵形式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_V & X_\alpha+g\cos\gamma_* & 0 & -g\cos\gamma_*\\ -Z_V & -Z_\alpha+g\sin\gamma_*/V_* & 1 & -g\sin\gamma_*/V_*\\ \overline{M}_V-\overline{M}_{\dot\alpha}Z_V & \overline{M}_\alpha-\overline{M}_{\dot\alpha}(Z_\alpha-g\sin\gamma_*/V_*) & \overline{M}_q+\overline{M}_{\dot\alpha} & -\overline{M}_{\dot\alpha}g\sin\gamma_*/V_*\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}X_{\delta_\mathrm{e}} & X_{\delta_\mathrm{p}}\\ -Z_{\delta_\mathrm{e}} & -Z_{\delta_\mathrm{p}}\\ \overline{M}_{\delta_\mathrm{e}}-\overline{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_\mathrm{e}} & \overline{M}_{\delta_\mathrm{p}}-\overline{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_\mathrm{p}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_\mathrm{e}\\ \Delta\delta_\mathrm{p}\end{bmatrix} \tag{6.78}$$

3. 简化情况Ⅲ

如果仅研究扰动初始阶段的情况，则由于时间较短，扰动引起的速度变化不大，故可略去速度变化引起的外力和力矩影响，即

$$X_V=Z_V=\overline{M}_V=0$$

此外油门杆的操纵 $\Delta\delta_\mathrm{p}$ 实际意义不大。于是方程(6.78)进一步简化为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-Z_\alpha+g\sin\gamma_*/V_* & 1 & -g\sin\gamma_*/V_*\\ \overline{M}_\alpha-\overline{M}_{\dot\alpha}(Z_\alpha-g\sin\gamma_*/V_*) & \overline{M}_q+\overline{M}_{\dot\alpha} & -\overline{M}_{\dot\alpha}g\sin\gamma_*/V_*\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-Z_{\delta_\mathrm{e}}\\ \overline{M}_{\delta_\mathrm{e}}-\overline{M}_{\dot\alpha}Z_{\delta_\mathrm{e}}\\ 0\end{bmatrix}\Delta\delta_\mathrm{e} \tag{6.79}$$

在分析飞行器短周期模态特性时，上述简化情况还采用方程的自然形式，为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta\gamma}{\mathrm{d}t}&=Z_\alpha\Delta\alpha+\frac{g}{V}\sin\gamma_*\Delta\gamma+Z_{\delta_\mathrm{e}}\Delta\delta_\mathrm{e}\\ \frac{\mathrm{d}\Delta q}{\mathrm{d}t}&=\overline{M}_\alpha\Delta\alpha+\overline{M}_q\Delta q+\overline{M}_{\dot\alpha}\Delta\dot\alpha+\overline{M}_{\delta_\mathrm{e}}\Delta\delta_\mathrm{e}\\ \frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}&=\Delta q\\ \Delta\alpha&=\Delta\theta-\Delta\gamma\end{aligned}\right\} \tag{6.80}$$

如果基准运动为水平直线飞行，即 $\gamma_*=0$，于是得到最常用的短周期运动近似方程



$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\Delta\gamma}{\mathrm{d}t}=Z_{\alpha}\Delta\alpha+Z_{\delta_{\mathrm{e}}}\Delta\delta_{\mathrm{e}}\\
&\frac{\mathrm{d}\Delta q}{\mathrm{d}t}=\overline{M}_{\alpha}\Delta\alpha+\overline{M}_{q}\Delta q+\overline{M}_{\dot{\alpha}}\Delta\dot{\alpha}+\overline{M}_{\delta_{\mathrm{e}}}\Delta\delta_{\mathrm{e}}\\
&\frac{\mathrm{d}\Delta\theta}{\mathrm{d}t}=\Delta q\\
&\Delta\alpha=\Delta\theta-\Delta\gamma
\end{aligned}\right\}\tag{6.81}$$

对于轴对称导弹来说，通常具有倾斜稳定自动器，其偏航小扰动运动方程与纵向短周期扰动方程式(6.81)是相同的。

6.6　横侧小扰动运动方程组

6.6.1　横侧小扰动方程的自然形式

由于所考虑的基准运动是对称运动，其中所有横侧变量 β_*，p_*，r_*，ϕ_*，ψ_*，χ_*，y_g，μ_* 都等于零，因此其横侧扰动偏量为

$$\Delta\beta=\beta-\beta_*=\beta,\qquad \Delta p=p-p_*=p,\quad \cdots$$

即扰动偏量就等于变量的全量，故以后使用时不再加前置符号 Δ。

类似于纵向扰动方程组的处理方法，先将方程划分为耦合和非耦合的两类；在耦合方程组中，按变量 $\beta,p,\gamma,\phi,\delta_{\mathrm{a}},\delta_{\mathrm{r}}$ 的顺序排列，并把输入量 $\delta_{\mathrm{a}},\delta_{\mathrm{r}}$ 放在等式右端，前面四个输出量 β,γ,r,ϕ 放在等式左端。经过整理后的飞行器横侧小扰动方程如下：

耦合的方程组(包含 $\beta,p,r,\phi,\delta_{\mathrm{e}},\delta_{\mathrm{r}}$ 六个变量)

$$\left.\begin{aligned}
&\left[mV_*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-(C_{\beta}-D_*)\right]\beta-(mV_*\alpha_*+C_p)p+(mV_*-C_r)r-\\
&mg\cos\theta_*\phi=C_{\delta_{\mathrm{r}}}\delta_{\mathrm{r}}\\
&-L_{\beta}\beta+\left(I_x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-L_p\right)p-\left(I_{zx}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+L_r\right)r=L_{\delta_{\mathrm{a}}}\delta_{\mathrm{a}}+L_{\delta_{\mathrm{r}}}\delta_{\mathrm{r}}\\
&-N_{\beta}\beta-\left(I_{zx}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}+N_p\right)p+\left(I_z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}-N_r\right)r=N_{\delta_{\mathrm{a}}}\delta_{\mathrm{a}}+N_{\delta_{\mathrm{r}}}\delta_{\mathrm{r}}\\
&-p-\tan\theta_*r+\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=0
\end{aligned}\right\}\tag{6.82}$$

非耦合的方程(包括 ψ,χ,y_g,μ 四个变量)



$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t} &= \frac{1}{\cos\theta_*}r \\
\chi &= \psi - \frac{\beta - \sin\alpha_*\phi}{\cos\gamma_*} \\
\frac{\mathrm{d}y_g}{\mathrm{d}t} &= V_*\cos\gamma_*\chi \\
\mu &= \tan\gamma_*\beta + \frac{\cos\theta_*}{\cos\gamma_*}\phi
\end{aligned}\right\} \tag{6.83}
$$

6.6.2 横侧小扰动方程的矩阵形式

由于惯性积 I_{zx} 的存在，横侧耦合运动方程组式(6.82)不是一阶线性微分方程组的标准形式，因而不能直接写成矩阵形式。为此首先采用"修正导数法"，从形式上消去方程中的 I_{zx} 项。取原来的小扰动倾斜力矩方程式(6.59)和偏航力矩方程式(6.61)，则

$$
\left.\begin{aligned}
I_x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} - I_{zx}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= L \\
-I_{zx}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + I_z\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= N
\end{aligned}\right\} \tag{6.84}
$$

由此解出

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} &= \frac{I_zL + I_{zx}N}{I_xI_z - I_{zx}^2} = \frac{L + (I_{zx}/I_z)N}{I_x - I_{zx}^2/I_z} \\
\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= \frac{I_xN + I_{zx}L}{I_xI_z - I_{zx}^2} = \frac{N + (I_{zx}/I_x)L}{I_z - I_{zx}^2/I_x}
\end{aligned}\right\} \tag{6.85}
$$

然后将横侧力矩表达式(6.55)代入，并分别求导，得出修正的横侧向动力学导数

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{L}_i &= \frac{L_i + (I_{zx}/I_z)N_i}{I_x - I_{zx}^2/I_z} \\
\overline{N}_i &= \frac{N_i + (I_{zx}/I_x)L_i}{I_z - I_{zx}^2/I_x} \qquad (i = \beta, p, r, \delta_a, \delta_r)
\end{aligned}\right\} \tag{6.86}
$$

同时还引入侧向力方程中的动力学导数

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{Y}_\beta &= (C_\beta - D_*)/mV_* \\
\overline{Y}_i &= C_i/mV_* \qquad (i = p, r, \delta_r)
\end{aligned}\right\} \tag{6.87}
$$

于是方程组式(6.82)可以表示成矩阵形式

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\beta \\ p \\ r \\ \phi\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\overline{Y}_\beta & \alpha_* + \overline{Y}_p & \overline{Y}_r - 1 & g\cos\theta_*/V_* \\ \overline{L}_\beta & \overline{L}_p & \overline{L}_r & 0 \\ \overline{N}_\beta & \overline{N}_p & \overline{N}_r & 0 \\ 0 & 1 & \tan\theta_* & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta \\ p \\ r \\ \phi\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0 & \overline{Y}_{\delta_r} \\ \overline{L}_{\delta_a} & \overline{L}_{\delta_r} \\ \overline{N}_{\delta_a} & \overline{N}_{\delta_r} \\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_a \\ \delta_r\end{bmatrix} \tag{6.88}
$$



6.6.3 横侧小扰动方程的简化形式

在研究轴对称导弹的横侧扰动运动时，由于其构形特点，飞行器对纵轴对称，惯性积 $I_{zx}=0$；为保持纵横向正常操纵，一般弹上装有倾斜稳定自动器，因此在同样的小扰动条件下，导弹的横侧扰动运动可以分为横向(倾斜)和侧向(偏航)运动单独处理，且偏航扰动方程与纵向短周期扰动方程类同。故初步设计时，认为导弹的纵向短周期运动特性同样适用于偏航运动，纵向和航向的自动器可以是同类型的。

下面开始建立轴对称导弹的横侧简化扰动方程。轴对称导弹的横侧扰动方程与前面建立的横侧扰动方程相比，仅有一点不同，即其中的侧力方程采用了航迹轴系投影的形式。为此，首先用同样的方法通过对式(1.36)中第二式线性化，随后与其他横侧方程组成下列方程组：

$$\left.\begin{aligned}
& mV_*\cos\gamma_*\frac{\mathrm{d}\Delta\chi}{\mathrm{d}t}=[T_*\sin(\alpha_*+\varphi)+L_*]\Delta\mu+[-T_*\cos(\alpha_*+\varphi)+\\
& C_\beta]\Delta\beta+C_{\delta_r}\Delta\delta_r\\
& I_x\frac{\mathrm{d}\Delta p}{\mathrm{d}t}=L_\beta\Delta\beta+L_p\Delta p+L_r\Delta r+N_{\delta_a}\Delta\delta_a+N_{\delta_r}\Delta\delta_r\\
& \frac{\mathrm{d}\Delta\psi}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\cos\theta_*}\Delta r\\
& \frac{\mathrm{d}\Delta\phi}{\mathrm{d}t}=\Delta p+\tan\theta_*\Delta r\\
& \Delta\chi=\Delta\psi-\frac{\Delta\beta-\sin\alpha_*\Delta\phi}{\cos\gamma_*}\\
& \Delta\mu=\tan\gamma_*\Delta\beta+\frac{\cos\theta_*}{\cos\gamma_*}\Delta\phi
\end{aligned}\right\}\quad(6.89)$$

现对式(6.89)中第一式作某些变换。其中右端第一项的系数$[T_*\sin(\alpha_*+\varphi_*)+L_*]$，可由方程式(1.36)中第三式近似求得，即

$$[T_*\sin(\alpha_*+\varphi)+L_*]\approx mV_*\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_*+mg\cos\gamma_*$$

而变量 $\Delta\mu$ 用几何关系式代替。于是利用小扰动假设后，有

$$[T_*\sin(\alpha_*+\varphi)+L_*]\Delta\mu=\left[mV_*\left(\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)_*+mg\cos\gamma_*\right]\cdot\left[\tan\gamma_*\Delta\beta+\frac{\cos\theta_*}{\cos\gamma_*}\Delta\phi\right]=$$
$$mg\sin\gamma_*\Delta\beta+mg\cos\theta_*\Delta\phi\quad(6.90)$$

将式(6.90)代回方程组式(6.89)的第一式，可改写成

$$mV_*\cos\gamma_*\frac{\mathrm{d}\Delta\chi}{\mathrm{d}t}=[C_\beta-T_*\cos(\alpha_*+\varphi_*)+mg\sin\gamma_*]\Delta\beta+$$
$$mg\cos\theta_*\Delta\phi+C_{\delta_r}\Delta\delta_r\quad(6.91)$$

如果基准运动为水平直线飞行，则 $\gamma_*=0$；考虑到滚转稳定自动器的作用，扰动中 $\Delta\phi$ 值较小，

可以略去重力在侧力方程中的影响(即 $mg\cos\theta_{*}\Delta\phi$),侧力方程可进一步简化。横侧向力矩方程中,其气动交联力矩系数相对较小,可近似不计,即 $L_r=N_p=0$;且计及侧洗时差的影响,即存在 $N_{\dot\beta}$ 项;略去副翼偏转产生的偏航力矩,即 $N_{\delta_a}=0$。于是横侧扰动运动方程可以分离成两组方程,为飞行器的偏航扰动运动方程和滚转扰动运动方程。

类似地引入动力学系数为

$$\left.\begin{aligned}\bar{Y}_\beta &= [C_\beta - T_{*}\cos(\alpha_{*}+\varphi_{*})]/mV_{*}\\ \bar{Y}_{\delta_r} &= C_{\delta_r}/mV_{*}\\ \bar{L}_i &= L_i/I_x\\ \bar{N}_i &= N_i/I_z \qquad (i=\beta,p,\gamma,\delta_a,\delta_r)\end{aligned}\right\} \tag{6.92}$$

考虑同样的原因,基准运动时横侧向运动参数均为零,故在写下面方程时将"Δ"略去。

偏航扰动运动方程

$$\left.\begin{aligned}\frac{d\chi}{dt} &= \bar{Y}_\beta\beta+\bar{Y}_{\delta_r}\delta_r\\ \frac{dr}{dt} &= \bar{N}_\beta\beta+\bar{N}_r r+\bar{N}_{\dot\beta}\dot\beta+\bar{N}_{\delta_r}\delta_r\\ \frac{d\psi}{dt} &= r\\ \beta &= \psi-\chi\end{aligned}\right\} \tag{6.93}$$

显见,方程组与纵向短周期扰动方程组式(6.81)是类同的。

滚转扰动运动方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \bar{L}_p p+\bar{L}_{\delta_a}\delta_a+(\bar{L}_\beta\beta+\bar{L}_{\delta_r}\delta_r)\\ \frac{d\phi}{dt} &= p\end{aligned}\right\} \tag{6.94}$$

式中$(\bar{L}_\beta\beta+\bar{L}_{\delta_r}\delta_r)$项,是偏航运动参数引起的滚转力矩。此时可认为它是已知函数,作为干扰处理,先研究导弹的偏航扰动运动,之后再研究其倾斜扰动运动。

复习思考题

6.1 推导飞行器动力学方程过程中用到哪些主要简化假设?试问如考虑发动机旋转部件的影响,设发动机旋转部件转动惯量为 I_p,转速为 ω_p,旋转方向与 Ox_b 轴相重合,则式(6.13)的惯性项中有什么变化?

6.2 试用力学概念,说明飞行器动力学方程式(6.13)左端各项形成的物理原因。

6.3 飞行器扰动运动分离为纵向和横侧向运动独立研究,应满足哪些条件?

6.4 试线性化航迹坐标系中投影的侧力方程:



$$mV\cos\gamma\frac{d\chi}{dt}=T[\sin(\alpha+\varphi)\sin\mu-\cos(\alpha+\varphi)\sin\beta\cos\mu]+C\cos\mu+L\sin\mu$$

6.5　某飞机以 $\alpha=40°$绕速度矢量滚转(如图 6.3 所示),试求出飞机姿态角(欧拉角)的时域响应并绘成曲线。

6.6　某飞机的尾旋运动如图 6.4 所示,其角速度在体轴的分量为

$$p=\Omega\cos\alpha,\qquad q=0,\qquad r=\Omega\sin\alpha$$

式中 Ω 为飞机绕尾旋轴的角速度,通过质心垂直向下,试用欧拉角法和四元数法确定在 $\alpha=30°$,45°和 60°下的飞机姿态角(欧拉角)的变化规律。

6.7　某飞机模型在低速风洞中试验,测得在 $\alpha=30°$,$\beta=10°$和 $\phi=10°$下作用模型上的体轴分量分别为 $A_x=79$ N,$A_y=12$ N 和 $A_z=-333$ N,试确定:①转换矩阵 L_{wb};② 作用在模型上的升力 L、阻力 D 和侧力 C。

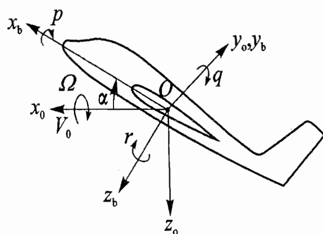


图 6.3　绕速度矢量滚转中的飞机

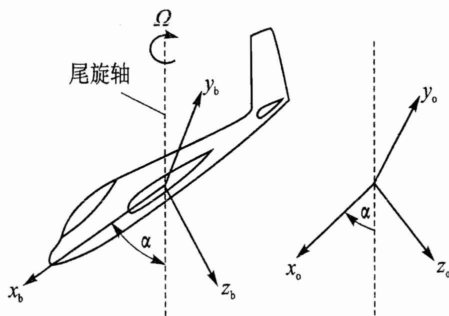


图 6.4　尾旋运动中的飞机

第7章　飞行器的纵向平衡、静稳定和静操纵

在研究飞行器性能和轨迹特性中，曾讨论过作用在飞行器上外力的平衡问题，而外力矩则认为处于瞬态平衡的状态。实际飞行过程中，飞行器能否保持外力矩平衡以及怎样通过偏转操纵机构来保持不同飞行状态下的力矩平衡，这些问题在很大程度上决定了飞行器能否实现设计所要求的飞行性能。故在讨论完飞行器性能和轨迹特性后，需要研究不同飞行状态下作用在飞行器上的外力矩，以及保持力矩平衡的条件；在平衡状态基础上，讨论飞行器受瞬时干扰后是否具有恢复到原来平衡状态的趋势，即飞行器的静稳定性；还需讨论飞行器从一个平衡状态转入另一个平衡状态所需的最终操纵机构偏角或驾驶杆力，即飞行器的静操纵性。

一般情况下，飞行器存在一个纵向对称平面，在略去一些次要因素后，总可将飞行器纵向和横侧向的平衡、静稳定和静操纵分开进行讨论。本章将介绍飞行器的纵向平衡、静稳定和静操纵；第8章介绍飞行器横侧向平衡、静稳定和静操纵。

飞行器的纵向力矩的作用是将绕 Oy_b 轴作抬头或低头转动，故又称为俯仰力矩。它通常为状态变量和操纵变量的函数，表示为

$$M = f(Ma, \alpha, \dot{\alpha}, q, \delta_e, \delta_{T_y})$$

式中括号内的参数 Ma 为马赫数；δ_e 为升降舵或全动平尾偏角；δ_{T_y} 为俯仰燃气舵或推力矢量偏角。当这些变量较小时，上式可用近似的线性关系表示为

$$M = M_0 + M_\alpha \alpha + M_{\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_q q + M_{\delta_e} \delta_e + M_{\delta_{T_y}} \delta_{T_y} \tag{7.1}$$

式中零升力矩 M_0 和各力矩导数均为马赫数和飞行器外形的函数。

飞行器作大机动飞行时，某些横侧运动参数，如 β, p 等对俯仰力矩有影响，但须视具体情况来定。

下面首先介绍式(7.1)中的各项俯仰力矩特性，随后讨论飞行器纵向平衡、静稳定和静操纵。

7.1　静稳定力矩

迎角 α 引起的那部分俯仰力矩，谓之纵向静稳定力矩。其随 α 变化的规律曲线可以由风洞吹风试验得出，也可以通过近似估算。下面将简要介绍其估算方法。

7.1.1　静稳定力矩的组成

全机纵向静稳定力矩是由飞行器各部件产生的力矩之和来表示。



1. 机翼(弹翼)部分

在给定马赫数下,当机翼存在迎角 α 时,机翼上将产生升力和阻力,其气动合力 R_w一般不通过飞行器的质心,因而绕质心产生纵向力矩。R_w的作用点谓之机翼压力中心,它离平均气动弦 c 前缘为 $x_{pc.w}$,如图 7.1 所示。而图中 $x_{c.g}$为飞行器质心位置,于是机翼的纵向力矩表示为

$$M_w = R_w(x_{c.g} - x_{pc.w})$$

但随着迎角 α 的改变,气动力 R_w和压力中心 $x_{pc.w}$都将随之变化,这对研究纵向力矩随 α 的变化不十分方便。因此,按空气动力学理论,机翼上的气动力可表示成在机翼平均气弦 c 的某参考点 $F_{ac.w}$处,作用有升力 L_w、阻力 D_w和绕 $F_{ac.w}$点的纵向力矩 $M_{ac.w}$的形式,如图 7.2 所示。此时下标"w"代表机翼。

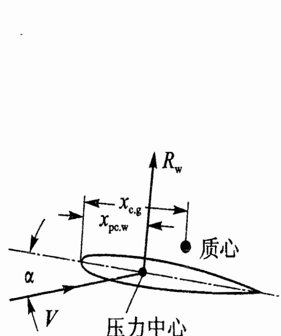


图 7.1　机翼的压力中心

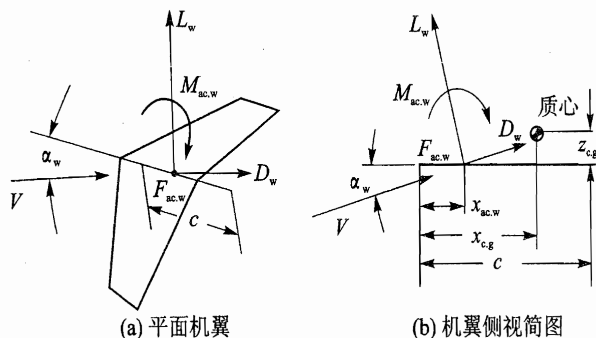


图 7.2　机翼的纵向气动力及力矩

参考点 $F_{ac.w}$常选取机翼的焦点,或称气动中心。在焦点处当迎角变化时,气动力对该点力矩始终保持不变,故焦点又可以看成是迎角变化所产生的升力增量作用点。绕焦点的纵向力矩即为零升力矩,即 $M_{ac.w}=M_{0.w}$。这一特点对研究纵向静稳定性会带来很大方便。

随着马赫数改变,焦点位置会发生变化。低速情况焦点位于离平均气动弦 c 前缘 0.23～0.24 弦长处;超声速时,则位于接近平均气动弦中点处。

此时,机翼上气动力对飞行器质心的纵向力矩,由图 7.2(b)可得

$$M_w = M_{ac.w} + (L_w\cos\alpha_w + D_w\sin\alpha_w)(\bar{x}_{c.g} - \bar{x}_{ac.w})c = (L_w\sin\alpha_w - D_w\cos\alpha_w)\bar{z}_{c.g}c \tag{7.2}$$

式中 $\bar{x}_{ac.w}=x_{ac.w}/c$,$\bar{x}_{c.g}=x_{c.g}/c$ 和 $\bar{z}_{c.g}=z_{c.g}/c$。其中 $x_{c.g}$,$z_{c.g}$分别为飞行器质心距平均气动弦前缘和距平均气动弦的垂直距离。

考虑到小迎角的情况,且 $L_w\gg D_w$,$x_{c.g}\gg z_{c.g}$,上式可简化为

$$M_w = M_{ac.w} + L_w(x_{c.g} - x_{ac.w})$$

将上式除以 qSc,化成力矩系数形式为

$$C_{m.w} = C_{m.ac.w} + C_{L.w}(\bar{x}_{c.g} - \bar{x}_{ac.w}) \tag{7.3}$$

式中 $C_{m.ac.w}$ 相当于 $C_{L.w}=0$ 时的纵向力矩系数，习惯上用 $C_{m0.w}$ 表示，于是上式又可写成

$$C_{m.w} = C_{m0.w} + C_{L.w}(\bar{x}_{c.g} - \bar{x}_{ac.w}) \tag{7.4}$$

显然，$C_{m0.w}$ 的值与机翼翼型的弯度有关。若具有正弯度翼型，无扭转机翼，则 $C_{m0.w}$ 为负值；若具有负弯度翼型，则 $C_{m0.w}$ 为正值；对于无弯度翼型（即对称翼型）的机翼，$C_{m0.w}$ 等于零，表明机翼的焦点（气动中心）与压力中心重合，即 $x_{ac.w}=x_{pc.w}$。

2. 机身（弹身）部分

现代飞行器的机身接近旋成体，按理想流体考虑，在一定迎角下，其气动合力为零，只存在一个力偶矩。但由于机翼涡系（附着涡、自由涡）对机身绕流的诱导作用，正迎角下使得机翼前面机身部位的正升力加大；机翼后面机身部位的负升力减小。因此翼身组合情况下的机身上也会出现升力和小迎角下大致随迎角线性变化的纵向力矩。另一方面，由于机身横向绕流对周围流场有上洗作用，改变了机翼展向有效迎角分布。其作用对中单翼来说比较明显，越接近机身，机翼有效迎角越大。迎角变化导致翼展向载荷分布的变化，因此也影响机翼的气动特性。图 7.3 给出了翼身组合体相互干扰的流场示意图（亚声速）。

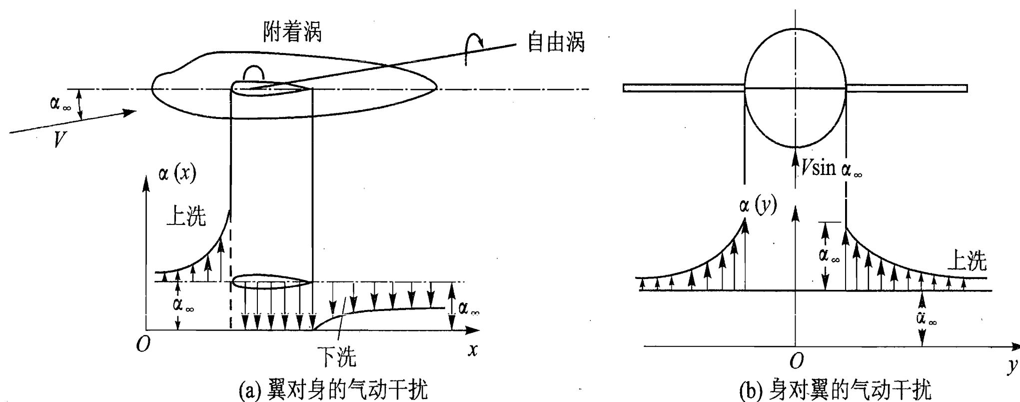


图 7.3 翼身组合体相互干扰的流场示意图

超声速情况下，机身头部冲波会影响机翼上的压强分布；机翼的冲波会对后机身压强分布有影响，因而也会产生明显翼身气动力相互干扰作用。

基于翼身气动力相互干扰的复杂性，工程上常将翼身作为组合体来估算。从图 7.4 中可知，此时单独机身升力可表示为

$$L_b = qS_bC_{L\alpha.b}(\alpha_w - \phi_w) \tag{7.5}$$

式中 S_b 为机身最大横截面；$C_{L\alpha.b}$ 为单独机身的升力线斜率；ϕ_w 为机翼安装角。

机身升力对飞行器质心的纵向力矩为

$$M_b = L_bx_b$$

式中 x_b 为机身压力中心离飞行器质心的距离。上式除以 qSc 得力矩系数形式为

$$C_{m.b} = \frac{M_b}{qSc} = C_{L\alpha.b}(\alpha_w - \phi)\frac{S_bx_b}{Sc} \tag{7.6}$$



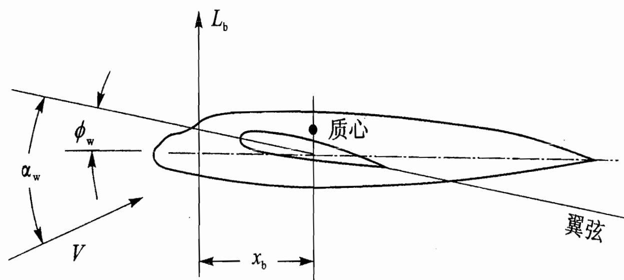


图 7.4　机身的纵向力矩

在同一个机翼迎角 α_w 作用下，翼身组合体的升力系数可表示为

$$C_{L.wb} = C_{L\alpha.wb}(\alpha_w - \alpha_{0.wb}) \tag{7.7}$$

$$C_{L\alpha.wb} = C_{L\alpha.w} + C_{L\alpha.b}$$

$$\alpha_{0.wb} = \frac{C_{L\alpha.w}\alpha_{0.w} + C_{L\alpha.b}\phi_w}{C_{L\alpha.wb}}$$

式中 $C_{L\alpha.wb} = \dfrac{\partial C_{L.wb}}{\partial \alpha}$，为翼身组合体升力线斜率；$\alpha_{0.wb}$ 为翼身组合体零升迎角。

将上式代入式(7.6)，经整理，$C_{m.b}$ 又可改写为

$$C_{m.b} = \Delta C_{m0.b} + \Delta \bar{x}_{ac.b} C_{L.wb} \tag{7.8}$$

$$\Delta C_{m0.b} = C_{L\alpha.b} A_b (\alpha_{0.wb} - \phi_w)$$

$$\Delta \bar{x}_{ac.b} = C_{L\alpha.b} / C_{L\alpha.wb} \cdot A_b$$

式中 $A_b = \dfrac{S_b x_b}{Sc}$。下标“wb”表示翼身组合体。

一般情况下，$\alpha_{0.wb} < 0$，$\phi_w > 0$，故 $\Delta C_{m0.b} < 0$，而 $\Delta \bar{x}_{ac.b} > 0$。

于是，翼身组合体的纵向力矩系数应是机翼和机身力矩系数之和，为

$$C_{m.wb} = C_{m.w} + C_{m.b} = C_{m0.wb} + C_{Lwb}(\bar{x}_{c.g} - \bar{x}_{ac.wb}) \tag{7.9}$$

$$C_{m0.wb} = C_{m0.w} + \Delta C_{mo.b}$$

$$\bar{x}_{ac.wb} = \bar{x}_{ac.w} - \Delta \bar{x}_{ac.b}$$

由此可见，机身的影响一方面使零升力矩系数的绝对值增加，另一方面使机翼焦点向前移动。

3. 平尾部分

单独平尾的纵向力矩特性与单独机翼的情况类似，只是平尾通常采用对称翼型，一般也无气动或几何扭转；在升降舵无偏转的情况下，其压力中心与焦点重合，故平尾本身的零升力矩为零。当平尾安装在机身后部或垂直尾翼上时，其绕流会受到前方流动的影响，因而影响平尾的纵向力矩特性。

首先，平尾区的流态平均流速的大小由于气流流过前面的其他飞行器部件时有能量损耗，



受到阻滞作用。若以 k_q 表示速度系数，则平尾处速度可表示为

$$V_t = \sqrt{k_q}V \tag{7.10}$$

其次，平均流速方向受到翼身组合体涡系的诱导作用的影响，正升力情况下，速度方向下偏，用下洗角 ε 来表示。考虑到一般情况，平尾有一安装角 ϕ_t（按规定平尾翼弦相对机翼翼弦延长线或机身轴线向下偏转时，$\phi_t<0$；反之，$\phi_t>0$）。考虑上述因素后，平尾处有效迎角为

$$\alpha_t = \alpha_{wb} + \phi_t - \varepsilon \tag{7.11}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_{0.wb} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial C_L} C_{L.wb} = \varepsilon_{0.wb} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha} \cdot \frac{C_{L.wb}}{C_{L\alpha.wb}}$$

式中 $\varepsilon_{0.wb}$ 为翼身组合体升力为零时的下洗角。图 7.5 为平尾上迎角产生的气动力情况。当其阻力 D_t 远小于升力 L_t 时，平尾对飞行器质心的纵向力矩近似为

$$M_t = -L_t l_{ht}$$

其中作用在平尾上的升力 L_t 可表示为

$$L_t = k_q q S_t C_{L.t} = k_q q S_t C_{L\alpha.t}(\alpha_{wb} + \phi_t - \varepsilon) \tag{7.12}$$

式中 $C_{L\alpha.t}$ 为平尾升力线斜率；l_{ht} 为平尾焦点沿机身纵轴量得的到飞行器质心的距离；S_t 为平尾面积（含升降舵）。

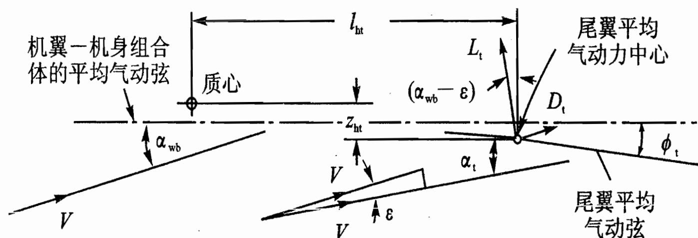


图 7.5 平尾的纵向力矩

将平尾纵向力矩 M_t 除以 qSc，得力矩系数形式为

$$C_{m.t} = -k_q A_{ht} C_{L\alpha.t}(\alpha_{wb} + \phi_t - \varepsilon) \tag{7.13}$$

式中 $A_{ht} = S_t l_{ht}/Sc$，称平尾静面矩系数。

最后，利用翼身组合体升力表达式

$$C_{L.wb} = C_{L\alpha.wb}(\alpha_{wb} - \alpha_{0.wb})$$

求得相应的翼身组合体迎角 α_{wb}，代入式(7.13)，$C_{m.t}$ 又可改写为

$$C_{m.t} = C_{m0.t} - k_q A_{ht} \frac{C_{L\alpha.t}}{C_{L\alpha.wb}}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) C_{L.wb} \tag{7.14}$$

$$C_{m0.t} = -k_q A_{ht} C_{L\alpha.t}(\alpha_{0.wb} + \phi_t - \varepsilon_{0.wb})$$

式中 $C_{m0.t}$ 为平尾产生的零升力矩系数。一般情况下，$\alpha_{0.wb}<0$，$\phi_t<0$，$\varepsilon_{0.wb}>0$，故 $C_{m0.t}$ 通常为正值。

迎角引起的全机纵向力矩便是翼身组合体和平尾纵向力矩之和。由于平尾升力与翼身组



合体升力相比，一般较小，可以认为 $C_L \approx C_{L.\,wb}$，$C_{L\alpha} \approx C_{L\alpha.\,wb}$，于是其力矩系数形式为

$$C_m = C_{m.\,wb} + C_{m.\,t} = C_{m0.\,wb} + C_{m0.\,t} + \left[\bar{x}_{c.\,g} - \bar{x}_{ac.\,wb} - k_q A_{ht} \frac{C_{L.\,t}}{C_{L\alpha}}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\right] C_L \tag{7.15}$$

令

$$C_{m0} = C_{m0.\,wb} + C_{m0.\,t} = C_{m0.\,w} + C_{L\alpha.\,b} A_b (\alpha_{0.\,wb} - \phi_w) - k_q A_{ht} C_{L\alpha.\,t} (\alpha_{0.\,wb} + \phi_t - \varepsilon_{0.\,wb}) \tag{7.16}$$

$$\bar{x}_{ac} = \bar{x}_{ac.\,wb} + k_q A_{ht} \frac{C_{L.\,t}}{C_{L\alpha}}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) = \bar{x}_{ac.\,w} - \Delta \bar{x}_{oc.\,b} + k_q A_{ht} \frac{C_{L.\,t}}{C_{L\alpha}}\left(1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right) \tag{7.17}$$

全机纵向力矩系数可简单地表示为工程上常用的公式

$$C_m = C_{m0} + (\bar{x}_{c.\,g} - \bar{x}_{ac}) C_L \tag{7.18}$$

式中 C_{m0} 表示全机零升力矩系数。当 $\bar{x}_{c.\,g} = \bar{x}_{ac}$ 时，迎角改变不会引起纵向力矩的变化，故 $\bar{x}_{ac}$ 称为全机焦点或气动中心的位置，即为迎角变化时全机升力增量作用点。图 7.6 画出全机焦点等于飞机各部件升力增量的合力作用点的示意图。由式(7.17)可见，全机焦点位置取决于机翼焦点位置，以及机身、平尾所引起的焦点变化量。机身的影响将使焦点位置前移，平尾的影响则使焦点位置后移。

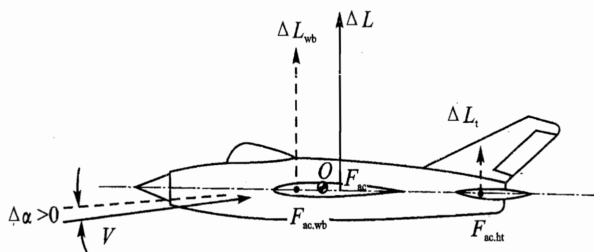


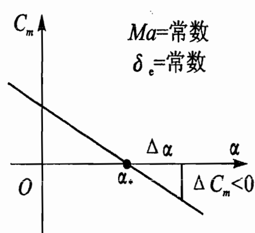
图 7.6　全机焦点

7.1.2　定速静稳定性

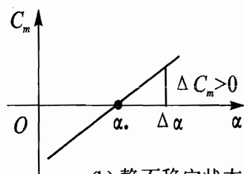
全机的纵向力矩系数随 α 的变化曲线，在给定 Ma 和升降舵偏转保持不变的情况下，如图 7.7所示。

由图 7.7 可见，当飞行器迎角处于 $\alpha = \alpha_*$ 时，$C_m = 0$，即飞行器的纵向力矩 $M = qScC_m = 0$，处于平衡状态。对于图 7.7(a)的情况，若飞行器受外界瞬时扰动，迎角突然增加 $\Delta\alpha$，则飞行器将产生负的力矩增量，$\Delta M < 0$；在该力矩作用下，飞行器低头，具有恢复到原来平衡状态迎角 α_* 的趋势。这时通常称飞行器在原来平衡飞行状态下是纵向静稳定的。对于图 7.7(b)的情况，同样瞬时 $\Delta\alpha$ 扰动，产生的力矩 $\Delta M > 0$，正好与图 7.7(a)的情况相反，运动趋势将使飞行器

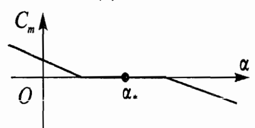




(a) 静稳定状态



(b) 静不稳定状态



(c) 中立静稳定状态

图 7.7 纵向力矩系数随迎角变化的曲线

更加偏离其原来的平衡迎角 α_*，此时，称飞行器在原平衡飞行状态是纵向静不稳定的。至于图 7.7(c)的情况，比较特殊，同样在 $\Delta\alpha$ 瞬时扰动下，不产生附加力矩，飞行器仍处于平衡状态，此时飞行器所在的原平衡飞行状态是纵向中立静稳定的。

从上述分析可知，飞行器是否具有纵向静稳定，与力矩系数曲线在平衡点处的斜率有关，故可用力矩系数导数 $C_{m\alpha}$ 作为飞行器纵向静稳定性判据。考虑到在给定 Ma 下，导数可表示为

$$\frac{\partial C_m}{\partial \alpha}=\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\frac{\partial C_L}{\partial \alpha}$$

在线性变化范围内 $\partial C_L/\partial\alpha=C_{L\alpha}$ 总是大于零，因此飞行器的纵向静稳定性又可用导数 $\partial C_m/\partial C_L$ 表示，即

$$\left.\begin{array}{lll}\dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha}<0 & \left(\dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}<0\right) & \text{静稳定} \\ \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha}>0 & \left(\dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}>0\right) & \text{静不稳定} \\ \dfrac{\partial C_m}{\partial \alpha}=0 & \left(\dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}=0\right) & \text{中立静稳定}\end{array}\right\} \tag{7.19}$$

将式(7.18)对 C_L 求导，即可得到纵向静稳定性的表达式：

$$\frac{\partial C_m}{\partial C_L}=\bar{x}_{c.g}-\bar{x}_{ac} \tag{7.20}$$

从式(7.20)可知，飞行器是否具有纵向静稳定性，仅取决于飞行器焦点和质心之间的相对位置。当全机焦点位于质心之后，$\bar{x}_{ac}>\bar{x}_{c.g}$，则 $\partial C_m/\partial C_L<0(C_{m\alpha}<0)$，飞行器具有纵向静稳定性；当 $\bar{x}_{ac}<\bar{x}_{c.g}$，则 $\partial C_m/\partial C_L>0(C_{m\alpha>0})$，飞行器不具有纵向静稳定性；如果 $\bar{x}_{ac}=\bar{x}_{c.g}$，则 $\partial C_m/\partial C_L=0$ $(C_{m\alpha}=0)$，飞行器将是纵向中立静稳定的，此时的飞行器质心位置，谓之握杆中性点，用 $\bar{x}_n$ 表示，显然 $\bar{x}_n=\bar{x}_{ac}$。另外，焦点与质心之间距离用 $K_n=\bar{x}_{ac}-\bar{x}_{c.g}$ 表示，谓之稳定裕度。显然，为了保证飞行器具有一定的静稳定性，要求 $K_n>0$。

从全机焦点位置式(7.17)看，对于一般正常式飞行器，翼身组合体焦点位置 $\bar{x}_{ac.wb}$ 位于质心之前，会引起飞行器静不稳定。加上平尾后，全机焦点便移至质心之后，飞行器变成静稳定的。可见，保证飞行器具有纵向静稳定性是平尾的功能之一。

另外，为了保证飞行器在正迎角下正常飞行，从图 7.7 上的曲线可知，要求飞行器的零升力矩系数 $C_{m0}>0$。一般情况下，翼身组合体零升力矩系数 $C_{m0.wb}<0$，平尾的零升力矩系数 $C_{m0.t}>0$，全机的零升力矩系数可以通过加上平尾，使 $C_{m0}>0$。这是平尾的又一个功能。

但这里需要指出，上述的纵向静稳定性是在假定飞行器速度保持不变的前提下得出的。扰动引起的迎角变化，会使飞行器过载 $n_n=L/W$ 也发生变化。如果 $C_{m\alpha}<0$，则意味着飞机具有恢复原来过载的趋势；反之，若 $C_{m\alpha}>0$，则飞行器受扰后将更加偏离原来过载的趋势。因此



这种纵向静稳定性称为定速静稳定性，或称按过载的纵向静稳定性。

7.1.3　定载静稳定性

实际飞行过程中，在扰动引起迎角变化的同时，飞行速度也会发生变化。因此仅研究定速下的飞行器纵向静稳定性是不够的，还要研究一种在过载 $n_n=1$ 条件下的纵向静稳定性，谓之定载静稳定性，即研究飞行器作定直水平飞行下，在受到瞬态扰动后，飞行器有无恢复至原来平衡状态的趋势。由于在扰动过程中，飞行器的迎角和速度都发生变化，因此作用在飞行器上的纵向力矩应是迎角 α 和 Ma 的函数，即 $M=f(C_L, Ma)$。为此需要绘制满足 $n_n=1$ 条件下的纵向力矩曲线，简称定载纵向力矩曲线，如图 7.8 所示。

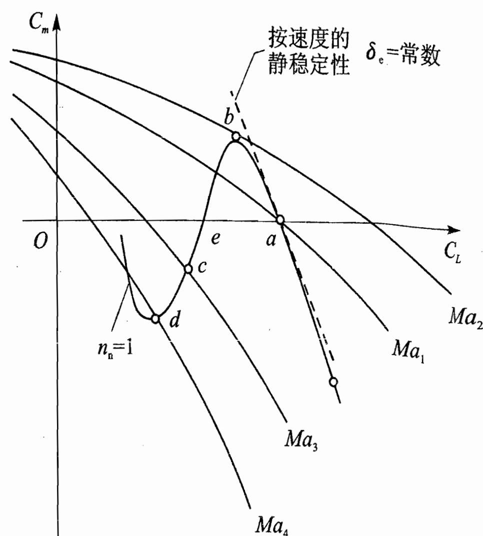


图 7.8　飞行器定载纵向力矩系数随迎角变化曲线

从图 7.8 上可以看出，飞行器处于 a 点和 e 点，纵向力矩系数均等于零，即飞行器处于纵向平衡状态。当扰动使飞行器偏离 a 状态时，纵向力矩增量的作用具有使飞行器恢复到原来平衡的趋势，故 a 平衡状态是静稳定的；相反，飞行器偏离 e 状态后，扰动产生的纵向力矩增量将使飞行器更加偏离原平衡状态，故 e 平衡状态是静不稳定的。

很明显，定载静稳定性与定载纵向力矩系数曲线在平衡点处斜率有关，故也可用力矩系数导数作为静稳定性判据。此时的力矩系数是 C_L 和 Ma 的函数，则必须用全导数 $\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}C_L$（或 $\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}\alpha$）来表示。故有

$$C_m = f(C_L, Ma) \tag{7.21}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_n=1} = \frac{\partial C_m}{\partial C_L} + \frac{\partial C_m}{\partial Ma}\left(\frac{\mathrm{d}Ma}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_n=1} \tag{7.22}$$

按 $n_n=L/W=1$ 条件得

$$L = \frac{1}{2}\rho c^2 Ma^2 S C_L = W$$

或写成

$$C_L Ma^2 = \frac{2W}{\rho c^2 S} = \text{常数}$$

两边微分后得

$$\left(\frac{\mathrm{d}Ma}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_\mathrm{n}=1} = -\frac{Ma}{2C_L} \tag{7.23}$$

上式代入式(7.22)，即得

$$\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_\mathrm{n}=1} = \frac{\partial C_m}{\partial C_L} - \frac{Ma}{2C_L}\frac{\partial C_m}{\partial Ma} \tag{7.24}$$

式中第一项表示定速静稳定性；第二项则表示 Ma 变化对静稳定性的影响。显然，如不计 Ma 影响，则 $(\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}C_L)_{n_\mathrm{n}=1}=\partial C_m/\partial C_L$。在跨声速范围内，全机焦点位置急剧向后移动，$\partial C_m/\partial Ma$ 为大的负值，可使

$$\left|\frac{Ma}{2C_L}\frac{\partial C_m}{\partial Ma}\right| > \left|\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right|$$

在此情况下，$(\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}C_L)_{n_\mathrm{n}=1}>0$，飞行器变成静不稳定的，结果会引起所谓的飞行器自动俯冲现象。图 7.8 中的 e 点状态正是这种情况。

为了区分与定速静稳定性的差别，这种稳定性是在 $n_\mathrm{n}=1$ 飞行状态下，飞行器受扰动后有无恢复到原平衡状态的趋势，故谓之纵向定载静稳定性，或称按速度的静稳定性，可表示为

$$\left.\begin{array}{lll}
\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_\mathrm{n}=1} < 0 & \left[\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{n_\mathrm{n}=1} < 0\right] & \text{定载静稳定} \\
\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_\mathrm{n}=1} > 0 & \left[\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{n_\mathrm{n}=1} > 0\right] & \text{定载静不稳定} \\
\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_\mathrm{n}=1} = 0 & \left[\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{n_\mathrm{n}=1} = 0\right] & \text{定载中立静稳定}
\end{array}\right\} \tag{7.25}$$

将式(7.24)中 $\partial C_m/\partial C_L$ 用式(7.20)代入，并令 $(\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}C_L)_{n_\mathrm{n}=1}=0$ 得

$$\bar{x}_{\mathrm{c.g}} = \bar{x}_{\mathrm{ac.}n_\mathrm{n}=1} = \bar{x}_{\mathrm{ac}} + \frac{Ma}{2C_L}\frac{\partial C_m}{\partial Ma} \tag{7.26}$$

式中 $\bar{x}_{\mathrm{ac.}n_\mathrm{n}=1}$ 为定载全机焦点位置。于是式(7.24)又可表示为

$$\left(\frac{\mathrm{d}C_m}{\mathrm{d}C_L}\right)_{n_\mathrm{n}=1} = \bar{x}_{\mathrm{c.g}} - \bar{x}_{\mathrm{ac.}n_\mathrm{n}=1} \tag{7.27}$$

飞行器定载静稳定性将取决于飞行器质心和定载焦点之间的相对位置。当飞行器质心移至 $\bar{x}_{\mathrm{ac.}n_\mathrm{n}=1}$ 处时，$(\mathrm{d}C_m/\mathrm{d}C_L)_{n_\mathrm{n}=1}=0$，飞行器处于按速度的中立静稳定性。在第 9 章将会看到，该条件对应于纵向动稳定性中的实根稳定边界。

7.2 操纵力矩

操纵机构偏转引起的那部分俯仰力矩，称为纵向操纵力矩。俯仰方向的操纵机构常见的有升降舵(或全动平尾)、襟翼、推力矢量喷管和燃气舵等。根据其产生操纵力矩的机理，由升降舵、襟翼和燃气舵偏转引起的，称为气动操纵力矩；由偏转喷管引起的，则称为推力矢量操纵



力矩。下面分别介绍这两类操纵力矩。

7.2.1 气动操纵力矩

对于正常式飞行器，升降舵是位于平尾的后缘，可绕其转轴上下转动的舵面。当舵面偏转时，改变平尾翼型的有效弯度，产生附加升力，因而对飞行器质心形成附加的纵向力矩，即纵向操纵力矩。习惯上，规定当舵面后缘向下偏转时，形成的升降舵偏角 $\delta_e>0$；后缘向上偏转时，$\delta_e<0$。

计算升降舵偏转产生的操纵力矩，常引入升降舵效率系数 η_e。它等于升降舵偏转 1°所产生的平尾升力系数与平尾迎角改变 1°所产生的平尾升力系数之比，即

$$\eta_e=\frac{C_{L.\delta}}{C_{L\alpha.t}} \tag{7.28}$$

式中 $C_{L.\delta}=\partial C_{L.t}/\partial\delta_e$。

如升降舵偏角为 δ_e，则在平尾上产生的升力为

$$L_t=k_q q S_t C_{L.\delta}\delta_e=k_q q S_t C_{L\alpha.t}\eta_e\delta_e$$

相应的对飞行器质心纵向力矩为

$$\Delta M=-L_t l_{ht}=-k_q q S_t l_{ht} C_{L\alpha.t}\eta_e\delta_e$$

化成无因次力矩系数，上式除以 qSc 得

$$\Delta C_m=-k_q A_{ht} C_{L\alpha.t}\eta_e\delta_e \tag{7.29}$$

将上式对 δ_e 求导，即得升降舵操纵导数 $C_{m\delta_e}$：

$$C_{m\delta_e}=-k_q A_{ht} C_{L\alpha.t}\eta_e \tag{7.30}$$

$C_{m\delta_e}$ 又称为升降舵操纵效能。由上式可知，若其他参数保持不变，增加 η_e，则升降舵效能增强。η_e 可近似按下式计算，即

$$\left.\begin{aligned}&\eta_e\approx\sqrt{\frac{S_e}{S_t}\cos\chi_e} \qquad (Ma<Ma_c)\\ &\eta_e\approx\frac{S_e}{S_t}\cos\chi_e \qquad (Ma>1)\end{aligned}\right\} \tag{7.31}$$

式中 S_e 为升降舵面积；χ_e 为升降舵转轴的后掠角。

从式 7.31 可知，超声速时的升降舵效率显著地小于亚声速情况，其原因是超声速情况下，扰动不能向前传播，升降舵偏转仅在舵面上产生压力差；而在亚声速时，舵面的偏转会在整个水平尾翼上产生压力差，如图 7.9(a)所示。

为了提高超声速飞机的操纵效能，一般采用全动平尾，即整个尾面可以绕铰链轴旋转，如图 7.9(b)所示。全动平尾的 η_e 可用下式确定，即

$$\eta_e=K_f\cos\chi_e \tag{7.32}$$

式中 K_f 为缝隙修正系数。近似地取值：当 $Ma>1.4$ 时，$K_f=0.95\sim1.0$；当 $Ma<Ma_c$ 时，



$K_f = 0.85$。

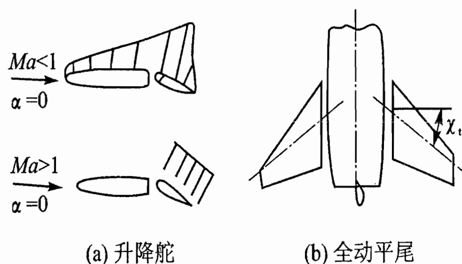


图 7.9　升降舵和全动平尾

全动平尾的偏角通常用 φ 表示，同样规定后缘上偏为负，下偏为正。相应的操纵导数可写成

$$C_{m\varphi} = -K_q A_{ht} C_{L\alpha.t} K_f \cos \chi_e \tag{7.33}$$

从式(7.30)和式(7.33)可见，无论是升降舵还是全动平尾产生的操纵力矩与迎角无直接关系，故舵面偏转不会影响飞行器的静稳定性，但会改变零升力矩系数的大小。不同舵面偏角下的纵向力矩系数曲线在线性变化范围内，如图 7.10 所示。升降舵上偏某个角度，力矩系数曲线向上平移一段距离；同理，升降舵下偏某个角度，力矩系数曲线向下平移一段距离。从图 7.10 上还可以看到，一个舵面偏角，只对应着一个平衡迎角状态。这说明可以通过操纵升降舵来实现飞行器作不同的定常直线飞行的状态。这也是平尾的一个功能。

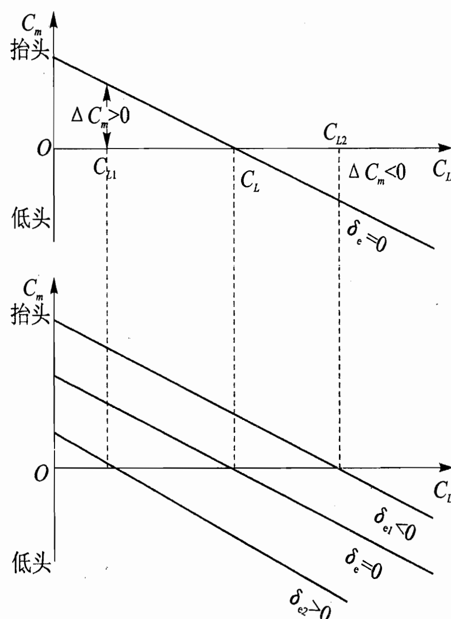


图 7.10　不同舵偏角下的 C_m 随 C_L 变化曲线

燃气舵的操纵效能类似于升降舵，不同之点只是燃气舵置于燃气流中，产生操纵力矩的机理与空气舵是一样的。

襟翼的操纵是一种增升装置，主要用来增加升力以改善飞机起落性能。当然，升力对飞机的质心亦会产生纵向力矩，但由于其作用点离质心较近，其值较小。在现代飞行器中，襟翼常作为纵向直接力操纵机构，其产生的纵向力矩将由偏转升降舵予以平衡。至于襟翼偏转对飞行器上的气动力影响，将作为影响因素介绍。

7.2.2　推力矢量操纵力矩

推力矢量操纵是利用发动机喷管偏转来实现的。目前常见的有二元收敛-扩散喷管和轴



对称喷管，如图 1.19 所示。当喷管上、下偏转时，推力矢量随之偏转，其垂直飞行器纵轴的分量对质心产生的力矩，即是纵向操纵力矩。常用 δ_{T_y} 表示喷管俯仰方向偏转角，规定下偏为正，产生低头操纵力矩；上偏为负，产生抬头操纵力矩。其操纵力矩近似表示为

$$\Delta M = -T\sin\delta_{Ty} l_T \approx -T\delta_{Ty} l_T$$

式中 l_T 为喷口距飞行器质心的距离，除以 qSc 化成无因次力矩系数的形式为

$$\Delta C_m = -A_T C_T \delta_{T_y} \tag{7.34}$$

式中 $A_T = S_T l_t / Sc$；$C_T = T/qS_T$。其中 S_T 为喷口截面积。上式对 δ_{T_y} 求导，即得推力矢量操纵导数

$$C_{m\delta_y} = -A_T C_T \tag{7.35}$$

该导数 $C_{m\delta_y} < 0$。

7.3　定常直线飞行时的飞行器平衡特性

定常直线飞行时，作用在飞行器上的外力和力矩应处于平衡状态，即

$$\left.\begin{aligned} &T\cos(\alpha+\varphi) - D - mg\sin\gamma = 0 \\ &T\sin(\alpha+\varphi) + L - mg\cos\gamma = 0 \\ &M = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.36}$$

对于定直水平飞行，$\gamma=0$。在考虑到迎角不是太大，并略去一些次要因素后，上述平衡方程用无因次系数表示可简化为

$$\left.\begin{aligned} C_T &= C_D \\ C_L &= C_W \\ C_m &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.37}$$

式中 $C_W = mg/qS$。

可见，对于给定高度，实现不同速度下对称定直平飞时，需操纵舵面以达到平衡所需的姿态角；同时操纵油门使发动机提供的可用推力平衡该状态下的需用推力（即全机阻力）。但在下面讨论时，不考虑飞行器的切向力平衡问题，认为油门操纵始终能实现其平衡，而着重讨论在切向力平衡条件实现定直平飞时的升降舵操纵特性。

7.3.1　升降舵平衡曲线

当不计动力影响，气动力和力矩在线性变化范围内时，平衡方程式(7.37)可写成

$$\left.\begin{aligned} &C_{L\alpha}\alpha_* + C_{L\delta_e}\delta_{e*} = C_{L*} = C_W \\ &C_{m0} + C_{m\alpha}\alpha_* + C_{m\delta_e}\delta_{e*} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.38}$$

式中下标“*”表示平衡状态时的参数。由上式求得平衡迎角 α_* 和平衡所需的升降舵偏角 δ_{e*} 为



$$\alpha_{*}=\frac{C_{m0}C_{L\delta_e}+C_{m\delta_e}C_{L*}}{\Delta} \tag{7.39}$$

$$\delta_{e*}=-\frac{C_{m0}C_{L\alpha}+C_{m\alpha}C_{L*}}{\Delta} \tag{7.40}$$

式中 $\Delta=C_{L\alpha}C_{m\delta_e}-C_{L\delta_e}C_{m\alpha}=C_{L\alpha}C_{m\delta_e}\left(1-\frac{C_{m\alpha}C_{L\delta_e}}{C_{L\alpha}C_{m\delta_e}}\right)$，对于正常式飞行器，$\Delta$ 为负值。相应的平衡升力系数及其升力系数斜率由式(7.39)分别得出，即

$$C_{L*}=-\frac{C_{m0}C_{L\delta_e}}{C_{m\delta_e}}+\frac{\Delta}{C_{m\delta_e}}\alpha_{*} \tag{7.41}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}C_L}{\mathrm{d}\alpha}\right)_{*}=C_{L\alpha}-\frac{C_{L\delta_e}}{C_{m\delta_e}}C_{m\alpha} \tag{7.42}$$

可见，平衡升力系数曲线的斜率比 $C_{L\alpha}$ 要小。其数值取决于 $C_{m\alpha}$，即静稳定裕度。再将 Δ 公式代入式(7.40)并注意到 $C_{L\delta_e}\approx -C_{m\delta_e}/\bar{l}_{ht}$，经整理可写成

$$\delta_{e*}=-\frac{C_{m0}+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}C_{L*}}{C_{m\delta}\left(1+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/\bar{l}_{ht}\right)} \tag{7.43}$$

当某些飞行器舵面偏转引起的升力在全机升力中所占比重不大时，可以近似略去，则可令 $C_{L\delta_e}=0$，于是平衡舵偏角公式可简化为

$$\delta_{e*}=-\frac{C_{m0}+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}C_{L*}}{C_{m\delta_e}}\qquad (C_{L\delta_e}=0) \tag{7.44}$$

根据式(7.43)或式(7.44)可以画出平衡舵偏角随平衡升力系数变化的曲线，并称为升降舵平衡曲线。当不计压缩性、动力系统影响时，式中各气动系数均为常值，此时对每一个质心位置，对应一个 $\partial C_m/\partial C_L$，$\delta_{e*}$ 是 C_{L*} 的单值函数，呈直线变化，如图 7.11 所示。

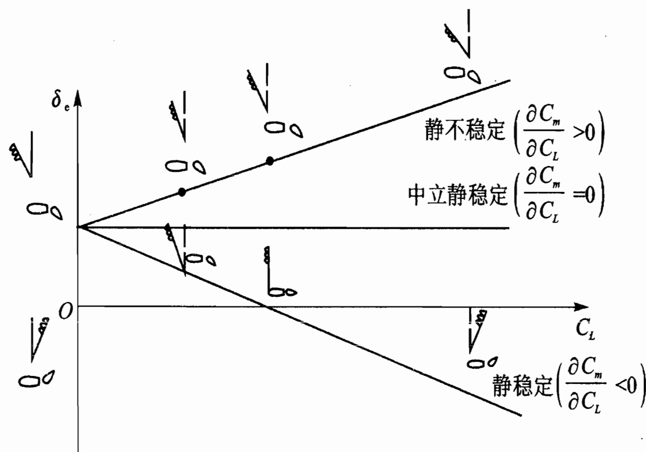


图 7.11 升降舵偏角平衡曲线 $\delta_e=f(C_L)$



根据平飞条件

$$L = \frac{1}{2}\rho V^2 S C_{L*} = W$$

求得 C_{L*} 代入式(7.43)或式(7.44)，即得

$$\delta_{e*} = -\frac{C_{m0} + \dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}\cdot\dfrac{2W}{\rho S V^2}}{C_{m\delta_e}\left(1 + \dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/\bar{l}_{ht}\right)} \tag{7.45}$$

$$\delta_{e*} = -\frac{C_{m0} + \dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}\cdot\dfrac{2W}{\rho S V^2}}{C_{m\delta_e}} \qquad (C_{L\delta} = 0) \tag{7.46}$$

利用式(7.46)，可以绘出给定高度下平衡舵偏角随着飞行速度的变化曲线，这是升降舵平衡曲线的又一形式。在同样不计压缩性和动力影响的条件下，对给定飞行高度的每一个质心位置，δ_{e*} 是 V 的单值函数，呈曲线变化，如图 7.12 所示。从图中可明显看出，同样飞行速度下，飞行高度增加，平衡舵所需向上的偏角将增加，而向下的偏角则减小。

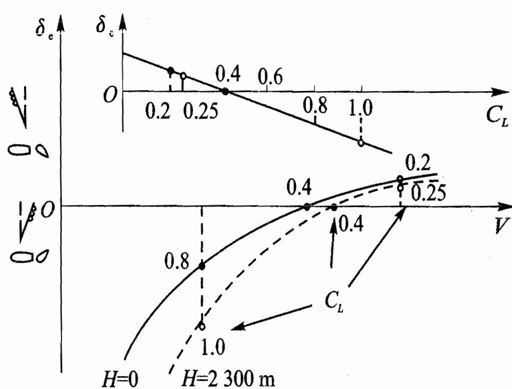


图 7.12　升降舵偏角平衡曲线 $\delta_e = f(V)$

由平衡曲线图 7.11 和图 7.12 可知，曲线每一个点代表一个对称定直平飞状态。一个所需的平衡舵偏角 δ_{e*}，对应一个 C_L 和一个飞行速度 V、飞行高度 H。对于具有静稳定性的飞行器，随着平衡升力系数的增加，相应的平飞速度减小，为了平衡，驾驶员应向后拉杆，负向增加所需的舵偏角；而减少平衡升力系数，相应的增加平飞速度，为了平衡，驾驶员应向前推杆，所需平衡舵偏角正向增加。这种操纵方式符合驾驶员生理习惯，故称为正操纵。对于静不稳定飞行器，情况刚好相反，增加 C_{L*}，驾驶员必须向前推杆；减小 C_{L*}，则须向后拉杆，这种操纵方式不符合驾驶员生理习惯，故称反操纵。显然，为了保证飞行安全和操纵动作简单，一般不允许出现反操纵现象。

这里需要指出的是，上述正、反操纵动作仅是指平衡状态而言。驾驶员在改变平衡迎角的开始阶段，无论是静稳定飞行器或静不稳定飞行器，增加迎角都应向后拉杆，以产生抬头力矩；减小迎角则均应向前推杆，以产生低头力矩。所不同的是，对于静稳定的飞机，开始时的操纵动作或驾驶杆位置(或舵偏角)与最后平衡状态时的驾驶杆位置的方向是一致的；而对静不稳定飞行器，则两者方向是相反的，换句话说，为了减少迎角，驾驶员开始时应向前推杆，接着又要向后拉杆，使操纵动作复杂化。

对于静不稳定飞行器，上述操纵复杂化的情况在第 9 章中将会介绍，均可采用飞行控制系



统来实现自动配平和正常操纵。

当计及压缩性的影响，即在实现不同速度下飞行器定直平飞时，速度的改变会引起气动力矩系数变化。此时从飞行器定载纵向力矩曲线上（见图 7.8）可见，在跨声速区出现急剧的变化，由此可知，升降舵平衡曲线在跨声速区出现相应的勺形，如图 7.13 所示。

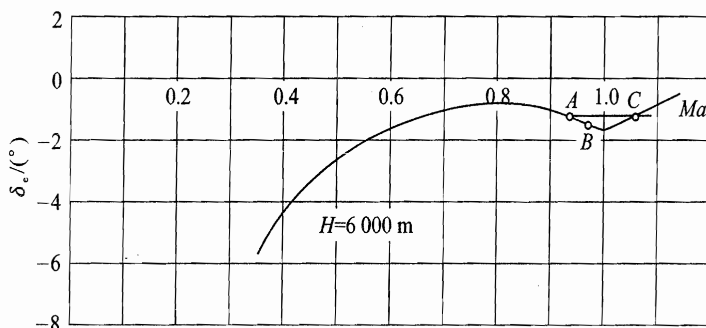


图 7.13　计及压缩性影响的升降舵偏角平衡曲线 $\delta_e=f(Ma)$

从图 7.13 上可看出，对于具有静稳定性的飞行器，在亚声速区和超声速区，为了平衡，驾驶员操纵属于正常操纵区；但在跨声速区，将出现反操纵现象。当然这种由于气动特性引起的反操纵现象，也可采用飞控系统来实现自动配平。

7.3.2　舵面静操纵性指标

上面介绍了实现不同定直平飞状态所需的升降舵偏角。这里仅仅是讨论操纵升降舵与飞行器最终平衡状态（即稳态响应）之间的关系，而没有涉及舵面偏转后的整个动态响应。故这种从静的观点来讨论飞行器的纵向操纵，谓之纵向静操纵，即集中注意通过升降舵来控制飞行器定直平飞的平衡状态。

为了衡量飞行器定直平飞状态的纵向静操纵性的好坏，工程上常以改变单位平衡升力系数 C_{L^*} 或单位定直平飞速度所需升降角偏角作为静操纵性评价指示。对于不计压缩性影响的低速情况，可分别对式(7.43)和式(7.45)求导，即得相应的表达式

$$\frac{\partial\delta_e}{\partial C_L}=\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/C_{m\delta_e}\left(1+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/\bar{l}_{ht}\right)\tag{7.47}$$

$$\frac{\partial\delta_e}{\partial V}=\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\cdot\frac{4W}{\rho SV^3}\Big/C_{m\delta_e}\left(1+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/\bar{l}_{ht}\right)\tag{7.48}$$

从式(7.47)、式(7.48)可清楚地看出，飞行器静操纵性与纵向定速静稳定性密切相关。具有静稳定性的飞行器，$\frac{\partial C_m}{\partial C_L}<0$，$x_{c.g}<x_{ac}$，$\left|\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/\bar{l}_{ht}\right|=\left|\frac{x_{c.g}-x_{ac}}{l_{ht}}\right|<1$，故其纵向静操纵性指标

$$\frac{\partial\delta_e}{\partial C_L}<0,\qquad \frac{\partial\delta_e}{\partial V}>0$$



也就是说，飞行器欲增加某个平衡迎角 $\Delta\alpha_* > 0$（即 $\Delta C_{L^*} > 0$，相应的定直平飞速度 $\Delta V < 0$），平衡所需的舵面角 $\Delta\delta_{e*} = \frac{\partial\delta_e}{\partial C_L} \cdot \Delta C_{L^*} < 0$，即要求驾驶员向后拉杆，飞行器处于正操纵区。而对于静不稳定性飞机，情况刚好相反，$\frac{\partial C_m}{\partial C_L} > 0$，$x_{c.g} > x_{ac}$，$\frac{\partial C_m}{\partial C_L} \Big/ \bar{l}_{ht} = \frac{x_{c.g} - x_{ac}}{l_{ht}} < 1$，其纵向静操纵指标为

$$\frac{\partial\delta_e}{\partial C_L} > 0, \qquad \frac{\partial\delta_e}{\partial V} < 0$$

也就是说同样增加平衡迎角 $\Delta\alpha_* > 0$（$\Delta C_{L^*} > 0$，$\Delta V < 0$），平衡所需舵偏角 $\Delta\delta_{e^*} > 0$，要求驾驶员向前推杆，飞行器处于反操纵区。这些结果与从平衡曲线上分析是一致的。

同时也可看到，这两个纵向静稳定性指标 $\partial\delta_e/\partial C_L$ 和 $\partial\delta_e/\partial V$ 是等效的，但其正负号刚好相反。当飞行器的质心位置刚好在握杆中性点处，即 $x_{c.g} = x_{a.c} = x_n$，飞行器处在中立静稳定状态时，那么，$\partial\delta_e/\partial C_L = \partial\delta_e/\partial V = 0$。

对于计及压缩性影响的高速情况，为推导简便，同样可分别对式(7.44)和式(7.46)求导，不同的是应考虑气动导数是 Ma 的函数，因此静操纵性指标应用全导数表示，即

$$\frac{d\delta_e}{dC_L} = \frac{\partial\delta_e}{\partial C_L} + \frac{\partial\delta_e}{\partial Ma}\frac{dMa}{dC_L}\bigg|_{n_n=1} = -\frac{dC_m}{dC_L}\bigg|_{n_n=1} \Big/ C_{m\delta_e} \tag{7.49}$$

$$\frac{d\delta_e}{dV} = \frac{\partial\delta_e}{\partial V} + \frac{\partial\delta_e}{\partial C_L} \cdot \frac{dC_L}{dMa}\bigg|_{n_n=1} \frac{dMa}{dV} = \frac{dC_m}{dC_L}\bigg|_{n_n=1} \frac{4W}{\rho S V^3} \Big/ C_{m\delta_e} \tag{7.50}$$

此时，飞行器静操纵性与纵向定载静稳定性密切相关。在跨声速区，由于 $\frac{dC_m}{dC_L}\Big|_{n_n=1} > 0$，$C_{m\delta_e} < 0$，飞行器欲减小某平衡迎角 $\Delta\alpha_* < 0$（即 $\Delta C_{L^*} < 0$，相应的定直平飞速度 $\Delta V > 0$），则所需平衡舵偏角 $\Delta\delta_{e*} = \frac{d\delta_e}{dC_L}\Delta C_{L^*} < 0$，$\left(\Delta\delta_{e*} = \frac{d\delta_e}{dV}\Delta V < 0\right)$，飞行器将处于反操纵状态。这正是引起飞行器自动俯冲的直接原因。

7.3.3 飞行器的自动俯冲现象

当飞行器在跨声速区定直水平飞行时，如在平衡曲线（见图7.13）中的 A 点，对应的平衡舵偏角为 $\delta_{e.A}$。由于外界扰动使飞行速度增加至 B 点，此时舵偏角并没有改变，仍然保持 $\delta_{e.A}$ 值。而 B 点所需的平衡偏角从图上看应减小，需在原来位置向上偏转。结果飞行器上存在有不平衡低头力矩，这使飞行器进入俯冲，速度进一步增加，直到 C 点为止。此时 $\delta_{e.C} = \delta_{e.A}$，再次成为合适的平衡舵偏角。这种由于按速度的静不稳定而引起的下俯现象，称为自动俯冲。为了克服跨声速区的操纵反常现象，现代飞机中引入马赫数配平机构，以提供符合驾驶员正常感觉的操纵。

7.4 阻尼力矩

由俯仰角速度 q 引起的纵向力矩，谓之纵向阻尼力矩。按符号规定，使飞行器抬头的 q 为正；反之则为负。

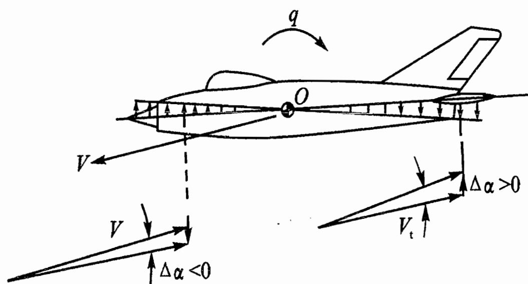


图 7.14　q 引起的飞行器各点局部迎角的变化

当飞行器绕 Oy_b 轴以正 q 旋转时，质心前后各点获得随距离呈线性变化的附加速度分布，如图 7.14 所示，从而将改变飞行器各点处的局部迎角，质心之前各点局部迎角和相应的升力减小，而质心之后各点局部迎角和相应的升力则增大，结果引起质心前后升力之差而产生附加的纵向力矩。该力矩方向，在临界迎角之前始终与 q 的方向相反，起着阻碍飞行器转动的作用，所以称为纵向阻尼力矩。

全机的纵向阻尼力矩，主要由平尾产生，飞行器的翼身贡献较小。在近似计算中，常仅考虑平尾的阻尼力矩，在此基础上增加 10 %～20 %，以考虑翼身影响。

飞行器以正 q 转动，平尾焦点处的附加速度为 $\Delta V_t = ql_{ht}$，将其作为平尾处的平均附加速度，则平尾处的平均迎角增量可近似表示为

$$\Delta\alpha_t = ql_{ht}/\sqrt{k_q}V$$

由此产生的平尾附加升力增量为

$$\Delta L_t = k_q \frac{1}{2}\rho V^2 S_t C_{L\alpha,t}\Delta\alpha_t = \sqrt{k_q}\frac{1}{2}\rho V S_t C_{L\alpha,t}\cdot ql_{ht}$$

相应的对飞行器质心的纵向力矩为

$$\Delta M_t = -\Delta L_t l_{ht} = -\sqrt{k_q}\frac{1}{2}\rho V S_t C_{L\alpha,t}\cdot ql_{ht}^2 \tag{7.51}$$

引入无因次角速度 $\bar{q} = qc/V$，代入上式，并化为无因次力矩系数形式，得

$$\Delta C_{m,t} = -\sqrt{k_q}C_{L\alpha,t}\frac{S_t}{S}\frac{l_{ht}^2}{c^2}\bar{q}$$

上式对 $\bar{q}$ 求导，得平尾的纵向力矩系数导数为

$$C_{mq,t} = -\sqrt{k_q}C_{L\alpha,t}\frac{S_t l_{ht}^2}{Sc^2} \tag{7.52}$$

可以看出，$C_{mq,t} < 0$，有阻碍飞行器转动的作用，故称为纵向阻尼导数。全机的阻尼导数可按下式近似表示，即

$$C_{mq} = (1.1 \sim 1.25)C_{mq,t} \tag{7.53}$$



对于大展弦比直机翼，取 1.1；对小展弦比后掠机翼，取 1.25。

由式(7.52)可知，平尾产生的阻尼导数与无因次尾臂 l_{ht}/c 的平方成正比，而平尾对焦点的影响则与 l_{ht}/c 成正比(参看式 7.17)。因此，对于具有相同的静面矩系数 $S_t l_{ht}/Sc$ 的飞行器，若减小平尾面积，而相应增加其尾臂长度 l_{ht}，则平尾对纵向静稳定性的作用可以保持不变，但对阻尼力矩的贡献则增大。因此，利用改变 l_{ht}/c 值，可以协调静稳定导数与阻尼导数的相对大小。

显然，角速度 q 也会引起全机升力系数变化，即导数 C_{Lq} 存在。一般情况下，其值较小，可以忽略。

7.5　洗流时差力矩

飞行中飞行器出现 $\dot{\alpha}=\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}t$ 时，引起的纵向力矩，称为洗流时差力矩。严格讲，此时飞行器是作非定常运动，其绕流情况与定常运动有显著不同，作用在飞行器上的气动力和力矩不仅决定于该时刻的运动参数，而且还决定于整个运动的历史过程。因此，精确地确定非定常气动力和力矩是非常复杂的。在工程上常采用所谓准定常假设，即认为非定常运动中，作用于飞行器上的气动力和力矩完全由当时当地的运动参数所确定。按这种处理方法，迎角变化即 $\dot{\alpha}$ 引起在平尾处的洗流时差效果应予以考虑，否则误差较大。

所谓洗流时差是指当迎角 α 变化时，翼身组合体自由涡的变化要经过 τ 时刻后才能影响平尾区的绕流。时差 τ 取决于尾臂长度 l_{ht} 和飞行速度，可近似表示为

$$\tau=\frac{l_{ht}}{\sqrt{k_q}V} \tag{7.54}$$

因此，平尾处的实际下洗角将与 τ 时差前的迎角相对应。在 $\dot{\alpha}>0$ 的情况下，这个下洗角将比定常飞行时的下洗角小，相当于平尾处增加一个附加迎角，产生向上的附加升力，形成绕飞行器质心的低头附加力矩，以抵制 α 增长；$\dot{\alpha}<0$ 的情况刚好相反，下洗延迟产生的正的附加力矩，以抵制 α 减小。可见，$\dot{\alpha}$ 引起的纵向力矩也起阻尼力矩的作用。下面具体估算该力矩。

假设迎角变化率为 $\dot{\alpha}>0$，t 时刻的翼身组合体处迎角为 α_1，而平尾处的平均下洗角 ε_1 应由 $t-\tau$ 时刻翼身向组合体的环量分布确定，即

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon_0(t)+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\alpha(t-\tau)=\varepsilon_0(t)+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\left[\alpha(t)-\left(\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}t}\right)\tau\right]$$

其中 τ 用式(7.54)代入，则

$$\varepsilon_1(t)=\varepsilon(t)-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\left[\left(\frac{\mathrm{d}\alpha(t)}{\mathrm{d}t}\right)\frac{l_{ht}}{\sqrt{k_q}V}\right] \tag{7.55}$$

式中 $\varepsilon(t)=\varepsilon_0(t)+\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\cdot\alpha(t)$ 为不考虑洗流时差作用时，在 t 时刻的平尾区的平均下洗角。因

此，洗流时差作用引起的下洗角变化为

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon_1(t) - \varepsilon(t) = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\left[\left(\frac{d\alpha(t)}{dt}\right)\frac{l_{ht}}{\sqrt{k_q}V}\right] \tag{7.56}$$

相应的尾翼处的迎角改变量为

$$\Delta\alpha_t = -\Delta\varepsilon$$

产生的附加升力和绕飞行器质心的附加纵向力矩分别为

$$\left.\begin{aligned} \Delta L_t &= k_q\frac{1}{2}\rho V^2 S_t C_{L\alpha.t}\Delta\alpha_t = \frac{1}{2}\sqrt{k_q}\rho V S_t C_{L\alpha.t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\dot{\alpha}l_{ht} \\ \Delta M &= -\Delta L_t \cdot l_{ht} \end{aligned}\right\} \tag{7.57}$$

引入无因次迎角变化率$\bar{\dot{\alpha}} = \frac{\dot{\alpha}c}{V}$，代入上式，并化成无因次力矩系数形式

$$\Delta C_m = -\sqrt{k_q}C_{L\alpha.t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\cdot\bar{\dot{\alpha}}\frac{S_t l_{ht}^2}{Sc^2} \tag{7.58}$$

上式对$\bar{\dot{\alpha}}$求导得

$$C_{m\dot{\alpha}} = -\sqrt{k_q}C_{L\alpha.t}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\cdot\frac{S_t l_{ht}^2}{Sc^2} \tag{7.59}$$

$C_{m\dot{\alpha}}$一般为负值，与式(7.52)比较，两者只相差一个因子$\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}$。对于亚声速飞机，其值为0.4～0.6，故

$$C_{m\dot{\alpha}} = (0.4 \sim 0.6)C_{mq.t}$$

其作用与C_{mq}相当，起阻尼作用。

7.6 定常拉升飞行时的飞行器平衡特性

讨论飞行器纵向曲线飞行问题时，通常选择定常拉升运动作为典型动作。所谓定常拉升运动，是指飞行器在垂直平面内以等速V、等α和等q作曲线运动，即是垂直平面内的圆周运动，如图7.15所示。显然这种运动客观上是不存在的，只有在升力L与重力W共线条件下才能实现。拉升运动的初始阶段或俯冲运动的进入阶段近似符合上述条件。但是，人们仍以定常拉升的操纵特性来衡量飞行器纵向机动能力。

与同飞行高度、飞行速度的定直平飞相比，为使轨迹上弯，拉升运动时的迎角要相应增加$\Delta\alpha$；同时，为保持飞行器拉升过程中迎角不变，飞行器的俯仰角速度q必须与圆周运动角速度Ω相等。而$\Delta\alpha$和q的大小均与法向过载增量Δn_n有关。按飞行器质心动力学关系

$$\frac{W}{g}a_n = L - W$$

或写成



$$a_n = \frac{L-W}{W} \cdot g = (n_n - 1)g = \Delta n_n g$$

又按运动学关系

$$a_n = V\Omega = Vq$$

两式相等，并引入无因次 $\bar{q}=\frac{qc}{V}$ 和飞行器的相对密度 $\mu_1=\frac{2m}{\rho Sc}$，得

$$\bar{q} = \frac{gc}{V^2}\Delta n_z = \frac{C_{L*}}{\mu_1}\Delta n_n \tag{7.60}$$

而其中的 $\Delta n_n=\frac{L-W}{W}=\frac{L-L_*}{L_*}=\frac{\Delta C_L}{C_{L*}}$，则

$$\Delta C_L = C_{L*}\Delta n_n \tag{7.61}$$

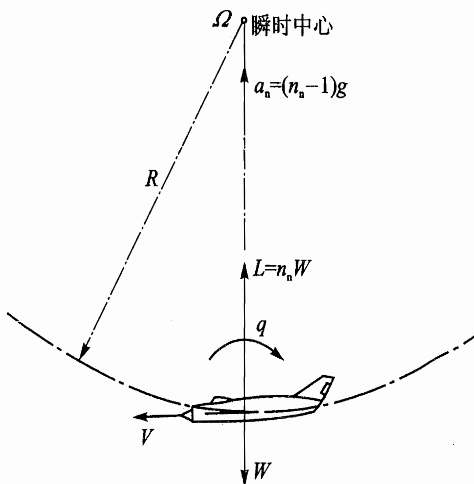


图 7.15　定常拉升运动

式(7.61)中的 C_{L_*} 为飞行器用同样速度和高度作定常直线飞行时的升力系数。从上两式可见，$\Delta\alpha$，$\bar{q}$ 均与 Δn_n 成正比。拉升运动中选定的 Δn_z 越大，要求 $\Delta\alpha$ 和 $\bar{q}$ 也越大。

7.6.1　升降舵偏转变化规律

现在考虑飞行器从定直平飞状态转入以一定过载作定直拉升运动的情况。显然，确定实现定常拉升运动所需的舵偏角时，只需计算相对定直平飞状态的附加量，以平衡拉升运动引起的附加迎角 $\Delta\alpha$ 和角速度 $\bar{q}$ 产生的气动力和力矩。运动参数在线性变化内，其平衡方程的无因次形式可表示为

$$\left.\begin{aligned} C_{L\alpha}\Delta\alpha + C_{Lq}\bar{q} + C_{L\delta_e}\Delta\delta_e &= \Delta C_L \\ C_{m\alpha}\Delta\alpha + C_{mq}\bar{q} + C_{m\delta_e}\Delta\delta_e &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{7.62}$$

将式(7.60)和式(7.61)代入上式，可解得

$$\Delta\delta_e = -\frac{C_{L*}}{\Delta}\left[C_{m\alpha} - \frac{1}{\mu_1}(C_{Lq}C_{m\alpha} - C_{L\alpha}C_{mq})\right]$$

近似地取 $C_{m\delta_e}=-C_{L\delta_e}l_{ht}$，$C_{mq}=-C_{Lq}l_{ht}$ 代入，经整理后，有

$$\Delta\delta_e = -\frac{1}{C_{m\delta_e}\left(1+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/ l_{ht}\right)}\left[\frac{\partial C_m}{\partial C_L} + \frac{1}{\mu_1}C_{mq}\left(1+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Big/ l_{ht}\right)\right]\frac{W}{qS}\Delta n_n \tag{7.63}$$

当上式可以略去 $C_{L\delta_e}$ 和 C_{Lq} 时，则简化成

$$\Delta\delta_e = -\frac{\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L} + \frac{C_{mq}}{\mu_1}\right)}{C_{m\delta_e}}\frac{W}{qS}\Delta n_n \tag{7.64}$$



7.6.2 舵面静操纵性指标

衡量定常拉升运动的纵向静操纵性好坏，工程上用改变单位法向过载所需升降舵附加偏角作为评价指标，俗称每 g 舵偏角，反映飞行器的纵向机动能力。式(7.64)对过载 Δn_{n} 求导，即得

$$\frac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}=-\frac{\left(\dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}+\dfrac{C_{mq}}{\mu_1}\right)}{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}}\frac{W}{qS} \tag{7.65}$$

可见，拉升运动的静操纵性不仅与飞行器纵向定速静稳定性密切相关，还与其纵向阻尼力矩特性有关。一般情况下，正常式飞机 $\dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}<0$，$C_{mq}<0$ 和 $C_{m\delta_{\mathrm{e}}}<0$，则得操纵性指标每 g 舵偏角 $\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}<0$，即拉过载时 $\Delta n_{\mathrm{n}}>0$，舵面偏角 $\Delta\delta_{\mathrm{e}}<0$，符合正常操纵要求。$\left|\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}\right|$ 值越小，飞行器机动性越高。因此减小飞行器的静稳定性，减小飞行器的阻尼力矩，降低翼载 W/S，提高升降舵操纵效率均可提高飞行器机动性。当然，过小的 $\left|\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}\right|$，容易引起过大的法向过载；$\left|\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}\right|$ 过大，则限制了飞行器的机动能力。所以在飞行品质规范中常对不同类型的飞机规定了相应的变化范围。

另外需要提醒一下，每 g 舵偏角特性不仅会随着飞行 Ma 改变，还会随着飞行高度而变化，如图 7.16 所示。高度变化的影响还通过公式中 μ_1 反映出来。随着飞行高度的增加，密度 ρ 减小，μ_1 会增大，飞行器机动性将变差。

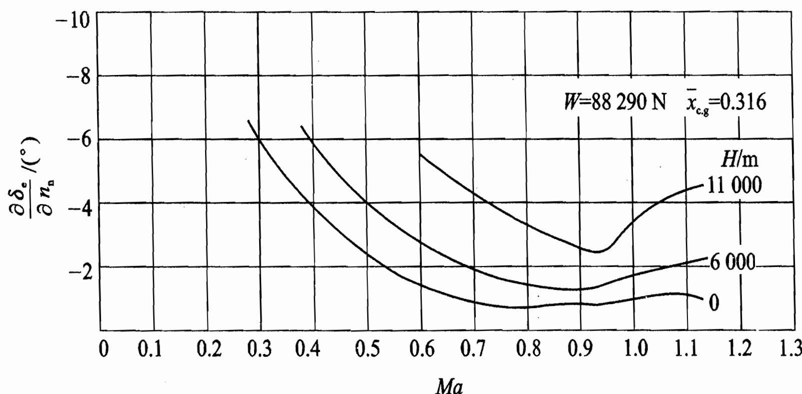


图 7.16 $\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}$ 随 Ma，H 变化曲线

将式(7.65)中 $\dfrac{\partial C_m}{\partial C_L}=\bar{x}_{\mathrm{c.g}}-\bar{x}_{\mathrm{ac}}$ 代入，并令 $\dfrac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}=0$，得出此时飞行器的重心位置，称握杆机动点，用 x_{m} 表示。很容易得出



$$\bar{x}_{\mathrm{m}}=\bar{x}_{\mathrm{ac}}-\frac{C_{mq}}{\mu_1}=\bar{x}_{\mathrm{n}}-\frac{C_{mq}}{\mu_1} \tag{7.66}$$

握杆机动点的物理概念从稳定性角度考虑，相当于升降舵固定在原平衡状态下，飞行器受到与 Δn_{n} 对应的 $\Delta\alpha$ 和 q 干扰作用时升力增量的作用点，如图7.17所示。从式(7.66)上也可看出，由于 $C_{mq}<0$，握杆机动点将位于全机中性点即全机焦点的后面。在一定 Ma 下，中性点与飞行高度无关，而机动点则随高度增加而前移，飞行高度越高，则两者的差别越小。

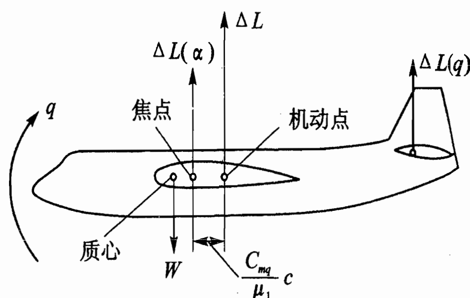


图7.17　握杆机动点位置确定

于是，每 g 舵偏角式(7.65)可写成另一种表达形式：

$$\frac{\partial\delta_{\mathrm{e}}}{\partial n_{\mathrm{n}}}=-\frac{(\bar{x}_{\mathrm{c.g}}-\bar{x}_{\mathrm{m}})}{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}}\frac{W}{qS}=\frac{WK_{\mathrm{m}}}{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}qS} \tag{7.67}$$

式中 $K_{\mathrm{m}}=\bar{x}_{\mathrm{m}}-\bar{x}_{\mathrm{c.g}}$ 称握杆机动裕量。为保证飞行器有良好的机动性，该量在飞行品质规范中有具体要求。

7.7　铰链力矩和杆力特性

作用在升降舵(或全动平尾)上的气动力对舵面转轴的力矩，称为升降舵铰链力矩，用 H_{e} 表示。在铰链力矩作用下，舵面将绕转轴转动，为了保持实现定常运动所需的舵面偏角，需通过驾驶员对驾驶杆施加一定杆力，来平衡舵面的铰链力矩。故将铰链力矩和杆力特性放在一节中介绍。

7.7.1　铰链力矩

铰链力矩 H_{e} 一般也可用无因次系数 C_{he} 来表示，即

$$H_{\mathrm{e}}=k_q q S_{\mathrm{e}} c_{\mathrm{e}} C_{he} \tag{7.68}$$

式中 S_{e}，c_{e} 分别为升降舵转轴后面的面积和相应的平均几何弦长(见图7.18)。

升降舵铰链力矩系数 C_{he}，除了与外形、马赫数 Ma、雷诺数 Re 有关外，主要随 α_{t}，δ_{e} 和调整片偏角 τ_{e} 而变。由于升降舵处的绕流复杂，干扰因素多，一般通过吹风试验来确定。工程上可近似用线性表达式表示，即

$$C_{he}=C_{he.0}+C_{he.\alpha}\alpha+C_{he.\delta}\delta_{\mathrm{e}}+C_{he.\tau}\tau_{\mathrm{e}} \tag{7.69}$$

$$C_{he.\alpha}=\frac{\partial C_{he}}{\partial\alpha_{\mathrm{t}}}\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)$$



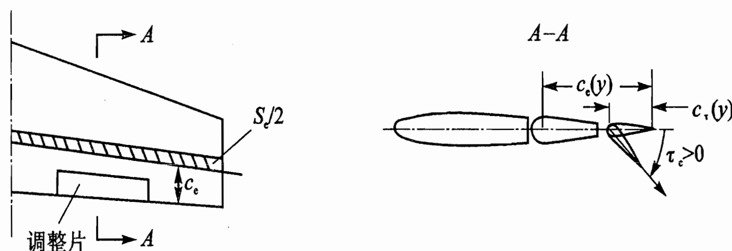


图 7.18　升降舵及调整片的几何图形

式中 $C_{he.0}$ 是由升降舵舵面翼型引起的，一般飞行器采用对称翼型，故 $C_{he.0}=0$；铰链力矩系数导数 $C_{he.\alpha}$，$C_{he.\delta}$ 和 $C_{he.\tau}$ 通常均小于零。

从式(7.68)可以看出，对于一定的 C_{he} 值，升动舵铰链力矩与动压 q 和舵面尺寸 $S_e c_e$ 成正比，所以大型飞机在大速压下飞行时，铰链力矩可能很大，从而使杆力超出驾驶员体力所能胜任的范围，为此需要采取措施。通常的办法是，设法通过舵面气动设计减小 C_{he} 的绝对值，这种方法称气动补偿；另一途径是采用助力器系统，依靠辅助能源部分或全部平衡舵面产生的铰链力矩。但为了减少助力器的功率，适当的气动补偿仍然需要考虑。

1. 气动补偿

气动补偿的关键在于减小舵面上气动力合力作用点到铰链轴之间的距离。这可通过改变气动力合力作用点或调整铰链轴前后位置来实现。常见的补偿形式有以下几种(见图 7.19)。

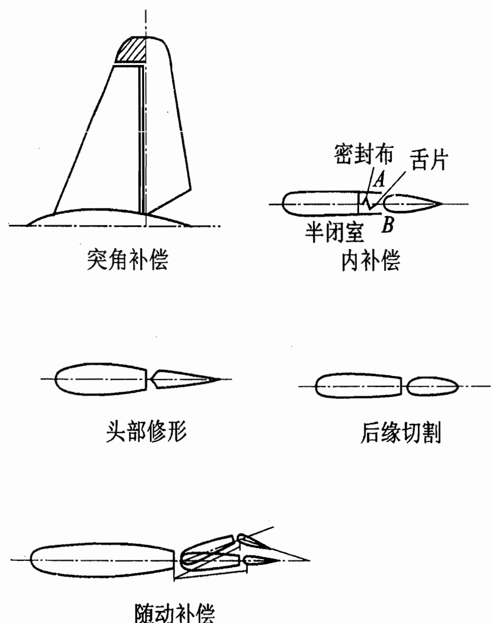


图 7.19　各种气动补偿形式

① 移轴补偿。它是属于调整舵面转轴位置的补偿形式。位于转轴前面的舵面面积叫做补偿面积。由于补偿面积上气动力所产生的对转轴力矩，与转轴后面的舵面面积上气动力所产生的力矩方向相反，因而铰链力矩减小，如图 7.18 所示。但转轴的移动有一定限制，过分的后移，会使铰链力矩系数 $C_{he.\alpha}$ 和 $C_{he.\delta}$ 变号，造成杆力与杆位移方向相反，操纵不协调。这种现象称为过补偿，在设计舵面时应尽量避免。

② 突角补偿。它是属于改变气动合力作用点的补偿形式。此时翼端部分或全部伸至铰边轴前，使气动力合力作用点前移。缺点是舵偏角大时易使突角部分气流分离，引起振动。

③ 内补偿。它实质上相当于移轴补偿，只是不变铰链位置及舵面外形，而是在铰链轴前延伸一舌片，使它能在由密封布隔成上下两室的



翼表面内部半闭室内转动。翼表面上下 A,B 处压强分别传至半闭室上下部分,则在舌片上就产生额外的气动力,使舵面(包括舌片)的气动合力作用点前移。内补偿基本上不破坏剖面气动外形,但偏角受半闭室空间限制,一般用于副翼补偿。

此外,还有通过头部修形、后缘切割以及改变局部外形使气动合力作用点前移;利用联杆机构使舵面后缘附翼(或附片)随舵面偏转而反向偏转,从而使气动合力作用点前移等补偿方式。但这些补偿方式构造复杂,容易产生振动。

2. 调整片

实际飞行中,只要操纵面上有铰链力矩,就需要驾驶员施加操纵力以保持操纵面固定偏角。长时间飞行时,即使不大的操纵力也会使驾驶员感到疲劳。为此,操纵面后缘通常都附有可由驾驶员单独操纵的调整片。调整片的作用就是使铰链力矩为零或说是配平杆力(见图 7.20)。相对来说,调整片的气动特性最不容易测准。按飞行品质要求,调整片的设计应能保证在整个使用飞行包线内的直线飞行中,可以配平或基本配平杆力。

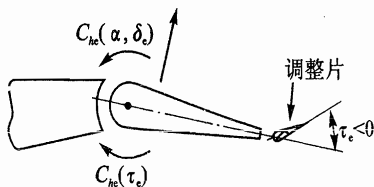


图 7.20 调整片的作用

7.7.2 杆力特性

驾驶员直接操纵的升降舵操纵系统,一般由驾驶杆、传动机构和舵面三部分组成,其作用原理如图 7.21 所示。

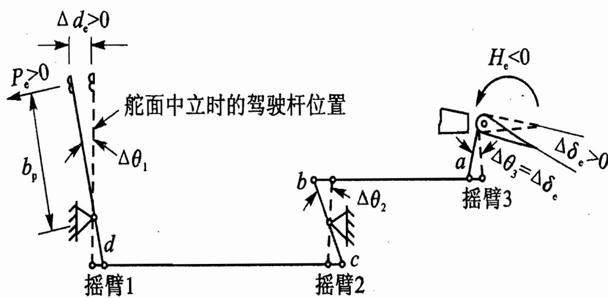


图 7.21 升降舵操纵系统原理图

当驾驶杆处于中立位置时,升降舵偏角 $\delta_e=0$,驾驶杆向前移动,则舵面后缘向下偏转;而驾驶杆向后移动,则舵面后缘向上偏转。按习惯规定:杆力向前(推力)、杆位移前移为正,相应的舵面向下偏转,亦为正;反之,则均为负。图 7.21 所示的情况是 $P_e>0$,$d_e>0$ 和 $\delta_e>0$。

下面建立驾驶杆力与铰链力矩之间的关系。设升降舵操纵系统处于静平衡状态,根据虚位移原理,系统上所有外力和外力矩在其虚位移上所作的虚功之和应等于零,即

$$P_e\Delta d_e + H_e\Delta\delta_e = 0$$



故得

$$P_e = -\frac{\Delta\delta_e}{\Delta d_e}H_e = -k_e k_q q S_e c_e C_{he} \tag{7.70}$$

式中 $k_e = \dfrac{\Delta\delta_e}{\Delta d_e}$ 称升降舵传动比。其值决定于操纵系统的几何尺寸和传动关系。

1. 松杆静稳定性

首先讨论杆力通过调整片配平后会带来的影响。此时由于铰链力矩为零，即使驾驶员松开驾驶杆也不会影响原来平衡飞行状态。但当飞行器受到 $\Delta\alpha$ 干扰时，尾翼迎角随之增加 $\Delta\alpha_t = (1-\varepsilon^\alpha)\Delta\alpha$，舵面上产生的附加铰链力矩 $H_{e\alpha}\cdot\Delta\alpha_t$ 会使舵面顺着气流方向浮动，引起舵面向上偏角，称为飘浮角 $\Delta\delta_{e.f}$，如图 7.22所示。

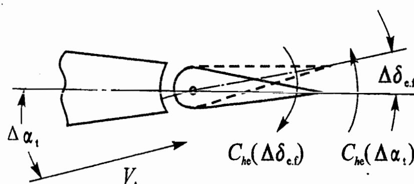


图 7.22　升降舵飘浮角

从图 7.22 上可知，飘浮角 $\delta_{e.f}$ 产生的铰链力矩，其方向与 $\Delta\alpha_t$ 产生的铰链力矩相反，因此当两者大小相等时，舵面上铰链力矩重新等于零，舵面停止飘浮，由此可得

$$\Delta\delta_{e.f} = -\frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}\Delta\alpha_t = -\frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}(1-\varepsilon^\alpha)\Delta\alpha = -\frac{C_{he.\alpha}}{C_{he.\delta}}\Delta\alpha \tag{7.71}$$

考虑到平衡状态下，上式中导数为定值，所以 $\Delta\delta_{e.f} \propto \Delta\alpha$。通常 $C_{he.\delta}<0$，故 $\Delta\delta_{e.f}$ 的符号由 $C_{he.\alpha}$ 确定。$C_{he.\alpha}<0$ 时，$\Delta\delta_{e.f}<0$，即迎角增大，舵面后缘上漂；$C_{he.\alpha}>0$ 时，$\Delta\delta_{e.f}>0$，即迎角增大，舵面后缘下漂。

显然，同样外界扰动下，与握杆情况相比，由于扰动引起舵面飘浮存在，松杆时产生的附加气动力和力矩会有所不同。其附加升力系数和纵向力矩系数分别表示为

$$\Delta C_{L.f} = C_{L\alpha.f}\Delta\alpha = C_{L\alpha}\Delta\alpha + C_{L\delta_e}\Delta\delta_{e.f} =$$

$$\left[C_{L\alpha} - C_{L\delta_e}\frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}(1-\varepsilon^\alpha)\right]\Delta\alpha$$

$$\Delta C_{m.f} = C_{m\alpha.f}\Delta\alpha = C_{m\alpha}\Delta\alpha + C_{m\delta_e}\Delta\delta_{e.f} =$$

$$\left[C_{m\alpha} - C_{m\delta_e}\frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}(1-\varepsilon^\alpha)\right]\Delta\alpha$$

因此，松杆时的升力系数斜率和静稳定导数为

$$C_{L\alpha.f} = C_{L\alpha} - C_{L\delta_e}\frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}(1-\varepsilon^\alpha) \tag{7.72}$$



$$C_{m\alpha.f}=C_{m\alpha}-C_{m\delta_e}\frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}(1-\varepsilon^{\alpha}) \tag{7.73}$$

$C_{he.\delta}$通常要求为负值，所以当 $C_{he.\alpha_t}<0$ 时，升力线斜率变小，静稳定性将减小。

同样可以导出松杆时的静稳定导数$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f$：

$$\Delta C_{m.f}=\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\cdot\Delta C_{L.f}+C_{m\delta_e}\Delta\delta_{e.f}$$

将 $\Delta\delta_{e.f}$表达式代入，并对 $\Delta C_{L.f}$求导得

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f=\frac{\partial C_m}{\partial C_L}-\frac{C_{m\delta_e}}{C_{L\alpha.f}}\cdot\frac{C_{he.\alpha}}{C_{he.\delta}} \tag{7.74}$$

再将$\frac{\partial C_m}{\partial C_L}=\bar{x}_{c.g}-\bar{x}_{ac}$代入上式，即可简化得

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f=\bar{x}_{c.g}-\bar{x}_{ac.f} \tag{7.75}$$

$$\bar{x}_{ac.f}=\bar{x}_{ac}+\frac{C_{m\delta_e}}{C_{L\alpha.f}}\cdot\frac{C_{he.\alpha}}{C_{he.\delta}}$$

式中 $X_{ac.f}$称为全机松杆焦点位置，常用 $X_{n.f}$表示，一般导数 $C_{m\delta}$，$C_{he.\alpha}$，$C_{he.\delta}$均小于零，而 $C_{L\alpha.f}$大于零，故 $\bar{x}_{n.f}=\bar{x}_{ac.f}<\bar{x}_{ac}$，即松杆焦点位于握杆焦点前面，松杆时静稳定性减少。

松杆不仅使静稳定性变化，同时由于舵面飘浮角存在，改变了平尾弯度，飞行器零升力矩系数也要发生改变。舵面飘浮相当于平尾迎角改变 $\eta_e\Delta\delta_{e.f}$，所以松杆时平尾升力线斜率可表示为

$$(C_{L\alpha.t})_f=C_{L\alpha.t}+C_{L\alpha.t}\eta_e\frac{d\Delta\delta_{e.f}}{d\alpha_t}=C_{L\alpha.t}\left(1-\eta_e\frac{C_{he.\alpha}}{C_{he.\delta}}\right)=CC_{L\alpha.t} \tag{7.76}$$

式中 $C=1-\eta_e\frac{C_{he.\alpha}}{C_{he.\delta}}$，称为松舵因子。其值小于1，表明松杆时，平尾升力系数斜率减小。

现将零升力矩系数式(7.16)中的 $C_{L\alpha.t}$用$(C_{L\alpha.t})_f$ 直接代入，即可得到松杆时零升力矩系数

$$C_{m0.f}=C_{m0.wb}+C_{L\alpha.b}A_b(\alpha_{0.wb}-\phi_w)-k_qA_e(C_{L\alpha.t})_f(\alpha_{0.wb}+\phi_t-\varepsilon_{0.wb}) \tag{7.77}$$

很明显，$C_{m0.f}<C_{m0}$，松杆时零升力矩系数比握杆时的小。

最后，飞行器松杆时的全机纵向力矩系数可表示为

$$C_{m.f}=C_{m0.f}+(\bar{x}_{c.g}-\bar{x}_{ac.f})C_{L.f} \tag{7.78}$$

2. 定直平飞时杆力特性

当飞行器在某高度以不同速度作定直平飞时，需要同时操纵驾驶杆和油门杆。为确定定直平飞所需驾驶杆力，可以设想从某一定直平飞状态，其飞行速度为 V_1，升力系数为 C_{L1}，升降舵偏角为 δ_{e1}，相应的杆力通过调整片配平为 $P_{e1}=0$。现在来确定飞行器转入相邻的另一定直平飞状态时所需的驾驶杆力。



假设通过油门杆操纵可使切向力始终保持平衡，故可删去切向力平衡方程；又略去舵面偏转本身对升力作用的影响，这样处理后可仅通过纵向力矩平衡方程，求出新平衡状态所需的舵面偏角。不计 Ma 影响的情况为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Delta C_L + C_{m\delta_e}\Delta\delta_e = 0 \\ &\Delta\delta_e = -\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\cdot\Delta C_L / C_{m\delta_e} \end{aligned}\right\} \tag{7.79}$$

式中 $\Delta C_L = C_L - C_{L1}$，$\Delta\delta_e = \delta_e - \delta_{e1}$。

考虑到原平衡状态 $P_e = 0$ 处于松浮状态，飞行器迎角增量可表示为

$$\Delta\alpha_t = \left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\Delta\alpha = \left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\frac{\Delta C_L}{C_{L\alpha.f}} \tag{7.80}$$

相应的舵面上的铰链力矩系数增量为

$$\Delta C_{he} = C_{he.\alpha_t}\Delta\alpha_t + C_{he.\delta}\Delta\delta_e$$

将式(7.79)和式(7.80)代入，得

$$\begin{aligned} \Delta C_{he} &= C_{he.\alpha_t}\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\frac{\Delta C_L}{C_{L\alpha.f}} - C_{he.\delta}\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\frac{\Delta C_L}{C_{m\delta_e}} = \\ &-\frac{C_{he.\delta}}{C_{m\delta_e}}\left[\frac{\partial C_m}{\partial C_L} - \frac{C_{he.\alpha_t}}{C_{he.\delta}}\frac{C_{m\delta_e}}{C_{L\alpha.f}}\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)\right]\Delta C_L = \\ &-\frac{C_{he.\delta}}{C_{m\delta_e}}\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f \Delta C_L \end{aligned} \tag{7.81}$$

由此可求得相对原平衡状态的杆力增量，即新的定直平飞状态所需杆力为

$$P_e = -k_e k_q q S_e c_e \Delta C_{he} = k_e k_q q S_e c_e \frac{C_{he.\delta}}{C_{m\delta_e}}\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f (C_L - C_{L1}) \tag{7.82}$$

将平飞条件 $C_L = \dfrac{W}{qS}$，$C_{L1} = \dfrac{W}{q_1 S}$代入上式，杆力公式又可写成

$$P_e = k_e k_q q S_e c_e \frac{C_{he.\delta}}{C_{m\delta_e}}\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\left(1-\frac{q}{q_1}\right) = P_e^*\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\left(1-\frac{q}{q_1}\right) \tag{7.83}$$

或写成

$$P_e = P_e^*\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\left(1-\frac{V^2}{V_1^2}\right) \tag{7.84}$$

式中 $P_e^* = k_e k_q S_e c_e \dfrac{W C_{he.\delta}}{S\, C_{m\delta_e}}$，称升降舵杆力系数，表示对质心位移的梯度。其值相当于飞行器质心后移平均气动弦 c，仍能保持原平衡状态所需杆力。

式(7.82)～式(7.83)清楚地表明，定直平飞所需杆力与飞行器的松杆静稳定性成正比。利用这些公式可绘出相应的杆力变化曲线 $P_e = f(C_L)$，$P_e = f(V)$ 和 $P_e = f(q)$，均称为杆力平衡曲线，如图 7.23 所示。



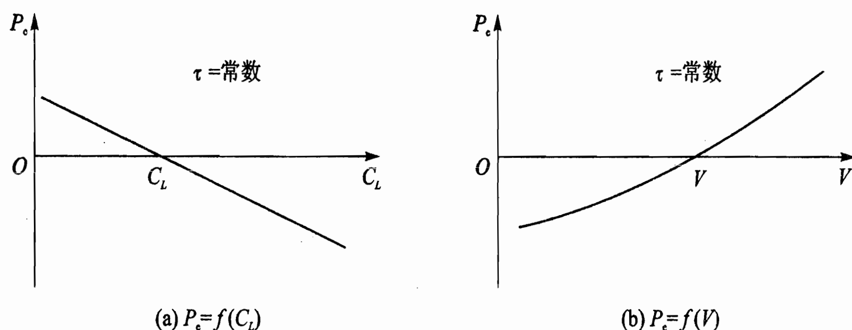


图 7.23 驾驶杆力平衡曲线

图 7.23 的曲线中每一点代表着飞行器的一个定直平飞状态。对于具有松杆静稳定性的飞行器($\bar{x}_{c.g}<\bar{x}_{ac.f}$),为了实现增加升力系数(即增加迎角),相应地减小平飞速度的定直平飞状态,驾驶员所需操纵杆力减少,要求拉杆;相反,实现升力系数减小,平飞速度增加的定直平飞状态,驾驶员所需的操纵杆力增加,要求推杆。这种操纵方式,符合驾驶员生理习惯,称正常操纵。对于松杆静不稳定飞机($\bar{x}_{c.g}>\bar{x}_{ac.f}$),情况刚好相反,增升减速定直平飞时,要求驾驶员推杆;减升增速定直平飞时,要求驾驶员拉杆。此时飞行器处于反操纵状态,一般是不允许的,需采取措施解决。

同样,这里讨论的实现不同定常平飞状态所需杆力时,仅仅是讨论操纵杆力与飞行器最终平衡状态之间的关系,没有涉及杆力变化后的整个动态反应,故亦属于静操纵性。类同升降舵舵面的静操纵性能,这里引入了改变单位平衡升力系数 C_L 或定直平飞速度所需杆力,来衡量飞行器纵向静操纵性好坏。分别通过对式(7.82)和式(7.84)求导,即得相应表达式

$$\frac{\partial P_e}{\partial C_L}=P_e^*\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\frac{C_{L1}}{C_L^2}$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial V}=-2P_e^*\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\frac{V}{V_1^2}$$

工程上常以原杆力配平的平衡状态,即杆力平衡曲线上 $P_e=0$ 点处的斜率作为杆力静操纵性指标。将该点的状态变量代入上两式,即得

$$\left.\frac{\partial P_e}{\partial C_L}\right|_{C_{L1}}=P_e^*\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\frac{1}{C_{L1}} \tag{7.85}$$

$$\left.\frac{\partial P_e}{\partial V}\right|_{V_1}=-P_e^*\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f\frac{2}{V_1} \tag{7.86}$$

从上式可清楚地看出,杆力静操纵性指标与飞行器纵向松杆定速静稳定性密切相关。显然具有松杆静稳定性的飞行器,$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_f<0$,即 $\bar{x}_{c.g}<\bar{x}_{ac.f}$,故$\left.\frac{\partial P_e}{\partial C_L}\right|_{C_{L1}}<0$,而$\left.\frac{\partial P_e}{\partial V}\right|_{V_1}>0$。这说明实现增升减速定直平飞时($\Delta C_L>0,\Delta V<0$),要求 $\Delta P_e<0$,即驾驶员要拉杆;实现减升增速定直平飞时($\Delta C_L<0,\Delta V>0$),要求 $\Delta P_e>0$,即驾驶员要推杆,此时飞行器处于正常操纵状态。

但对于松杆静不稳定的飞行器,情况刚好相反,增升减速时($\Delta C_L>0,\Delta V<0$),要求 $\Delta P_e>0$;减升增速时($\Delta C_L<0,\Delta V>0$),要求 $\Delta P_e<0$,此时飞行器处于反操纵状态。

另外,杆力静操纵性指标与原平衡状态参数 C_{L1} 和 V_1 有关。由于原平衡状态(C_{L1},V_1)是任意选定的,因此可以简单地说飞行器杆力静操纵性指标与平衡飞行状态有关。对具有松杆静稳定性的飞行器,平衡状态 C_L 增大,则$\left.\frac{\partial P_e}{\partial V}\right|_{V_1}$值也减小。这说明在不同杆力配平状态,其杆力静操纵指标变化会很大。因此,在飞行器设计时,应在整个平飞速度范围内,通过调整片配平杆力,按上述指标检查杆力的静操纵性,要求$\frac{\partial P_e}{\partial C_L}<0,\frac{\partial P_e}{\partial V}>0$,即 $\bar{x}_{c.g}<\bar{x}_{ac.f}$,其值在飞行品质规范中有具体规定。

当然,这两个杆力静操纵性指标应是等效的,但其正负号刚好相反。当$\left.\frac{\partial P_e}{\partial C_L}\right|_{C_{L1}}=0$,$\left.\frac{\partial P_e}{\partial V}\right|_{V1}=0$,此时飞行器质心位置称为松杆中性点,用 $x_{n.f}$ 表示。显然 $x_{n.f}$ 即是全机松杆焦点 $x_{ac.f}$。

这里还需提醒另一个问题,当飞行器的质心位于松杆和握杆中性点之间,飞行器定直平飞操纵时,由于 $\bar{x}_{c.g}<\bar{x}_n$,舵面操纵将处于正常操纵状态;而杆力的操纵,由于 $\bar{x}_{c.g}>\bar{x}_{n.f}$,则处于反操纵状态。这种现象谓之杆舵操纵不协调,必须采取措施,如移动重心、气动补偿等,使其协调。

在计及 Ma 影响的情况下,纵向力矩系数平衡方程应为

$$\frac{\partial C_m}{\partial Ma}\cdot\Delta Ma+\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\Delta C_L+C_{m\delta_e}\Delta\delta_e=0 \tag{7.87}$$

式中前二项变化应满足定直平飞条件,即式(7.22)

$$\left.\frac{dC_m}{dC_L}\right|_{n_n=1}=\frac{\partial C_m}{\partial C_L}+\frac{\partial C_m}{\partial Ma}\left(\frac{dMa}{dC_L}\right)_{n_n=1}$$

代入式(7.87),可得出平衡状态所需舵偏角

$$\Delta\delta_e=-\left.\frac{dC_m}{dC_L}\right|_{n_n=1}\cdot\Delta C_L\Big/C_{m\delta_e} \tag{7.88}$$

仿照前面的处理过程,可得到类似式(7.84)的杆力表达式

$$P_e=P_e^*\left.\left(\frac{dC_m}{dC_L}\right)_f\right|_{n_n=1}\left(1-\frac{V^2}{V_1^2}\right) \tag{7.89}$$

式中$\left(\frac{dC_m}{dC_L}\right)_f$为松杆定载静稳定性。绘出相应的曲线 $P_e=f(q)$,如图 7.24 所示。可见跨声速区也出现一个勺形。

同样取原平衡状态处的杆力曲线斜率,作为静操纵性指标,即



$$\left.\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}V}\right|_{n_{\mathrm{n}}=1}=-P_{\mathrm{e}}^{*}\left.\left(\frac{\mathrm{d}C_{m}}{\mathrm{d}C_{L}}\right)_{f}\right|_{n_{\mathrm{n}}=1}\frac{2}{V_{1}} \quad (7.90)$$

此时的杆力静操纵性与飞行器纵向松杆定载静稳定性有关。具有松杆定载静稳定性的飞行器 $\left.\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}V}\right|_{n_{\mathrm{n}}=1}>0$ 实现加速平飞 $\Delta V>0$，要求杆力 $\Delta P_{\mathrm{e}}>0$，即推杆；而减速平飞 $\Delta V<0$，要求杆力 $\Delta P_{\mathrm{e}}<0$，即拉杆。此时飞行器处于正常操纵状态。对于松杆定载静不稳定飞行器，$\left.\frac{\mathrm{d}P_{\mathrm{e}}}{\mathrm{d}V}\right|_{n_{\mathrm{n}}=1}<0$，则将处于反操纵状态。跨声速时出现反操纵，就属于这种情况。

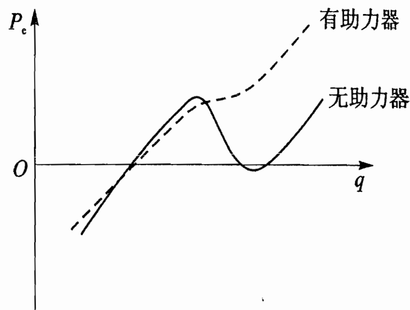


图 7.24　计及 *Ma* 影响的驾驶杆力平衡曲线

3. 定常拉升时杆力特性

飞行器从定直平飞转入定常拉升时，由于平尾迎角和舵面偏角的变化，会引起杆力的改变。此时平尾迎角的变化应由两部分组成，即翼身组合体迎角增量和俯仰角速度 q。

$$\Delta\alpha_{\mathrm{t}}=\Delta\alpha\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)+\frac{ql_{ht}}{\sqrt{k_q}V}=\Delta\alpha\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)+\frac{\bar{q}\bar{l}_{ht}}{\sqrt{k_q}}$$

同样考虑到原定直平飞状态杆力已被配平，处于松浮状态，迎角增量可表示为 $\Delta\alpha=\frac{\Delta C_L}{C_{L\alpha.\mathrm{f}}}$，而 $\Delta C_L=\Delta n_{\mathrm{n}}C_{L1}$，$\bar{q}=\frac{gc}{V^2}\Delta n_{\mathrm{n}}$。代入上式后得

$$\Delta\alpha_{\mathrm{t}}=\left[\frac{\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)}{C_{L\alpha.\mathrm{f}}}+\frac{\bar{l}_{ht}}{\sqrt{k_q}\mu_1}\right]\frac{W}{qS}\Delta n_{\mathrm{n}} \tag{7.91}$$

定常拉升运动的舵面偏角增量由式(7.64)简化得

$$\Delta\delta_{\mathrm{e}}=-\frac{\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}+\frac{C_{mq}}{\mu_1}\right)}{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}}\frac{W}{qS}\Delta n_{\mathrm{n}}$$

舵面的铰链力矩系数为

$$\Delta C_{he}=C_{he.\alpha_{\mathrm{t}}}\Delta\alpha_{\mathrm{t}}+C_{he.\delta}\Delta\delta_{\mathrm{e}}$$

将 $\Delta\alpha_{\mathrm{t}}$ 和 $\Delta\delta_{\mathrm{e}}$ 的表达式代入，并整理得

$$\begin{aligned}\Delta C_{he}&=\left[C_{he.\alpha_{\mathrm{t}}}\left(\frac{1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}}{C_{L\alpha.\mathrm{f}}}+\frac{\bar{l}_{ht}}{\sqrt{k_q}\mu_1}\right)-\frac{C_{he.\delta}}{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}}\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}+\frac{C_{mq}}{\mu_1}\right)\right]\frac{W}{qS}\Delta n_{\mathrm{n}}= \\ &-\frac{C_{he.\delta}}{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}}\left[\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_{\mathrm{f}}+(C_{mq})_{\mathrm{f}}\Big/\mu_1\right]\frac{W}{qS}\Delta n\end{aligned} \tag{7.92}$$

式中

$$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_{\mathrm{f}} = \frac{\partial C_m}{\partial C_L} - \frac{C_{m\delta_e}}{C_{L\alpha,\mathrm{f}}}\frac{C_{he,\alpha}}{C_{he,\delta}}$$

$$(C_{mq})_{\mathrm{f}} = C_{mq} - \frac{C_{m\delta_e}C_{he,\alpha_t}}{C_{he,\delta}}\frac{\bar{l}_{ht}}{\sqrt{k_q}}$$

分别为松杆定速静稳定导数和松杆纵向阻尼导数；q 是动压。

最终，定常拉升运动时的附加杆力为

$$P_e = -k_e k_q q S_e c_e \Delta C_{he} = P_e^* \left[\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_{\mathrm{f}} + \frac{(C_{mq})_{\mathrm{f}}}{\mu_1}\right]\Delta n_n \tag{7.93}$$

式中 P_e^* 即是前面引出的升降舵杆力系数。

上式对过载求导，得出改变单位过载所需的杆力，俗称每 g 杆力。这也是反映飞行器机动能力的一项静操纵性指标。

$$\frac{\partial P_e}{\partial n_n} = P_e^* \left[\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_{\mathrm{f}} + \frac{(C_{mq})_{\mathrm{f}}}{\mu_1}\right] \tag{7.94}$$

可见，拉升运动的杆力静操纵性指标不仅与松杆定速静稳定性有关，还与松杆纵向阻尼导数有关。一般情况下，$\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_{\mathrm{f}}$ 和 $(C_{mq})_{\mathrm{f}}$ 均小于零，故 $\frac{\partial P_e}{\partial n_n}<0$，即增加 $\Delta n_n>0$ 时，需要拉杆，$\Delta P_e<0$。这符合驾驶员操纵习惯，处于正常操纵状态。同样由于飞行器相对密度系数 μ_1 存在，每 g 杆力特性将随飞行速度和飞行高度而变化。

将 $\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}\right)_{\mathrm{f}}=\bar{x}_{c.g}-\bar{x}_{ac.f}$ 代入式(7.94)，并令 $\frac{\partial P_e}{\partial n_n}=0$，此时的飞行器质心位置，称为松杆机动点，用符号 $x_{m.f}$ 表示。

$$\bar{x}_{m.f} = \bar{x}_{n.f} - \frac{(C_{mq})_{\mathrm{f}}}{\mu_1} \tag{7.95}$$

由于 $(C_{mq})_{\mathrm{f}}<0$，松杆机动点位置 $x_{m.f}$ 将在松杆中性点的后面。将飞行器质心与松杆机动点之间的距离，称为松杆机动裕量，即

$$K_{m.f} = \bar{x}_{m.f} - \bar{x}_{c.g}$$

再将式(7.95)代回式(7.94)，则每 g 杆力指标表示更为简单

$$\frac{\partial P_e}{\partial n_n} = P_e^*(\bar{x}_{c.g} - \bar{x}_{m.f}) \tag{7.96}$$

上式清楚地表明，若 $\bar{x}_{c.g}<\bar{x}_{m.f}$，即质心位置位于松杆机动点之前，则 $\frac{\partial P_e}{\partial n_n}<0$，在此情况下，拉杆产生正过载增量，推杆产生负过载增量，属于正常操纵。反之，$\bar{x}_{c.g}>\bar{x}_{m.f}$，质心位于松杆机动点之后，则 $\frac{\partial P_e}{\partial n_n}>0$，此情况下拉杆反而产生负过载增量，推杆产生正过载增量，出现反操纵现象，一般是不允许的。

再将松杆中性点式(7.75)代入式(7.94)，并考虑到握杆中性点与握杆机动点之间的关系



式(7.66),可以得到松杆和握杆机动点之间的关系式

$$\bar{x}_{\mathrm{m.f}} = \bar{x}_{\mathrm{m}} + \frac{C_{he.\alpha_t} C_{m\delta_e}}{C_{he.\delta}} \left(\frac{1 - \frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}}{C_{L\alpha.\mathrm{f}}} + \frac{\bar{l}_{ht}}{\sqrt{k_q}\mu_1} \right) \tag{7.97}$$

一般情况下,松杆机动点位于握杆机动点之前,即 $\bar{x}_{\mathrm{m.f}} < \bar{x}_{\mathrm{m}}$。

这里也需说明一点,当飞行器质心位于松杆和握杆机动点之间时,由于 $\bar{x}_{\mathrm{c.g}} < \bar{x}_{\mathrm{m}}$,拉升运动的舵面操纵处于正常状态;而由于 $\bar{x}_{\mathrm{c.g}} > \bar{x}_{\mathrm{n.f}}$,杆力的操纵则处于反操纵状态,即杆舵操纵不协调,亦需采取措施调整。

7.8　影响飞行器纵向平衡、静稳定和静操纵的其他因素

7.8.1　动力装置影响

动力装置对纵向平衡和稳定性的影响是复杂的。下面仅对推力线偏心、螺旋桨或进气道口处的法向力以及螺旋桨滑流和尾喷流对纵向力矩的影响作简要介绍。

1. 推力偏离质心

假设推力线偏离质心垂直距离为 z_T,并规定推力线位于质心之上,$z_T>0$;反之,$z_T<0$。由图 7.25 可知,推力产生的纵向力矩为

$$M_T = -Tz_T \tag{7.98}$$

对于涡轮螺桨发动机,式中折算推力可表示为

$$T = C_T \rho V^2 D^2 = BqS_T$$

式中 C_T 为螺旋桨拉力系数;$B=8C_T/\pi$ 为桨盘载荷系数;D 为螺旋桨直径;S_T 为桨盘面积。将上式代入式(7.98),并化成力矩系数形式,则有

$$C_{m.T} = -B\bar{S}_T\bar{z}_T = -\frac{8}{\pi} C_T \bar{S}_T \bar{z}_T \tag{7.99}$$

式中 $\bar{S}_T = S_T/S$;$\bar{z}_T = z_T/c$。

对于喷气发动机,式(7.98)中喷气反作用力 T 产生的纵向力矩系数类似地可表示为

$$C_{m.T} = -\frac{Tz_T}{qSc} = -C_T\bar{z}_T \tag{7.100}$$

式中 $C_T = T/qS$ 为喷气发动机推力系数。

2. 法向力作用

由于翼身组合体涡系的上洗诱导作用,流入螺旋桨盘或进气道的迎角 α_T 通常要比来流迎角 α 大。同时发动机对气流作用经桨盘或进气口后气流速度发生改变。其产生的轴向力 T 已讨论过;而相应的法向力 N_T,将对质心形成纵向力矩。

对于涡轮螺桨发动机,速度方向改变,在桨盘处形成的法向力如图 7.25(a)所示。对飞行



器质心产生的纵向力矩系数为

$$C_{m.T}=\frac{N_T l_T}{qSc}=C_{NT}\bar{S}_T\bar{l}_T \tag{7.101}$$

式中螺旋桨法向力系数 $C_{NT}=N_T/qS_T$，可由螺旋桨特性曲线确定，$\bar{l}_T=l_T/c$ 为桨盘至飞行器质心的相对距离。

对迎角的导数为

$$\frac{\partial C_{m.T}}{\partial \alpha}=\frac{\partial C_{NT}}{\partial \alpha_T}\cdot\frac{\partial \alpha_T}{\partial \alpha}\cdot\bar{S}_T\bar{l}_T=\frac{\partial C_{NT}}{\partial \alpha_T}\left(1+\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\bar{S}_T\bar{l}_T \tag{7.102}$$

对于喷气发动机，法向力近似作用在进气道入口处，如图 7.25(b)所示。用动量定理可得

$$N_j=m_j V\sin\alpha_j\approx m_j V\alpha_j$$

对质心取矩，并化成力矩系数形式，可得

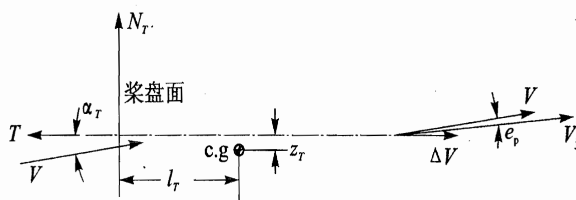
$$C_{m.j}=\frac{2m_j\alpha_j l_j}{\rho VS}=2C_j\bar{S}_j\bar{l}_j\alpha_j \tag{7.103}$$

式中 C_j 为进气道流量系数；$\bar{S}_j=S_j/S$ 为进气口相对面积；$\bar{l}_j=l_j/c$ 为进气口至飞行器质心的相对距离。

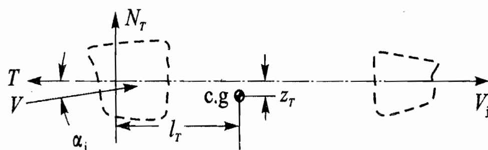
对迎角求导，得

$$\frac{\partial C_{m.j}}{\partial \alpha}=2C_j\left(1+\frac{\partial \varepsilon}{\partial \alpha}\right)\bar{S}_j\bar{l}_j \tag{7.104}$$

一般情况下，$\frac{\partial C_{m.T}}{\partial \alpha}$ 或 $\frac{\partial C_{m.j}}{\partial \alpha}$ 均大于零，可见计及发动机法向力的影响，将对飞行器纵向静稳定性起不利作用。



(a) 涡轮螺桨发动机



(b) 涡轮喷气发动机

图 7.25　动力装置的推力和法向力的作用



3. 螺旋桨滑流和尾喷流的干扰作用

气流经过螺旋桨后，获得发动机供给的能量，形成一股速度大于飞行速度的滑流。当这股滑流流过翼身和平尾时，由于速压的增加，这些部件原有的气动特性都会发生变化。但由于理论估算困难，常通过带动力模型的吹风试验加以确定。

喷气发动机的尾喷流是一股高温高速燃气，不允许直接流过其他气动部件，以免烧坏结构。但由于喷流气体分子粘性和扩散作用，向后流动时边界会逐渐扩大，由此吸引周围部分空气，形成所谓引射作用。如平尾处于引射流中，则其流经的速度大小和方向均发生变化，引起附加下洗，给纵向力矩带来影响。同样，由于喷流作用复杂，其影响主要通过试验确定。

7.8.2　飞行器构形变化的影响

1. 增升装置

提高 $C_{L\max}$ 的各类空气动力装置，称为增升装置。这些装置包括多种形式的后缘襟翼、前缘襟缘和吹除附面层控制等。显然，每一种装置对升力和纵向力矩都有独特的影响。这里不进行深入讨论，仅对常规飞机上采用的一种后缘襟翼情况加以介绍。

常用的后缘襟翼，主要用于改善飞机的起落特性，可以分为后退和非后退两类。前者随襟翼偏转还沿滑轨向外伸出，增大了机翼平面投影面积和局部弦长；后者在偏转时基本上不改变机翼平面投影面积和局部弦长(见图 2.48)。

襟翼偏转的效果相当于弯度变化，按线性化理论，对于非后退襟翼并不改变机翼平面投影面积，因此机翼升力线斜率及焦点位置都不受襟翼偏转的影响，但阻力则随襟翼偏转而增大，机翼零升迎角及零升力矩也有变化。对于后退襟翼，机翼投影面积及其弦长变化，故 $C_{L\alpha,\mathrm{wb}}$ 和 $\bar{x}_{\mathrm{ac,wb}}$ 要修正。

襟翼偏转的另一作用是改变了机翼展向载荷分布，如图 7.26 所示。其结果使尾流区发生变化，从而影响平尾处的平均下洗和速度阻滞系数 K_q。

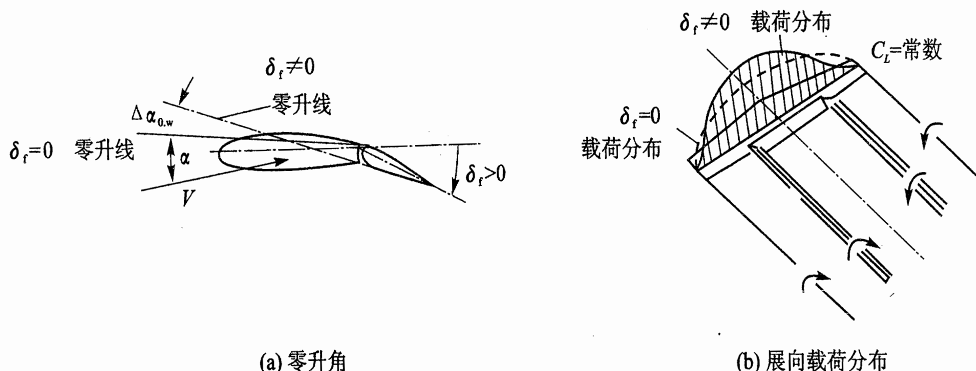


图 7.26　襟翼偏转引起的零升角及展向载荷分布变化



显然，放下襟翼引起的气动特性变化会影响飞机纵向平衡特性、静稳定性和静操纵性。

2. 减速板、起落架

放起落架及打开减速板的直接影响是增加阻力，同时改变飞机的纵向力矩。此外，减速板尾迹区与平尾、后机身的干扰作用，可能引起正的附加纵向力矩(见图 7.27)。飞行品质规范中明确规定在放起落架及打开减速板的过程中，为了保持原平衡状态，不应有过大的杆力变化和产生讨厌的抖振或振荡。开减速板只允许产生抬头力矩，但保持原平衡状态的杆力变化也不得超过规定范围。为获得放起落架及开减速板的气动特性，最好依靠风洞试验。

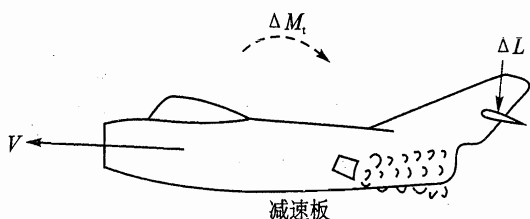


图 7.27　开减速板引起的干扰纵向力矩

7.8.3　弹性变形的影响

到目前为止，讨论的都是刚性飞行器气动特性。实际结构不可能是绝对刚性的。特别是近代高速飞行器，采用薄翼、细长机身的气动外形，结构刚度相对减小，而所能达到的速压较大，容易产生弹性变形。这种变形反过来又影响飞行器的气动特性。研究弹性飞行器的气动力，已发展成为一个专门的学科，属于气动弹性力学的一个组成部分。

下面仅以后机身静弹性弯曲变形为例，讨论弹性变形带来的影响。这里所指静弹性变形是假定结构变形始终与气动力合拍，即弹性力与气动力随时处于平衡状态，略去弹性变形的惯性和阻尼作用。

飞行器以一定迎角飞行时，在平尾升力作用下，后机身会发生弯曲(见图 7.28)。后机身向上弯曲时，相当于平尾向下转动一个角度，从而使平尾迎角减小了 $\Delta\alpha_t$，可表示为

$$\Delta\alpha_t = -KL_t \tag{7.105}$$

式中 K 为机身弹性弯曲刚度系数。

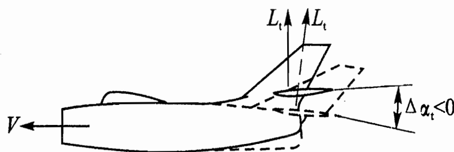


图 7.28　后机身静弹性变形引起平尾升力的变化

于是，平尾处的净迎角为

$$\alpha_t = \alpha_{wb} + \phi_t - \varepsilon - KL_t \tag{7.106}$$

在 $\delta_e = 0$ 时，尾翼升力系数为

$$C_{L,t} = C_{L\alpha,t}(\alpha_{wb} + \phi_t - \varepsilon - KL_t) \tag{7.107}$$



式中的尾翼升力用系数表示，$L_{\mathrm{t}}=k_q C_{L\mathrm{t}}\frac{1}{2}\rho V^2 S_{\mathrm{t}}$，代入上式后，可得

$$C_{L.\mathrm{t}}=\eta_q C_{L\alpha.\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{wb}}+\phi_{\mathrm{t}}-\varepsilon) \tag{7.108}$$

式中 $\eta_q=1/(1+Kk_q q S_{\mathrm{t}} C_{L\alpha.\mathrm{t}})$，为静弹性变形影响因子。一般 $\eta_q<1$。很明显，与刚性飞机相比，平尾升力减小了，随着动压 q 增加，影响会很严重。由式(7.17)可知，尾翼效率降低引起飞行器中性点前移，降低了静稳定性。其移动量为

$$\Delta\bar{x}_{\mathrm{n}}=A_{\mathrm{ht}}\frac{C_{L\alpha.\mathrm{t}}}{C_{L\alpha}}(\eta_q-1)\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right) \tag{7.109}$$

在 $\delta_{\mathrm{e}}\neq 0$ 的情况下，则式(7.107)改为

$$C_{L.\mathrm{t}}=C_{L\alpha.\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{wb}}+\phi_{\mathrm{t}}-\varepsilon-KL_{\mathrm{t}})+C_{L\delta_{\mathrm{e}}}\delta_{\mathrm{e}}$$

同样式中 L_{t} 用系数表示式得

$$C_{L.\mathrm{t}}=\eta_q C_{L\alpha.\mathrm{t}}(\alpha_{\mathrm{wb}}+\phi_{\mathrm{t}}-\varepsilon)+\eta_q C_{L\delta_{\mathrm{e}}}\delta_{\mathrm{e}} \tag{7.110}$$

可见，升降舵效率 $C_{L\delta_{\mathrm{e}}}$ 同样乘以弹性变形影响因子 η_q，故使操纵效能降低，影响飞行器的平衡特性和静操纵性。

7.8.4 大迎角飞行和地面效应的影响

大迎角飞行时，飞行器表面出现气流的局部分离，破坏了气动力的线性变化。这时焦点的概念也不适用了。随着迎角继续增加，会形成诸如前体脱落涡、机翼前缘涡等复杂的涡系，接着会发生涡破碎的现象。气流分离的位置、涡破碎的位置、涡系间的干扰和涡系与飞行器运动之间耦合等因素，造成了非常复杂的非线性气动力。至今对这些现象出现机理的认识还在进一步探讨中。

但为了提高飞行器在大迎角下的升力系数，现代飞机已采用了边条翼、近耦鸭翼等气动布局，利用边条翼或近耦鸭翼产生的分离涡，形成对基本翼的有利干扰，达到了预期目的。图 7.29为某机纵向气动力特性曲线。从图上可见，分离延缓，临界迎角和 $C_{L\max}$ 提高了。但由于尾流区流态太差，造成飞机的纵向静稳定力矩减小，甚至出现静不稳定情况；阻尼力矩也相应减小，舵面的操纵效率大大下降。目前采用增稳控制器，提供人工的静稳定力矩、阻尼力矩；采用推力矢量控制技术，增强纵向操纵效果。这样可以确保飞机能在大迎角下的平衡、稳定和操纵，充分利用飞行器 $C_{L\max}$ 的潜能，提高机动性和敏捷性。详细情况将在第 11 章介绍。

飞机起落过程中，有短时间的接近地面的飞行。受地面的限制，其绕流与远离地面飞行有所不同，致使飞机平衡和稳定性发生变化。因此通常将起落状态作为主要设计状态。

地面存在的边界条件的主要影响是减少翼身组合体和平尾的下洗，从而增大翼身组合体和平尾的升力系数斜率。这就是所谓地面效应。由于复杂外形的涡系不易确切描述，所以地面效应往往需依靠吹风实验解决。实验结果表明，地面效应只在离地面半个机翼展长的高度范围内才较明显，故只在起落阶段近地飞行时加以考虑。地面效应对飞行安全有重要影响，不容忽视。

图 7.29　纵向气动特性随 α 的变化

7.9　飞行器质心的变化范围

从讨论飞行器纵向稳定性和操纵性中可知，质心的位置是一个非常重要的参数。实际飞行过程中，装载的不同，燃料的消耗，弹药的投放等均会使飞行器质心位置发生变化。因此确



定飞行器质心变化范围，以满足飞行品质（包括稳定性和操纵性）要求是飞行器设计中的关键之一。另外，平尾作用是给飞行器提供稳定和操纵所必需的力矩。不同的质心位置，所需提供的力矩是不同的。因此确定平尾面积的大小和布局是飞行器设计中的又一关键。考虑到平尾面积和质心位置的关系，下面讨论质心变化时将平尾面积确定结合起来进行。

现代飞行器，特别是军用飞机，为提高机动性、敏捷性，常采用放宽静稳定性技术，即飞行器的质心位置设置在中性点附近，甚至中性点之后，飞行器将处于静稳定性很差，甚至静不稳定的状态。此时的质心位置确定原则，会与具有静稳定的飞行器有所不同。为此下面分开讨论之。

7.9.1　常规飞行器

这里的常规飞行器是指具有纵向静稳定性的飞行器，质心位于全机中性点之前。实现定直飞行时，由于舵面操纵偏转产生的升力，总是与迎角产生的升力相反，全机的升力将损失一部分，如图7.30所示，即

$$L = L(\alpha) - L(\delta_e) \qquad (7.111)$$

此时纵向力矩处于平衡状态。为便于讨论质心位置与平尾面积之间的关系，现将全机纵向力矩系数表示式(7.15)重新写成翼身组合体和平尾两部分产生的力矩系数之和的形式：

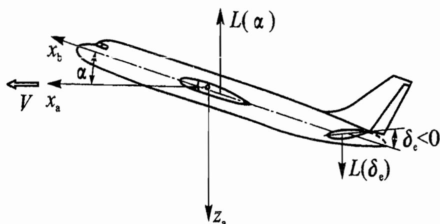


图7.30　常规飞机定直飞行时作用在机上的升力情况

$$C_m = C_{m0.\,wb} + C_{L.\,wb}\left(\frac{x_{c.\,g} - x_{ac.\,wb}}{c}\right) - C_{L.\,t}k_q\frac{S_t l_{ht}}{Sc} \qquad (7.112)$$

$$C_{L.\,wb} = C_{L\alpha.\,wb}\alpha$$

$$C_{L.\,t} = C_{L\alpha.\,t}\left[\alpha\left(1 - \frac{\partial\varepsilon_{wb}}{\partial\varepsilon}\right) - \varepsilon_{0.\,wb} + \phi_t + \eta_e\delta_e\right]$$

其中近似认为 $\alpha \approx \alpha_{wb}$。

1. 质心后限

质心位置向后移动，飞机静稳定性减小，飞机作定常飞行时所需舵偏角和杆力减小。但若杆力过小，飞机将变得太灵敏，驾驶员不易精确操纵。因此质心后限将由稳定性最低要求而定，在中性点位置加上一定的稳定裕量。为此将不同平尾面积与中性点位置之间的关系曲线，称为稳定性边界。

由式(7.112)对迎角求导得

$$C_{m\alpha} = C_{L\alpha.\,wb}\frac{x_{c.\,g} - x_{ac.\,wb}}{c} - C_{L\alpha.\,t}\left(1 - \frac{\partial\varepsilon_{wb}}{\partial\alpha}\right)k_q\frac{S_t}{S}\frac{l_{ht}}{c} \qquad (7.113)$$

令 $C_{m\alpha}=0$，此时飞机质心位置为中性点，$x_{c.\,g} = x_n$。又引入平尾焦点至翼身焦点之间距离为 $l_{ht}^* = l_{ht} + x_{c.\,g} - x_{ac.\,wb}$，于是可得需用的平尾面积与中性点位置之间关系式

$$\frac{S_t}{S}=\frac{C_{L\alpha.\mathrm{wb}}}{C_{L\alpha.\mathrm{t}}}\frac{1}{\left(1-\frac{\partial\varepsilon_{\mathrm{wb}}}{\partial\alpha}\right)k_q}\frac{x_n-x_{\mathrm{ac.wb}}}{l_{ht}^*-(x_n-x_{\mathrm{ac.wb}})} \tag{7.114}$$

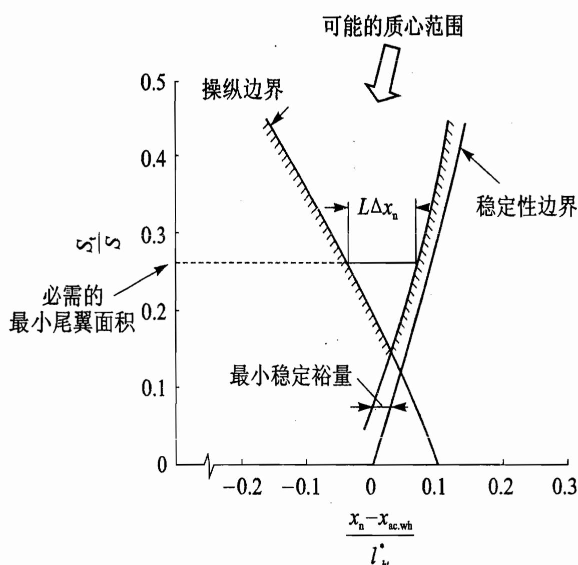


图 7.31 常规飞机平尾面积和质心位置关系曲线

绘出的稳定边界线如图 7.31 所示。在此基础上加上最小的稳定裕量 Δx_n，以保证飞机良好的动态特性，这样就确定了飞机质心的后限 $(x_{c.g})_h$ 边界线。

从式(7.114)可以清楚地看出，边界的位置与翼身、平尾的升力比 $C_{L\alpha.\mathrm{wb}}/C_{L\alpha.\mathrm{t}}$ 有关，它将决定于机翼和尾翼的几何形状；此外还与局部下洗梯度 $\partial\varepsilon/\partial\alpha$ 有关，而局部下洗梯度又与机翼展弦比、尾翼相对机翼位置有关。

2. 质心前限

质心位置前移时，飞机静稳定性增加，飞机实现定常飞行时所需舵偏角和杆力增加。过大的杆力，将使驾驶员操纵飞机发生困难，因此质心前限由操纵性要求来确定，尾翼能在整个飞行范围内有足够的操纵力矩来保证飞机纵向平衡。为此必须确定临界飞行状态，即要求操纵力矩最大时的飞机构形。不同平尾面积与质心前限的关系曲线，又称操纵边界。

由力矩平衡条件，即 $C_m=0$，可得尾翼面积和质心位置的关系式

$$\frac{S_t}{S}=\frac{C_{L.\mathrm{wb}}}{k_q C_{L\mathrm{t}}}\cdot\frac{x_{c.g}-x_{\mathrm{ac.wb}}+cC_{m0.\mathrm{wb}}/C_{L.\mathrm{wb}}}{l_{ht}^*-(x_{c.g}-x_{\mathrm{ac.wb}})} \tag{7.115}$$

为了产生操纵力矩，要求尾翼不仅能提供正升力，也能提供负升力，故尾翼能在下述范围内工作，即

$$-(C_{L.\mathrm{t}})_{\min}\leqslant C_{L.\mathrm{t}}\leqslant(C_{L.\mathrm{t}})_{\max} \tag{7.116}$$

显然，确定质心前限的临界状态，应选用放下襟翼时的飞机构形，此时 $C_{L.\mathrm{wb}}$ 为最大。而尾翼操纵力取最小值，即 $-(C_{L.\mathrm{t}})_{\min}$。代入式(7.115)得出尾翼面积与质心前限位置 $(x_{c.g})_b$ 关系

$$\frac{S_t}{S}=-\frac{(C_{L.\mathrm{wb}})_{\max}}{k_q(C_{L.\mathrm{t}})_{\min}}\frac{(x_{c.g})_b-x_{\mathrm{ac.wb}}+cC_{m0.\mathrm{wb}}/(C_{L.\mathrm{wb}})_{\max}}{l_{ht}^*-[(x_{c.g})_b-x_{\mathrm{ac.wb}}]} \tag{7.117}$$

由上式可绘出操纵边界线，仍画在图 7.31 上。

从图 7.31 中可以得出飞机稳定性和操纵性都合适的质心变化范围。给定质心范围，就可决定必需的最小平尾面积；反过来，确定了平尾面积，也就给出相应的质心变化范围。



7.9.2 放宽静稳定性飞行器

对于放宽静稳定性飞机，有些飞行状态下飞机将是静不稳定的，质心位置位于全机中性点之后。此时实现定常飞行，舵面偏转产生的升力与迎角产生的升力方向是一致的，全机升力将是两者之和(见图 7.32)，即

$$L = L(\alpha) + L(\delta_e)$$

与常规飞机相比，在同样 α 作用下，显然放宽静稳定性飞机产生的总升力增加，从而可提高飞机的机动性。如要求产生同样的全机升力，则放宽静稳定性飞机所需平飞迎角减小，从而可减少诱阻，增大升阻比，翼载的减小可以减轻结构重量等。故目前放宽静稳定性技术在军用、民用飞机中已广泛采用，详细分析见第 9 章。

采用放宽静稳定性后，飞机的质心前限边界类同常规飞机，仍由操纵性要求来确定。但其质心后限，稳定性条件已不存在，故也由平衡所需操纵力矩来定。此时取尾翼最大操纵力 $(C_{L.t})_{max}$，并分别取放下襟翼时增升构形和巡航构形的 $(C_{L.wb})_{max}$ 和 $C_{m0.wb}$，代入式(7.115)，得出尾翼面积与重心位置 $(x_{c.g})_h$ 后限之间关系

$$\frac{S_t}{S} = \frac{(C_{L.wb})_{max}}{k_q (C_{L.t})_{max}} \cdot \frac{(x_{c.g})_h - x_{ac.wb} + cC_{m0.wb}/(C_{L.wb})_{max}}{l_{ht}^* - [(x_{c.g})_h - x_{ac.wb}]} \tag{7.118}$$

绘出的质心位置边界图如图 7.33 所示。由图可见，质心后边界先由巡航飞行状态确定(S_t 值较小时)，只是在 S_t 值较大时，才由增益构形飞行状态确定。其原因是 $C_{m0.wb}$ 和 $(C_{L.wb})_{max}$ 的作用不同。

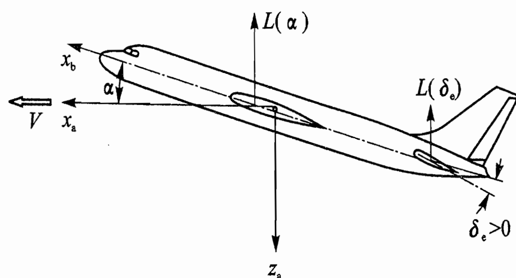


图 7.32 放宽静稳定性飞机定直飞行时作用在机上的升力情况

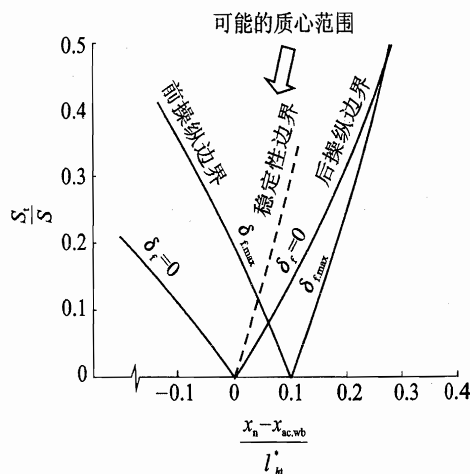


图 7.33 放宽静稳定性飞机平尾面积和质心位置关系曲线

7.9.3 影响因素讨论

影响飞行器的静稳定性和静操纵性的因素很多，因此由稳定性和操纵性确定的质心变化范围和平尾面积大小也会受到其他一些因素的影响。下面仅对起重要作用的影响因素进行讨论。

1. 动态要求

为保证飞机具有一定的改变轨迹倾角或迎角的机动能力，根据要求可以规定一个最小俯仰角加速度 $\dot{q}_\alpha$。为此，在俯仰力矩平衡方程中式(7.112)应加进相关旋转惯性项 $mi_y^2\dot{q}_\alpha$，通过推算可近似得出，质心位置修正量为

$$\Delta x_{c.g} = \frac{i_y^2}{g} \mid \dot{q}_\alpha \mid \tag{7.119}$$

式中 $i_y=\sqrt{I_y/m}$。

对于前重心位置，应后移一距离，为

$$(x'_{c.g})_b = (x_{c.g})_b + \Delta x_{c.g} \tag{7.120}$$

而对于后重心位置，应前移一距离，为

$$(x'_{c.g})_h = (x_{c.g})_h - \Delta x_{c.g} \tag{7.121}$$

最终导致飞机质心变化范围缩小。

2. *Ma* 影响

当飞机从亚声速过渡到超声速时，翼身组合体中性点和尾翼中性点的位置均向后移动，这影响质心变化范围。此时可以分别求得亚声速和超声速情况的质心范围，然后取其重叠部分。通常质心后限由亚声速情况确定；质心前限由亚声速增升构形或超声速巡航构形确定。

3. 推力偏心

推力偏离质心位置，将产生纵向推力力矩 $M_T=Tz_T$，势必影响飞行器纵向力矩平衡，为此尾翼提供的操纵力矩也应相应变化。若发动机低位安装，则推力引起抬头力矩；为平衡，又必须有一低头操纵力矩，结果导致后质心位置前移

$$(x'_{c.g})_h = (x_{c.g})_h - \Delta x_{c.g} \tag{7.122}$$

$$\Delta x_{c.g} = Tz_T/mg$$

若发动机置于高位，则产生一个低头推力力矩，类似地会引起前质心位置后移

$$(x'_{c.g})_b = (x_{c.g})_b + \Delta x_{c.g} \tag{7.123}$$

$$\Delta x_{c.g} =- Tz_T/mg$$

4. 前三点式飞机抬前轮

前三点飞机起飞滑跑过程中，为把迎角增大到离地迎角，需要进行绕主起落架的俯仰旋转运动，谓之抬前轮。抬前轮开始时，由于滑跑速度不大，为了保持平衡，要求尾翼操纵力矩最大，相应所需的舵偏角最大。很明显，质心愈靠前，静稳定性愈大，所需舵偏角愈大，因此在确



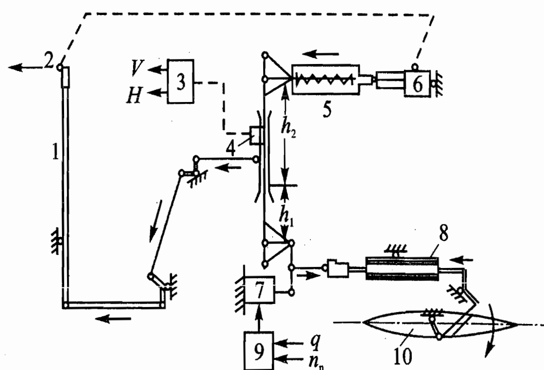
定了质心变化范围后,必须检查前重心位置是否满足要求。

7.10 助力器操纵时的杆力特性

现代高速飞机为了提高纵向操纵效率,大都采用全动平尾使操纵面积增加,因而驾驶杆力显著增大;另外,飞行速度和飞行高度范围扩大,杆力特性随飞行状态变化也大。因此单纯采用气动补偿,已不能保证整个飞行包线范围内满足飞行品质要求,而出现不协调现象,甚至跨声速区出现反操纵现象等。为此,改善高速飞机的操纵性的措施之一就是采用助力器系统来操纵舵面,而驾驶员不直接操纵舵面,只是操纵助力器分油活门。

7.10.1 助力器操纵系统简介

图 7.34 为某机的助力器操纵系统结构简图。它主要由液压助力器、载荷机构、调整片效应机构和力臂调节器等部分组成。



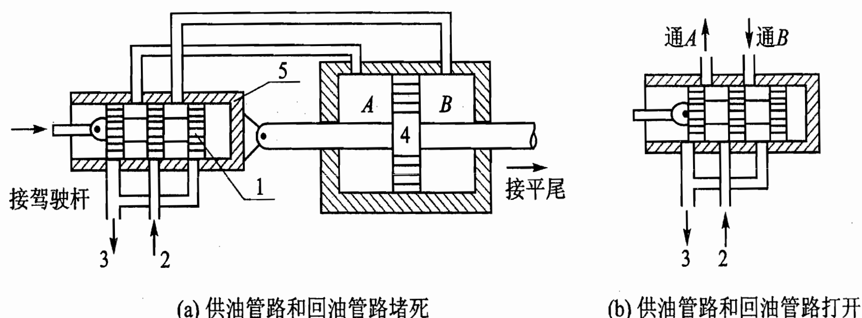
1—驾驶杆;2—调整片效应机构拨钮;3—V,H 传感器及放大器;
4—力臂调节器变臂执行机构;5—载荷机构;6—调整片效应机构;
7—舵机;8—无回力液压助力器;9—q,n_n 传感器及放大器;10—全动平尾

图 7.34 助力器操纵系统结构简图

1. 液压助力器

助力器的功能主要是带动全动平尾偏转,其工作原理如图 7.35 所示。当驾驶杆处于中立位置,与驾驶杆相连的分油活塞 1 也在中立位置,供油管路 2 和回路管路 3 均被堵死,平尾偏角为零,如图 7.35(a)所示。如果驾驶员向前推驾驶杆,分油活塞 1 则向右移动,高压油进入 A 腔,如图 7.35(b)所示,推动活塞 4 也向右移动,因而带动平尾向下偏转。与此同时,活塞 4 还带动分油活塞的外壳 5 也向右移动。当活塞 4 的移动量等于分油活塞 1 的移动量时,供油管路和回油管路又重新被堵死,于是平尾处于新的平衡位置上。

从上述工作原理可知,平尾上的铰链力矩完全被活塞 4 两边的液压差所平衡,而不会传到驾驶杆上去,故把这种助力器称为无回力或不可逆助力器。驾驶员只需要用很小的杆力去推



(a) 供油管路和回油管路堵死　　(b) 供油管路和回油管路打开

图 7.35　液压助力器原理图

动分油活塞及克服传动机构的摩擦力即可。

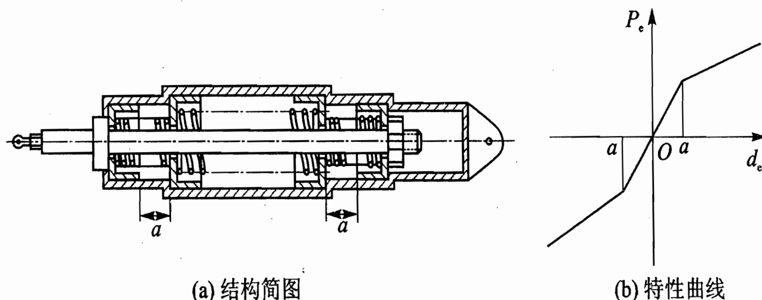
2. 载荷机构

由于采用无回力助力器操纵，驾驶杆力太小与飞行状态关系不大，因此驾驶员无法以杆力的大小来感觉飞行状态变化和掌握操纵量，这同样不能满足对操纵性的要求。

为使驾驶员能够感受到适当的杆力，在助力操纵系统中设置人感元件，模拟人工载荷的装置，即弹簧载荷机构，如图 7.36(a)所示。当驾驶杆前后移动时，压缩弹簧，驾驶员感到载荷机构的反力，其大小与杆位移成正比，可表示为

$$P_e = \frac{dP_e}{dd_e} d_e \tag{7.124}$$

式中 dP_e/dd_e 称为载荷机构的杆力梯度，是指驾驶员杆力随杆位移的变化率。显然，dP_e/dd_e 大，说明同样杆位移下所需杆力大，操纵费劲；反之 dP_e/dd_e 小，则所需杆力小，操纵省劲。为了改善操纵性能，小位移时应使杆力增加快一些，便于驾驶员掌握杆量；而大位移时应使杆力增加缓和一些，以减轻驾驶员的疲劳。故载荷机构常用几组刚度不同的弹簧组成，以实现上述要求。图 7.36(b)为两组弹簧组成的载荷机械特性曲线。



(a) 结构简图　　(b) 特性曲线

图 7.36　弹簧载荷机构及其特性曲线

3. 调整片效应机构

对于不带助力器的飞机，可以采用调整片来减小杆力，甚至减至零后作松杆飞行。对于装



有助力器的飞机，杆力由载荷机构提供，因此远距离飞行时要想卸除杆力，必须设法解除载荷机构中弹簧的压缩状态。人们把这种装置称为调整片效应机构。其工作原理如图 7.37 所示。

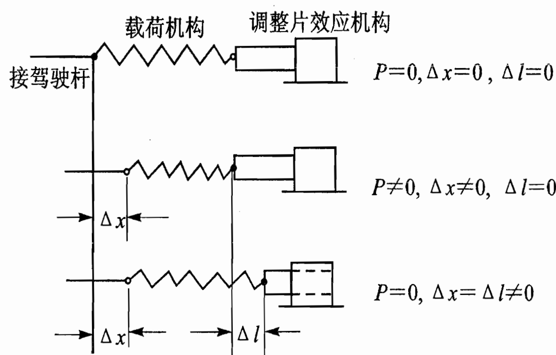


图 7.37　调整片效应机构原理图

设驾驶员用力向后拉杆，这时载荷机构的弹簧被压缩了 Δx。如果驾驶员接着按动驾驶杆手柄上的专用电钮，则调整片效应机构将带动载荷机构向右移动一般距离 Δl。当 $\Delta l=\Delta x$ 时弹簧恢复到中立状态，于是驾驶杆在新的位置上杆力变为零，起到了与气动调整片相同的作用。

4. 力臂调节器

用来调节力臂长度使舵面操纵系统传动比 k_e改变的机构，称为力臂调节器。显然，k_e增大，产生同样舵偏角所需杆位移减小；反之，k_e减小，则所需杆位移增大。传动比 k_e的大小与力臂调节器的工作臂长度 h_1成正比(见图 7.34)。h_1的大小可以根据速压和飞行高度自动地调节，传动比 k_e也随之变化。从图 7.34 上还可看出，当工作臂长度 h_1改变时，与载荷机构连接的那段臂长(称为载荷臂)的长度 h_2也随着改变，其结果会引起载荷机构特性变化。这些变化均可达到改善杆力特性的目的。

7.10.2　助力操纵时杆力特性

无回力助力器操纵时，其杆力式(7.124)中的杆位移 d_e可通过升降舵操纵系统的传动比表示，即 $d_e=\delta_e/k_e$，代入杆力公式后，可写成

$$P_e=\frac{1}{k_e}\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}d_e}\cdot\delta_e \tag{7.125}$$

由此可见，助力操纵飞机的杆力特性与人操纵的杆力特性式(7.70)有很大不同。这不仅与实现不同定常飞行状态所需的舵偏角有关，还与操纵系统传动比和载荷机构的杆力梯度有关。助力操纵系统的力臂调节器正是通过改变 k_e和 $\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$ 来改善飞机的杆力特性。

1. 力臂调节器的功能

图 7.38 为力臂调节器简图，力臂调节器的壳体可绕固定点 C 转动，壳体上节点 B 间接与



驾驶杆相连，$BC=b=$常值。活动臂 AD 可以根据速压 q（或 V）和飞行高度 H 信号的输入，由电动机带动相应地上下移动，工作壁 h_1 和载荷臂 h_2 长度随之改变，但 $h_1+h_2=AD=$常值。下面介绍其具体的功能。

（1）改变传动比 k_e

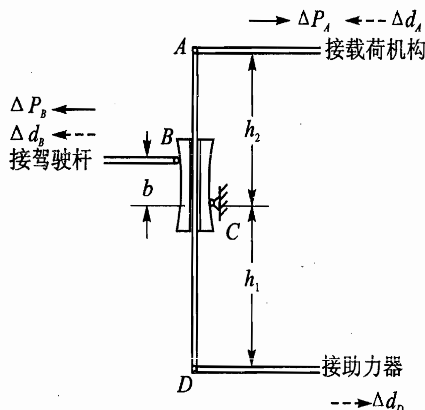


图 7.38　力臂调节器原理图

由图 7.38 可知，当驾驶员推杆，力臂调节器上 B 点位移 Δd_B，其大小应与杆位移 Δd_e 成正比；D 点位移 Δd_D，其大小应与舵偏角 $\Delta\delta_e$ 成正比。而位移 Δd_B 和 Δd_D 之间的关系，可由力臂调节器的几何关系确定，即

$$\frac{\Delta d_B}{\Delta d_D}=\frac{h_1}{b}$$

于是

$$k_e=\frac{\Delta\delta_e}{\Delta d_e}=c_1 h_1 \tag{7.126}$$

式中 c_1 为比例常数。此式表明传动比 k_e 与工作臂长度 h_1 成正比。活动杆向下移动，力臂调节器处于小臂工作状态，传动比 k_e 减小；活动杆向上移动，则处于大臂工作状态，传动比 k_e 增加。

例如某机在小臂工作状态时，$k_{e.\min}=0.065$ (°)/mm；大臂工作状态时，$k_{e.\max}=0.125$ (°)/mm。两者比值接近 2。

（2）改变杆力梯度 $\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$

若驾驶员移动杆位移 Δd_e，则通过活动臂使载荷机构弹簧伸长 Δd_A。此时力臂调节器上 B 点处的力 ΔP_B 应能平衡弹簧反力 ΔP_A。设弹簧刚度系数为 K，则

$$\Delta P_B=\frac{h_2}{b}\Delta P_A=\frac{h_2}{b}K\Delta d_A$$

由力臂调节器的几何关系，可以得到 Δd_B 与 Δd_A 的关系

$$\Delta d_B=\frac{b}{h_2}\Delta d_A$$

考虑到杆力梯度 $\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$ 应与 B 点处力的位移梯度 $\mathrm{d}P_B/\mathrm{d}d_B$ 成正比，于是可得

$$\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}d_e}=c\frac{\mathrm{d}P_B}{\mathrm{d}d_B}=cK\frac{h_2^2}{b^2}=c_2h_2^2 \tag{7.127}$$

式中 c,c_2 均为比例常数。此式表示，杆力梯度 $\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$ 与载荷臂长度的平方成正比。小臂工作状态时，$\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$ 值增加；大臂工作状态时，$\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$ 值减小。

与(1)中的例子同一架飞机，在小臂工作状态时，$\left(\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}d_e}\right)_{\min}=5.39$ N/mm；大臂工作状态时，$\left(\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}d_e}\right)_{\max}=1.79$ N/mm。两者之比接近 3。注意，下标 min 和 max 只是表示对应小臂和



大臂工作状态。

(3) 出现引动量

当操纵系统舵面处于中立位置时，仅在力臂调节器变臂过程中引起的升降舵附加偏角$\Delta\delta_e$，称为引动量。当处于小臂工作状态时，引动量偏角上偏$\Delta\delta_e<0$；大臂工作状态时，引动量偏角下偏$\Delta\delta_e>0$，如图7.39所示。

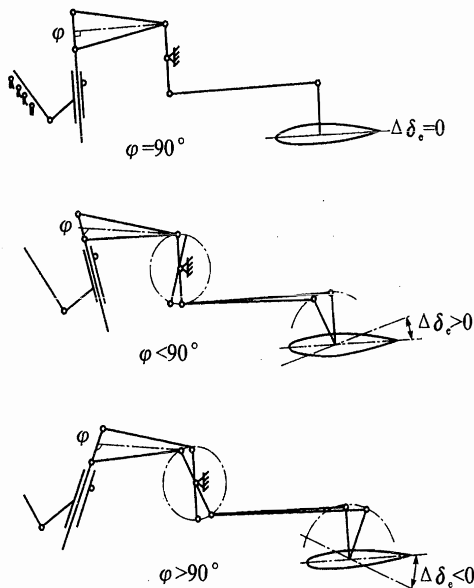


图7.39　力臂调节器变臂时引起的舵偏量

2. 定直平飞时杆力

将定直平飞所需的升降舵偏角式(7.46)代入式(7.125)，即得到采用助力器操纵时定直平飞所需的杆力。相应的静操纵指标，可对定直平飞速度求导得出

$$\frac{\partial P_e}{\partial V}=\frac{1}{k_e}\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}d_e}\frac{\partial\delta_e}{\partial V}\tag{7.128}$$

显然，升降舵偏角平衡特性随飞行状态而变化，通过力臂调节器的工作，改变k_e和$\mathrm{d}P_e/\mathrm{d}d_e$的值，减少杆力平衡特性随飞行状态变化的影响。

另外，采用助力器操纵后，高速飞行时常用小臂工作状态，此时引起的舵偏角引动量$\Delta\delta_e$下偏，刚好可以减少跨声速反操纵所需舵偏角，使杆力平衡曲线的勺形变缓，如图7.24中虚线所示，大大减轻了跨声速区反操纵现象，以满足飞行品质要求。

3. 定常拉升时杆力

将定常拉升所需的升降舵偏角式(7.64)代入式(7.125)，即得飞机助力操纵时拉升运动所需的杆力。同样对过载的求导，静操纵性指标每g杆力可表示为

$$\frac{\partial P_e}{\partial n_n}=\frac{1}{k_e}\frac{\mathrm{d}P_e}{\mathrm{d}d_e}\frac{\partial\delta_e}{\partial n_n}\tag{7.129}$$

每 g 舵偏角$\partial\delta_e/\partial n_n$ 随飞行状态变化较大。图 7.40 中的曲线表示某机$\partial\delta_e/\partial n_n$ 随 q 和 H 的变化规律。一般情况下，高空、低速作机动飞行时所需的舵偏角，比低空、高速时要大得多。随之，每 g 杆力$\partial P_e/\partial n_n$ 随飞行状态变化也很大，这对驾驶员操纵很不利。

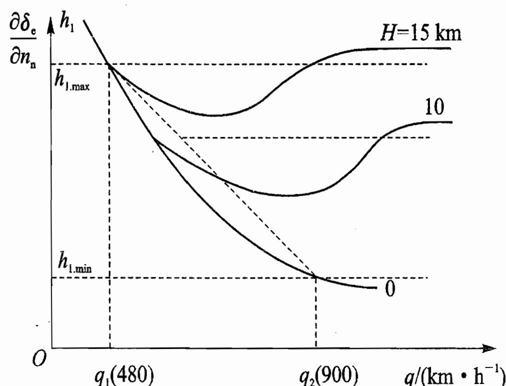


图 7.40　力臂调节器随飞行状态的变臂规律

采用助力器操纵后，如力臂调节器的工作臂 h_1 按图 7.40 中虚线所示规律变化，也随 q 和 H 改变，则在同一个飞行高度 H 上，高速时$|\partial\delta_e/\partial n_n|$较小，让力臂调节器处于小臂工作状态，随之传动比 $k_e=f(h_1)$减小，杆力梯度 $dP_e/dd_e=f(h_2)$增大，以保证$\partial P_e/\partial n_n$ 合适的大小；低速时$|\partial\delta_e/\partial n_n|$较大，力臂调节器将处于大臂工作状态，$k_e$增大和 dP_e/dd_e 减小，也可保证合适的$\partial P_e/\partial n_n$ 值。如以同一个飞行速度飞行，则高空时$|\partial\delta_e/\partial n_n|$较大，采用大臂工作状态；低空时$|\partial\delta_e/\partial n_n|$较小，用小臂工作状态，同样可以达到合适的$\partial P_e/\partial n_n$ 值的效果。

综上分析，可以这么说，引入了可变臂的力臂调节器，使得飞机在不同高度和速度作同样过载机动飞行时，所需的杆力大小变化不多，即$\partial P_e/\partial n_n$ 变化不大，因而改善了飞机的静操纵性。

近年来，电传操纵系统已广泛采用，改善飞机的静操纵性措施显得更有效，也较为方便，如采用随飞行状态调参的传动比机构、引入人感系统和相应的反馈信号等；但这又会带来一些新的静操纵问题，如杆舵不协调等。详细内容见第 9，10 章或飞行器操纵系统专著。

复习思考题

7.1　何谓飞行器的全机焦点(气动中心)？分析影响焦点位置 $\bar{x}_{ac}$的主要因素。

7.2　何谓飞行器的纵向定速静稳定性和定载静稳定性？

7.3　说明飞行器在跨声速区飞行时出现“自动俯冲”现象的物理原因。

7.4　在风洞中测得某机纵向力矩参数与迎角成线性关系，且测得 $\alpha_1=4°$时，$C_{m1}=0.005$；$\alpha_2=6°$时，$C_{m2}=0.025$。已知 $C_{L\alpha}=3.5$ 1/rad，试确定该机的静稳定导数$\partial C_m/\partial C_L$。



又如只改变飞机的质心位置，测得 $\alpha_3=4°$时，$C_{m3}=0.025$。试求质心的相对移动量。

7.5　从概念上说明 C_{mq} 和 $C_{m\dot{\alpha}}$ 有何区别及其产生的原因。

7.6　说明 $\bar{x}_m$ 和 $\bar{x}_{m.f}$ 的物理含义。如果飞行器质心位于二者之间，则对飞行器的操纵性有何影响？

7.7　某机 $W=56\ 900$ N，$S=25$ m^2，$c=4$ m，$\bar{l}_{ht}=1.5$，$C_{L\alpha}=2.12$，$C_{m\alpha}=-0.66$，$C_{mq}=-1.53$，$C_{m\delta_e}=-0.36$。试求该机在 $H=10\ 000$ m，$Ma=1.5$ 状态下的$\partial\delta_e/\partial n_n$ 值，以及 $\Delta n_n=4$ 时舵偏角增量 $\Delta\delta_e$ 的大小。

7.8　在 7.7 题中，如果已知全动平尾最大偏角 $\delta_{e.max}=-12°$，以及定常平飞时的配平偏角 $\delta_{e*}=-1.48°$，试求在该飞行状态下飞机作定常曲线飞行时可能达到的最大过载 $n_{n.max}$。

7.9　设某机由某一定直平飞状态转至另一定直平飞状态，迎角增加 3°。已知 $C_{m\alpha}=-1.15$，$C_{m\delta_e}=-0.86$，$C_{he.\alpha}=-0.105$，$C_{he.\delta}=-0.16$，$C_{he.\tau}=-0.052$，$\partial\varepsilon/\partial\alpha=0.45$。如原状态杆力已配平，为在新状态下重新配平杆力，应使调整片偏角改变多少？

7.10　证明当平衡飞行状态保持不变，而飞机质心向后移动距离 c 时，为保持平衡所增加的驾驶杆力为 $\Delta P_e=P_e^*=k_e k_q S_e c_e \dfrac{W C_{he.\delta}}{S\, C_{m\delta_e}}$。

7.11　如舵面质心不通过铰连轴，对定直平飞杆力特性有什么影响？对拉升运动的杆力特性又有什么影响？

7.12　分别说明确定常规飞行器和放宽静稳定性飞行器质心位置范围的原则。

第8章　飞行器的横航向平衡、静稳定和静操纵

第7章讨论了飞行器的纵向力矩特性及对称飞行的平衡、静稳定和静操纵问题。然而，实际飞行过程中，还可能出现非对称的运动，习惯上称为横侧运动。它包括飞行器质心的侧向移动，谓之侧滑，以及绕 Ox_b，Oz_b 轴的滚转和偏航转动运动，如图8.1所示。这类运动可能是由于外界非对称干扰引起的，也可能是由于驾驶员操纵副翼、方向舵等操纵机构，引起构形不对称造成的。

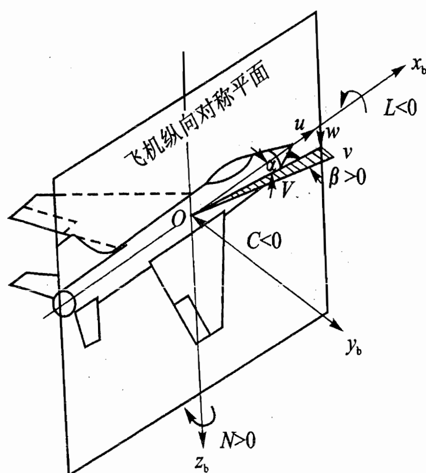


图8.1　机体轴系中表示的横侧参数

飞行中出现横侧运动时，自然会改变原来对称飞行中全机的压强分布，气动力和力矩会产生相应的变化。如果横侧运动参数量值较小，根据第6章中介绍的小扰动理论，可以近似认为在给定纵向运动参数的情况下，横侧运动基本上不影响纵向力和力矩，而只是引起与横侧运动参数成正比的侧力 C、滚转力矩 L 和偏航力矩 N。一般情况下，横航向气动力和力矩是状态变量和操纵变量的函数，表示为

$$\left.\begin{aligned} C &= C(Ma,\beta,p,r,\delta_r,\delta_{T_z}) \\ L &= L(Ma,\beta,p,r,\delta_a,\delta_r) \\ N &= N(Ma,\beta,p,r,\delta_a,\delta_r,\delta_{T_z}) \end{aligned}\right\} \tag{8.1}$$

式中 Ma 为马赫数；δ_a 为副翼偏角；δ_r 为方向舵偏角；δ_{T_z} 为推力矢量航向偏角。当这些变量较小时，上式可用近似的线性关系表示，即

$$\left.\begin{aligned} C &= C_\beta\cdot\beta + C_p\cdot p + C_r\cdot r + C_{\delta_r}\cdot\delta_r + C_{\delta_{Tz}}\cdot\delta_{T_z} \\ L &= L_\beta\cdot\beta + L_p\cdot p + L_r\cdot r + L_{\delta_a}\cdot\delta_a + L_{\delta_r}\cdot\delta_r \\ N &= N_\beta\cdot\beta + N_p\cdot p + N_r\cdot r + N_{\delta_a}\cdot\delta_a + N_{\delta_r}\cdot\delta_r + N_{\delta_{Tz}}\cdot\delta_{T_z} \end{aligned}\right\} \tag{8.2}$$

式中各力和力矩导数均为 Ma 和飞行器外形的函数。当然，对于大机动飞行时，还应与飞行迎角 α 有关。

实际飞行中，上述任一参数的改变，往往会引起所有横侧向运动参数的变化；换句话说，飞行器的侧滑、滚转和偏航运动之间耦合紧密，为此横侧向运动必须综合考虑，与纵向相比要复杂些。本章将首先介绍作用在飞行器上的横航向气动力矩及其影响因素；然后讨论横航向的



静稳定性；最后讨论定直侧滑运动、正常盘旋和稳定滚转时的平衡和静操纵性。

上述所述内容是针对面对称飞行器而言的。对于轴对称构形的飞行器，相对来说要简单些。此时飞行器上产生的偏航力矩，其机理与俯仰力矩完全一样。另外，某些参数不会影响滚转力矩，如方向舵偏角 δ_r、偏航角速度 r 等，因此在后续章节中不另行介绍了。但对于鸭式轴对称外形，由于出现洗流不对称引起的所谓斜吹力矩，将在 8.4 节单独介绍。

8.1　静稳定力矩

侧滑角 β 引起的飞行器横航向力矩，分别称为偏航静稳定力矩和滚转静稳定力矩。全机横、航向静稳定力矩随 β 的变化规律，可以通过吹风实验得出，或者采用工程估算求得。下面将简要介绍其估算方法。

8.1.1　静稳定力矩的组成

全机的横、航向静稳定力矩，可以通过各部件产生的力矩之和来表示。其侧力和偏航力矩主要由垂尾和机身产生；而滚转力矩则由机翼和垂尾产生。

1. 机翼部分

飞行器以某迎角 α 作侧滑飞行时，机翼两侧绕流不对称，会产生横航向力矩。相对来说，侧滑引起的偏航力矩较小；而滚转力矩则较大，它主要通过机翼平面形状、上反角起作用。

(1) 后掠角 χ 作用

设想后掠角为 χ 的机翼作右侧滑飞行，如图 8.2 所示。这时，1/4 翼弦连线的后掠角，左右两翼并不相同，左半翼后掠角增大为 $(\chi+\beta)$，右半翼后掠角则减小为 $(\chi-\beta)$。显然，左右两翼的绕流将不尽相同。略去中间和翼端效应，根据无限斜置机翼理论，作用于机翼上的气动力是由垂直于焦线的局部速度和垂直焦线剖面的局部迎角决定的。

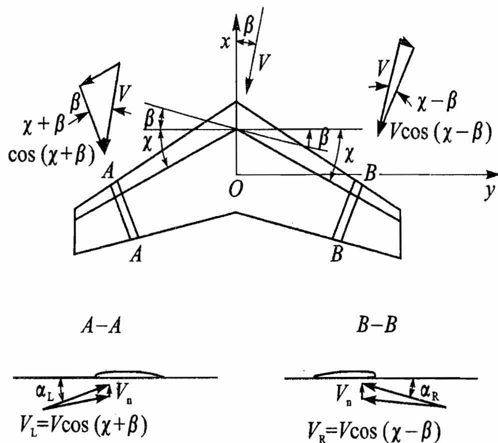


图 8.2　有侧滑时后掠翼的相对速度和局部迎角

由图 8.2 可见，任取对称的垂直于焦线的左右两个微元剖面 $A-A$ 和 $B-B$，其相应的局部速度和局部迎角，分别以下标 R 和 L 表示右半翼和左半翼，可写成

$$\left.\begin{aligned} V_R &= V\cos(\chi-\beta), \qquad \alpha_R = \arctan\frac{V_n}{V_R} \approx \frac{\alpha}{\cos(\chi-\beta)} \\ V_L &= V\cos(\chi+\beta), \qquad \alpha_L = \arctan\frac{V_n}{V_L} \approx \frac{\alpha}{\cos(\chi+\beta)} \end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

式中 $V_n = V\cos\beta\sin\alpha \approx V\alpha$，为垂直于翼平面的速度分量。

由此可知作用在左右两个对称微元剖面上的升力是不同的，当然阻力也不相同。以 $\Delta y'$ 表示微元剖面的宽度，c_y 为剖面的弦长，相应的剖面升力系数斜率为 $C_{L\alpha.y}$，则左右微元升力差值便可表示成

$$\begin{aligned} \Delta L_\chi &= C_{L\alpha.y}c_y\Delta y'(\alpha_R q_R - \alpha_L q_L) = C_{L\alpha.y}\alpha q c_y \Delta y' \cdot [\cos(\chi-\beta) - \cos(\chi+\beta)] = \\ &2C_{L\alpha.y}\alpha q c_y \Delta y' \cdot \sin\chi\sin\beta \end{aligned} \tag{8.4}$$

将垂直于焦线剖面的参数换成对称面方向剖面的参数，即 $C_{L\alpha} = C_{L\alpha.y}\cos\chi$，$c = c_y/\cos\chi$ 和 $\Delta y = \Delta y'\cos\chi$。代入上式后，得

$$\Delta L_\chi = 2C_{L\alpha}\alpha q \cdot ds \cdot \tan\chi\sin\beta \tag{8.5}$$

式中 $ds = c dy$。

升力差值所引起的绕 Ox_b 轴的滚转力矩，用系数表示可近似为

$$\Delta C_{l.\chi} = -\frac{\sum \Delta L_\chi \cdot y}{qSb} = -\frac{1}{2}C_L\bar{y}_{s.c}\beta \cdot \tan\chi \tag{8.6}$$

式中 $\bar{y}_{s.c} = \dfrac{y_{s.c}}{b/2}$。$y_{s.c}$ 近似为半机翼面心到对称面的距离，其值与机翼外形有关。初步估算时可取

$$\bar{y}_{s.c} = 0.4 \qquad (\eta = 1)$$
$$\bar{y}_{s.c} = 0.36 \qquad (\eta = 1)$$

由上式可见，正侧滑时产生负的滚转力矩，且显示出 C_L 和 χ 这两个主要影响的因素。$\chi=0$ 即表示机翼无后掠，理应 $\Delta C_{l.\chi}=0$；$C_L=0$ 时，即使侧滑改变了左右两半翼的局部速度，也只可能影响零升阻力，不会产生绕 Ox_b 轴滚转力矩，$\Delta C_{l.\chi}$ 也应等于零。在近似处理时，侧滑引起零升阻力一般也忽略不计。

单位侧滑角引起的滚转力矩系数可由式(8.6)对 β 求导得出，称为滚转力矩的侧滑导数，表示为

$$C_{l\beta.\chi} = -\frac{1}{2}C_L\bar{y}_{s.c}\tan\chi \tag{8.7}$$

后掠机翼侧滑引起左、右两翼阻力的差值，会产生绕 Oz_b 轴的偏航力矩，其相应的侧滑导数 $C_{n\beta.\chi}$ 大致与 $C_L^2\tan\chi$ 成正比，且为正值，与 $C_{l\beta.\chi}$ 相比很小；而侧力的侧滑导数 $C_{c\beta.\chi}$ 一般可以略去。

(3) 翼端作用

对于无后掠直边机翼，在一定迎角($C_L\neq0$)的情况下侧滑时，迎风一侧的侧缘起了“前缘”作用，整个机翼的自由涡顺气流方向偏斜，对机翼绕流的诱导作用，使机翼表面产生附加的压强分布，如图 8.4 所示。

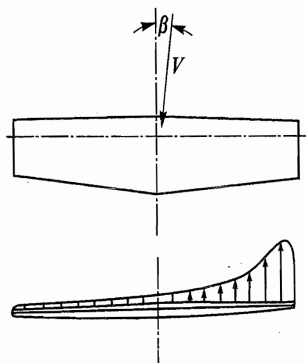


图 8.4　侧滑中直边机翼表示的附加压强分布

相对来流而言，迎风一侧半翼的升力和诱阻大于另一侧半翼的升力和诱阻，从而产生滚转力矩。在初步近似估算时，可从风洞吹风结果整理出经验公式，其相应的侧滑导数为

$$C_{l\beta.\chi=0}=-\frac{0.04}{(\eta+1)^3}\frac{C_L}{\lambda}\tag{8.12}$$

式中 λ 为机翼展弦比；η 为机翼根梢比。

对于后掠直边机翼，侧滑时其侧缘具有同样的“前缘”作用。若侧缘为曲线的机翼，翼端效应就大大减弱，可以不计。

综合上述各因素，由单独机翼产生的侧滑导数可归纳为

$$\left.\begin{aligned}C_{c\beta.\mathrm{w}}&=C_{c\beta.\psi}\\C_{l\beta.\mathrm{w}}&=C_{l\beta.\chi=0}+C_{l\beta.\chi}+C_{l\beta.\psi}\\C_{n\beta.\mathrm{w}}&=C_{n\beta.\chi}\end{aligned}\right\}\tag{8.13}$$

2. 机身部分

① 单独机身作用。近代飞行器的机身接近旋成体，因此单独机身因侧滑而引起的气动力和力矩与迎角引起的气动力和力矩处理方法完全一样，可从 $C_{L\alpha.\mathrm{b}}$和 $C_{m\alpha.\mathrm{b}}$换算出 $C_{c\beta.\mathrm{b}}$和 $C_{n\beta.\mathrm{b}}$，只要将参考长度 c 换成 b 即可。此时，只要飞行器质心位于机身纵轴，$C_{l\beta.\mathrm{b}}$就等于零。

一般来说，$C_{c\beta.\mathrm{b}}$为负值；$C_{n\beta.\mathrm{b}}$也为负值。

② 翼身干扰作用。实际情况下，机身总是和机翼组合在一起的，这样会出现气动干扰作用，引起附加气动力和力矩。这种干扰影响有时会比较显著，主要取决于机翼相对机身的位置，以及机身直径与翼展的比值。

图 8.5 为右侧滑情况，来流速度垂直于对称面的侧向分量 $V\sin\beta$；由于机身存在，当横向流经时，会导致机翼沿展向的局部迎角发生反对称的变化。对于上单翼(见图 8.5(a))的情况，右半翼 $\Delta\alpha_R>0$，左半翼 $\Delta\alpha_L<0$，从而产生附加的负滚转力矩；下单翼(见图 8.5(b))的情况刚好相反；对于中单翼基本上无干扰。

由此可得出，翼身干扰引起的滚转力矩的侧滑导数，上单翼时应 $\Delta C_{l\beta}<0$，下单翼时应 $\Delta C_{l\beta}>0$。但因机身占去一部分机翼面积，故翼身组合体的侧滑导数要比单独机翼的要小些，取决于机身直径与翼展比，如图 8.6 所示。



另一方面，翼身联结处，机翼的存在也影响机身表面局部压强分布，使机身侧力加大，作用点后移，以及机翼自由涡的侧洗作用，均会不同程度地产生干扰偏航力矩导数 $\Delta C_{n\beta}$。

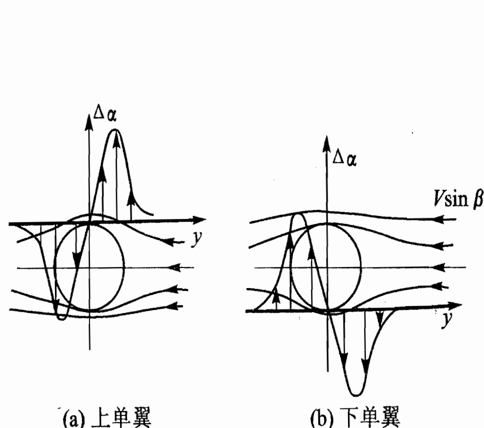


图 8.5 侧滑时翼身干扰引起的翼展向迎角变化

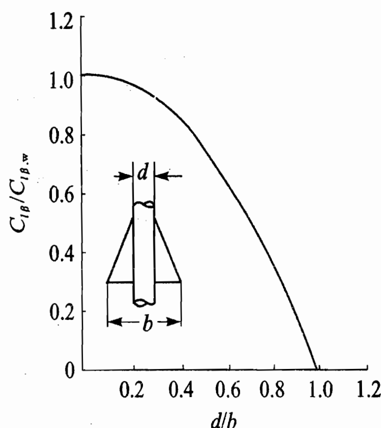


图 8.6 翼身组合体与单独机翼 $C_{l\beta}$ 的比较

综合上述各因素，由机身产生的侧滑导数可归纳为

$$\left.\begin{aligned} C_{c\beta.\mathrm{b}} &= C_{c\beta.\mathrm{b}} \\ C_{l\beta.\mathrm{b}} &= \Delta C_{l\beta} \\ C_{n\beta.\mathrm{b}} &= C_{n\beta.\mathrm{b}} + \Delta C_{n\beta} \end{aligned}\right\} \tag{8.14}$$

3. 垂直尾翼部分

与平尾类似，垂尾也位于后机身部位，所处的流场会受到翼身组合作用的影响。图 8.7 为右侧滑时垂尾处的流动状态。其平均流速的大小，这里近似认为与平尾处相同，故

$$V_{\mathrm{vt}} = \sqrt{k_q}V, \quad q_{\mathrm{vt}} = k_q q \tag{8.15}$$

式中 k_q 为速度阻滞系数；下标 vt 表示垂尾。

平均流速的方向受翼身组合体涡系影响，将有侧偏，用侧洗角 σ 表示。其值由侧洗速度 V_{sw} 与 V_{vt} 之比，即 $\sigma \approx V_{\mathrm{sw}}/V_{\mathrm{vt}}$ 近似确定，并规定 V_{sw} 沿 Oy 轴正方向时，σ 为正值。垂尾处的侧滑角为

$$\beta_{\mathrm{vt}} = \beta - \sigma \tag{8.16}$$

由图 8.7 可见，此时的 $\sigma<0$，故加大了垂尾处的侧滑角 $\beta_{\mathrm{vt}}>\beta$。同样认为 σ 随 β 线性变化，上式即可表示为

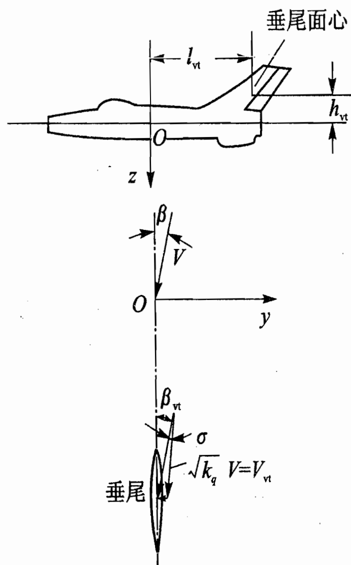


图 8.7 侧滑时垂尾处的绕流情况



$$\beta_{vt} = \left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\beta \tag{8.17}$$

右侧滑飞行时，作用在垂尾的横航向力矩可表示为

$$L_{vt} = C_{vt}h_{vt}, \qquad N_{vt} = -C_{vt}l_{vt}$$

其中 C_{vt}为作用在垂尾上的侧向力，可表示为

$$C_{vt} = k_q q S_{vt} C_{c.vt} = k_q q S_{vt} C_{c\beta.vt} \cdot \beta_{vt} \tag{8.18}$$

式中 h_{vt}，l_{vt}分别为垂尾面心沿 Ox_b轴和垂直其方向量得的飞行器质心距离；$C_{c\beta.vt}=(\partial C_c/\partial\beta)_{vt}$为顺气流方向的垂尾侧力系数斜率；$S_{vt}$为垂尾面积。

将上述横航向力矩除以 qSb，化成力矩系数形式为

$$C_{l.vt} = \frac{L_{vt}}{qSb} = k_q C_{c\beta.vt}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\beta \cdot \frac{S_{vt}h_{vt}}{Sb} \tag{8.19}$$

$$C_{n.vt} = \frac{N_{vt}}{qSb} = -k_q A_{vt} C_{c\beta.vt}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\beta \tag{8.20}$$

式中 $A_{vt}=S_{vt}l_{vt}/Sb$ 称为垂尾静面矩系数。上式对 β 求导，即得垂尾的相应侧滑导数

$$\left.\begin{aligned} C_{c\beta.vt} &= k_q\left(\frac{\partial C_c}{\partial\beta}\right)_{vt}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\cdot\frac{S_{vt}}{S} \\ C_{l\beta.vt} &= k_q\left(\frac{\partial C_c}{\partial\beta}\right)_{vt}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right)\cdot\frac{S_{vt}l_{vt}}{Sb} \\ C_{n\beta.vt} &= -k_q A_{vt}\left(\frac{\partial C_c}{\partial\beta}\right)_{vt}\left(1 - \frac{\partial\sigma}{\partial\beta}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8.21}$$

通常$(\partial C_c/\partial\beta)_{vt}<0$，故 $C_{c\beta.vt}<0$，$C_{l\beta.vt}<0$，$C_{n\beta.vt}>0$。

由此可得，侧滑引起的全机的侧滑导数为各部件的侧滑导数之和，写成

$$\left.\begin{aligned} C_{c\beta} &= C_{c\beta.w} + C_{c\beta.b} + C_{c\beta.vt} \\ C_{l\beta} &= C_{l\beta.w} + \Delta C_{l\beta} + C_{l\beta.vt} \\ C_{n\beta} &= C_{n\beta.w} + C_{n\beta.b} + C_{n\beta.vt} \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

表 8.1 给出了某机（三角翼，$\chi=60°$，$\psi=-2°$）的各主要部件侧滑导数值。

表 8.1　某机各主要部件的侧滑导数($\alpha=8°$，$Ma=0.6$)

导数/(°)$^{-1}$	全　机	机　翼		机　身	垂　尾	其　他
		上反角	后掠角			
$C_{c\beta}$	−0.010 89			−0.001 81	−0.009 5	0.000 42
$C_{l\beta}$	−0.002 34	0.000 149	−0.001 39		−0.001 39	0.0002 91
$C_{n\beta}$	0.003 85			−0.001 44	0.005 79	−0.000 5

8.1.2　横航向静稳定性

根据估算或试验得出的横航向力矩系数随侧滑角 β 的变化规律，在给定 Ma 和副翼、方向



舵偏角保持不变的条件下，绘成的曲线如图 8.8 所示。曲线对原点呈反对称。在小 β 范围内，大体呈线性变化。显见，坐标原点飞行器处于平衡状态，作对称定直飞行。下面将类似纵向情况，讨论平衡状态处的横航向静稳定性问题。

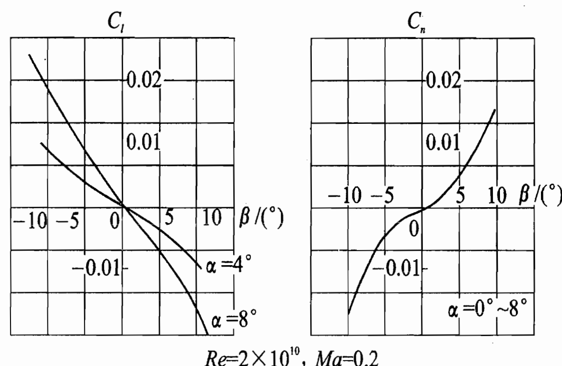


图 8.8　某机的 $C_l \sim \beta$, $C_n \sim \beta$ 实验曲线

1. 航向静稳定性

如图 8.9 中实线情况，飞行器在平衡状态下受到外界非对称瞬时干扰，产生小量的侧滑 $\Delta\beta>0$，则飞行器产生其值 $\Delta N=qSbC_{n\beta}\Delta\beta>0$ 的右偏航力矩，在驾驶员不加操纵条件下，干扰消失的瞬时，这个右偏航力矩有使机头向右偏，以减小 $\Delta\beta$ 的趋势，此时称飞行器在原平衡状态是具有航向静稳定性的。而图 8.9 中虚线情况，同样条件下，受扰动形成的侧滑角 $\Delta\beta>0$，飞行器则产生左偏航力矩 $\Delta N=qSbC_{n\beta}\Delta\beta<0$，在这一力矩作用下，飞行器的侧滑将有继续增大的趋势，此时的飞行器在原平衡状态下是航向静不稳定的。

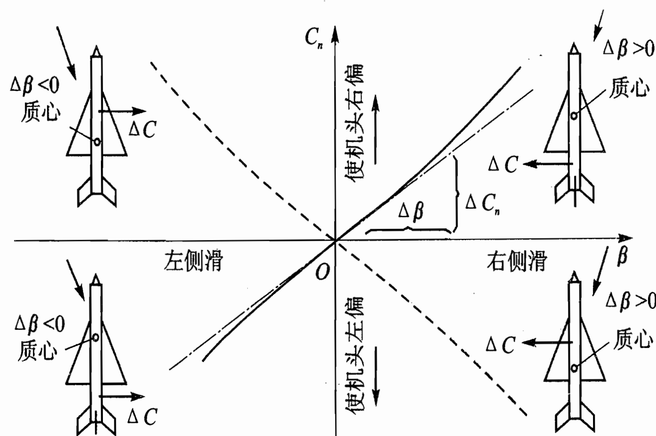


图 8.9　飞行器航向静稳定性概念

上述分析表明，飞行器是否具有航向静稳定性，与在平衡点处的力矩系数曲线斜率有关，故可用原点处偏航力矩系数导数 $C_{n\beta}$ 作为判据。$C_{n\beta}=0$ 为航向中立静稳定状态。另外，在全



机航向静稳定性导数 $C_{n\beta}$ 中，机身部分起静不稳定作用，$C_{n\beta.b}<0$，垂尾部分起主要的静稳定作用 $C_{n\beta.vt}>0$。但该作用由于 $(\partial C_c/\partial\beta)_{vt}$ 随 Ma 增加而减小，且受到翼身组合体遮蔽的影响，会使航向静稳定性减小，这对飞行器的横侧动态特性是不利的，在第 10 章会有所介绍。为此，超声速飞机往往采用增大垂尾面积来提供必需的航向静稳定性，甚至采用双垂尾布局，如苏—27、F—18 等。

具有航向静稳定性的飞行器，当出现侧滑角时，飞行器具有减小侧滑角的趋势，或者说具有使飞行器对称平面转向与飞行速度矢量方向一致的倾向，其作用犹如风标，并没有保持航向(χ)不变的倾向。故为了不易被人误解，有人又称为风标稳定性。

2. 横向静稳定性

同样考虑飞行器原处在平衡状态(见图 8.10)，受到外界非对称瞬时干扰时，使飞行器产生小量倾斜角，若 $\Delta\phi<0$，升力 L 和重力 W 的合力作用将使飞行器向左侧滑 $\Delta\beta<0$，机上将产生其值为 $\Delta L=qSbC_{l\beta}\Delta\beta>0$ 的右滚转力矩。不加操纵时，这一右滚力矩具有减小 $\Delta\phi$，使飞行器保持机翼水平的倾向。此时称飞行器在原平衡状态具有横向静稳定性，且可用平衡点处的滚转力矩系数导数 $C_{l\beta}$ 作为横向静稳定性判据。

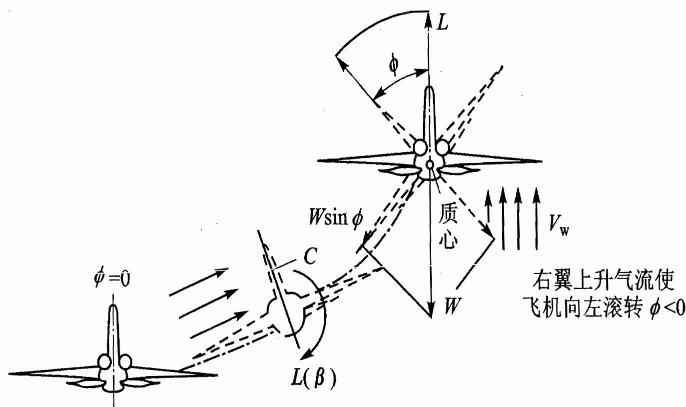


图 8.10 横向静稳定性概念

注意：斜倾角减小的进程，是通过侧滑角中介来反映其变化趋势的，是间接反应，而不是直接反应，与纵向、航向静稳定性概念不完全一样。因此说用横向静稳定性概念似乎不太贴切。为此，有人把 $C_{l\beta}<0$ 的特性称为“上反效应”，因为上反角的作用在 $C_{l\beta}$ 中起稳定作用。

在全机横向静稳定导数 $C_{l\beta}$ 中，机翼后掠角结合迎角的作用以及机翼上反角和垂尾部分的作用，均起静稳定的作用；下单翼与机身间的气动干扰则起静不稳定作用。因此，大后掠翼飞机在大迎角飞行时，横向静稳定性常嫌过大，对飞机横侧动态特性是不利的，往往采用下反角机翼气动布局以适当改善。而下单翼气动布局飞机则常需用较大的上反角来补充静稳定性的不足。



8.2 操纵力矩

横侧向操纵机构常见的有副翼、方向舵和推力矢量等。由副翼偏转引起的横向力矩称为滚转操纵力矩；方向舵偏转和喷管左右偏转引起的偏航力矩称为偏航操纵力矩。

8.2.1 滚转操纵力矩

常用的副翼是对称地安装在机翼外段后缘的两个活动操纵面，其外形基本上是所在剖面的一部分。驾驶员左右移动驾驶杆，可使左、右副翼反向等角度，即反对称偏转。向左压杆时，右副翼下偏，左副翼上偏；向右压杆时，情况相反。按规定右副翼下偏为正值，如图 8.11 所示。

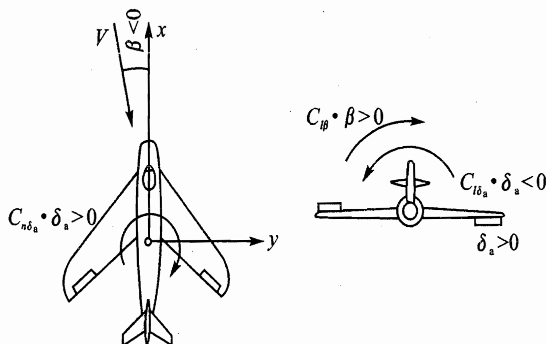


图 8.11　副翼偏转产生的横航向力矩

当副翼偏转($\delta_a>0$)时，会使机翼的展向环量分布发生变化，如图 8.12 所示。右翼升力将增加，左翼升力减小，因而产生左滚转力矩($L_a<0$)。副翼偏转 δ_a 时，其作用相当于副翼所在部分的机翼零升迎角改变了 $\eta_a\delta_a$。副翼所在处机翼剖面的升力系数增量为

$$\Delta C_L = C_{L\alpha}\eta_a\delta_a \tag{8.23}$$

式中 η_a 为副翼效率系数，表示副翼偏转 1°时，相当于有副翼那部分机翼迎角的改变量，可近似按下式计算，即

$$\eta_a = \sqrt{\frac{c_a}{c}}\cos\chi_a \qquad (Ma<Ma_c)$$

$$\eta_a = \frac{c_a}{c}\cos\chi_a \qquad (Ma>1)$$

c 和 c_a 分别为有副翼那部分机翼的平均几何弦长和副翼平均几何弦长。χ_a 为副翼后缘后掠角。

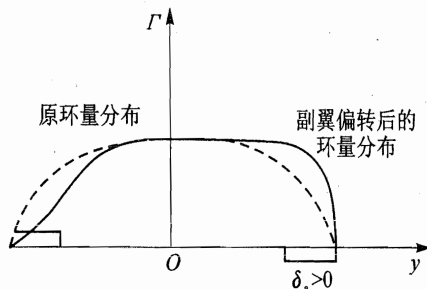


图 8.12　副翼偏转引起的机翼环量分布变化

产生的左滚转操纵力矩则为

$$L = -2\left(q\frac{S_a}{2}kC_{L\alpha}\eta_a\delta_a\right)\cdot y_a \tag{8.24}$$

除以 qSb,化成滚转力矩系数

$$C_l = -kC_{L\alpha}\eta_a\delta_a\cdot\frac{S_a y_a}{Sb}$$

上式再对 δ_a 求导,即得副翼操纵导数,也称副翼操纵效能

$$C_{l\delta_a} = -kC_{L\alpha}\eta_a\frac{S_a y_a}{Sb} \tag{8.25}$$

式中 k 为对 $C_{L\alpha}$ 的三元修正系数;y_a 为左、右副翼平均几何弦距对称面的距离;S_a 为带有副翼那部分机翼的面积。

副翼偏转($\delta_a>0$)产生滚转操纵力矩的同时,由于右翼阻力增加,左翼阻力减少,还会产生使机头向右偏转的偏航力矩 $N_{\delta_a}\cdot\delta_a>0$,形成左侧滑 $\beta<0$。横向静稳定力矩作用($L_\beta\cdot\beta>0$),将会降低副翼的操纵效果($L_{\delta_a}\cdot\delta_a<0$)。故该偏航力矩称为副翼的不利偏航力矩(见图 8.11)。

为消除这一不利作用,措施之一是采用差动副翼,使上偏副翼的偏角大于下偏副翼的偏角,用增加型阻去平衡增大的升致阻力,削弱不利偏航力矩甚至变成有利偏航。此时估算副翼操纵效能时,副翼偏角取其平均值,即

$$\delta_a = \frac{|\delta_{a.R}|+|\delta_{a.L}|}{2}$$

也可采用在机翼上表面安装扰流片的办法,随副翼上偏的一侧扰流片自动打开,增加阻力,达到与差动副翼同样的效果。

一般情况下,副翼偏转引起的偏航力矩远小于滚转力矩。副翼滚转操纵效能 $C_{l\delta_a}<0$;而副翼的偏航操纵作用 $C_{n\delta_a}>0$,有时接近零。

8.2.2 偏航操纵力矩

先介绍方向舵偏转产生的操纵力矩。方向舵是装在垂尾后缘的活动翼面,外形基本上是所在翼剖面的一部分。驾驶员蹬动脚蹬,可使方向舵左右偏转。左脚蹬前移时,方向舵偏向左翼,规定为正值;右脚蹬前移时,情况相反,见图 8.13。

方向舵左偏转时($\delta_r>0$),相当于垂尾处的有效侧滑角改变,以 $\Delta\beta_{vt}(\delta_r)$ 表示,写成

$$\Delta\beta_{vt}(\delta_r) = -\eta_r\delta_r \tag{8.26}$$

式中 η_r 为方向舵效率系数。它表示方向舵偏转 1°时相当于垂尾侧滑角改变的度数。可近似按下式计算,即

$$\eta_r = \sqrt{\frac{S_r}{S_{vt}}}\cos\chi_r \qquad (Ma<Ma_c)$$

$$\eta_r = \frac{S_r}{S_{vt}}\cos\chi_r \qquad (Ma<1)$$



式中 S_r 为方向舵面积；χ_r 为方向舵前缘后掠角。

由式(8.26)可知，正方向舵偏角，垂尾有效侧滑角改变量为负值，产生的侧向力为正值

$$C = k_q q S_{vt} C_{c.vt} = -k_q q S_{vt} \left(\frac{\partial C_c}{\partial \beta}\right)_{vt} \eta_r \delta_r$$

相应的横航向力矩为

$$L = C h_{vt}, \qquad N = -C l_{vt}$$

除以 qS 或 qSb，化成系数形式，并对 δ_r 求导后，即得方向舵操纵导数

$$\left.\begin{aligned} C_{c\delta_r} &= -k_q \left(\frac{\partial C_c}{\partial \beta}\right)_{vt} \eta_r \cdot \frac{S_{vt}}{S} \\ C_{l\delta_r} &= -k_q \left(\frac{\partial C_c}{\partial \beta}\right)_{vt} \eta_r \cdot \frac{S_{vt} h_{vt}}{Sb} \\ C_{n\delta_r} &= k_q \left(\frac{\partial C_c}{\partial \beta}\right)_{vt} \eta_r \cdot A_{vt} \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

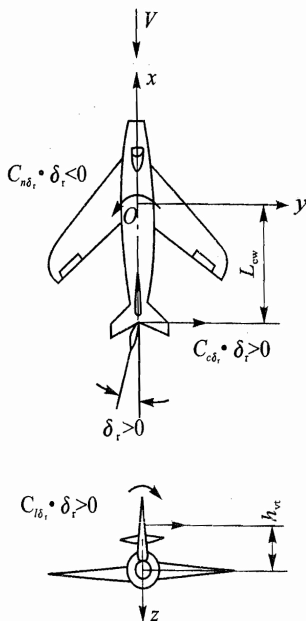


图 8.13 方向舵偏转产生的横航向力矩

一般情况下，$(\partial C_c/\partial \beta)_{vt} < 0$，故 $C_{c\delta_r} > 0$，$C_{l\delta_r} > 0$ 和 $C_{n\delta_r} < 0$，且 $|C_{l\delta_r}|/|C_{n\delta_r}| = h_{vt}/l_{vt}$。可见，方向舵操纵效能以产生偏航操纵力矩为主。

现代飞行器当在大迎角飞行时，方向舵操纵效能大大降低，目前常利用发动机喷管左右偏转，实现推力矢量控制，来补充飞行器航向操纵效能的不足。当喷管左偏转时，其偏角定义为正值($\delta_{T_z} > 0$)，推力矢量在垂直飞行器纵轴的侧向分量为 $T \sin \delta_{T_z}$，产生左偏航力矩；喷管右偏转 $\delta_{T_z} < 0$，则产生右偏航力矩。其操纵力矩可近似表为

$$\Delta N = -T \sin \delta_{T_z} \cdot l_T \approx -T \delta_{T_z} \cdot l_T \tag{8.28}$$

除以 qSb，化成力矩系数形式为

$$\Delta C_n = -A_{T_z} C_T \delta_{T_z}$$

式中 $A_{T_z} = S_T l_T / Sb$。其中 S_T 为喷管截面积。上式对 δ_{T_z} 求导，即得推力矢量操纵导数

$$C_{n\delta.z} = -A_{T_z} C_T \tag{8.29}$$

8.3 阻尼力矩和交感力矩

在飞行器横侧运动过程中，当出现绕 Ox_b 轴的滚转角速度 p 和绕 Oz_b 轴的偏航角速度 r 时，也会引起绕流不对称，产生左右不对称的气动力，即出现侧向力 C、滚转力矩 L 和偏航力矩 N。这些力矩的性质类似于存在俯仰角速度 q 引起的力和力矩。为此由滚转角速度 p 引起的横向力矩称为横向阻尼力矩，它将阻止飞行器滚转；由偏航角速度 r 引起的偏航力矩称为航向

阻尼力矩，阻止飞行器偏航转动。与此同时，由于横向和航向气动力交关作用，滚转会引起偏航力矩，偏航会引起滚转力矩，这些相关力矩称为交感力矩。

这些力矩同样可用无因次力矩系数表示对角速度 r 和 p 的导数，其中 C_{nr} 和 C_{lp} 分别称为偏航和滚转阻尼导数；C_{lr} 和 C_{np} 均称为交感导数。本节仅从物理上来说明这些力矩产生的原因以及导数的物理意义，详细估算可见有关空气动力学书籍。

8.3.1 滚转角速度 p 引起的横侧力矩

飞行器以速度 V 飞行时，如果同时绕 Ox_b 轴以角速度 p 滚转，则沿机翼、平尾和垂尾的展向都会出现线性变化的流速分布，其值与 p 和距 Ox_b 轴的垂直距离成正比（见图 8.14）。这一流速分布主要改变了局部气流的流动方向，对局部气流速度的大小影响甚微，可忽略不计。由于局部气流方向的改变，使飞行器各气动部件上的压强分布也发生变化，从而产生了气动侧力和横侧力矩。在 p 值不大的情况下，可用气动导数 $C_{cp}=\partial C_c/\partial \bar{p}$，$C_{lp}=\partial C_l/\partial \bar{p}$ 和 $C_{np}=\partial C_n/\partial \bar{p}$ 来表征。式中 $\bar{p}=pb/2V$ 为无因次滚转角速度。

1. 滚转阻尼力矩

从图 8.14 上可知，产生滚转阻尼力矩的部件有机翼、平尾和垂尾。其中机翼是主要的。

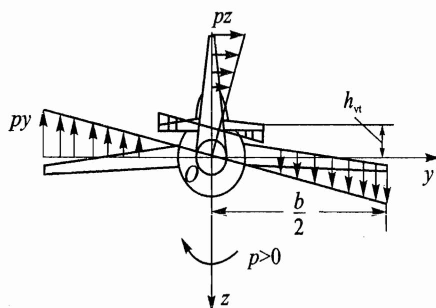


图 8.14 滚转角速度引起的飞机各点附加流速分布

飞行器以正角速度 p 滚转时，其机翼展向各剖面局部迎角出现线性的反对称变化，迎角变化量近似表示为

$$\Delta\alpha(y)=\frac{py}{V}$$

结果使右翼有效迎角增大，升力增加；左翼有效迎角减小，升力减少，从而构成负的滚转力矩，阻滞飞行滚转。其滚转阻尼导数为 $C_{lp}<0$。

同理，平尾和垂尾在飞行器滚转时也产生滚转阻尼力矩。表 8.2 列出某机滚转阻尼导数的计算结果，可以了解飞行器各部件在全机滚转阻尼力中的影响程度。

表 8.2 某机各部件的滚转阻尼系数

滚转阻尼导数	全 机	机 翼	垂 尾	其 他
C_{lp}	−0.426	−0.419	−0.004 8	−0.002 2

可以看出，该机的机翼阻尼导数占总阻尼导数的 97 %。高速飞行器由于采用小展弦比机翼布局，滚转阻尼力矩会显得不足，会影响飞行器横侧动态特性。



2. 偏航交感力矩

滚转引起的偏航交感力矩主要由机翼和垂尾引起。其机翼的作用是，当飞行器以正角速度 p 滚转时，随着左、右翼迎角的变化，也会引起阻力的变化。当机翼存在前缘吸力时，左右两半翼升、阻力在 Ox_b 方向投影不等，从而产生偏航力矩，如图 8.15 所示。$p>0$ 时，右半翼局部迎角加大，升力矢量前倾，在 Ox_by_b 平面内有向前的 x 分量 $L_R\sin\Delta\alpha_R$；左半翼局部迎角减小，升力矢量后仰，在 Ox_by_b 平面有向后的分量 $L_L\sin\Delta\alpha_L$，形成负的偏航力矩。同时，迎角增大的右半翼型阻也大，迎角减小的左半翼型阻也小，其在 Ox_by_b 平面内的分量形成正的偏航力矩。由于上述两项偏航力矩作用相反，所以机翼由于滚转产生的交感导数 $C_{np.w}$ 值可正、可负，视具体情况而定。但当前缘吸力不存在时(如超声速前缘或选用尖前缘剖面)，升力矢量就始终垂直翼面，这时左右两半翼升、阻力在 Ox_by_b 平面的分量，均形成正的偏航力矩，即 $C_{np.w}>0$。

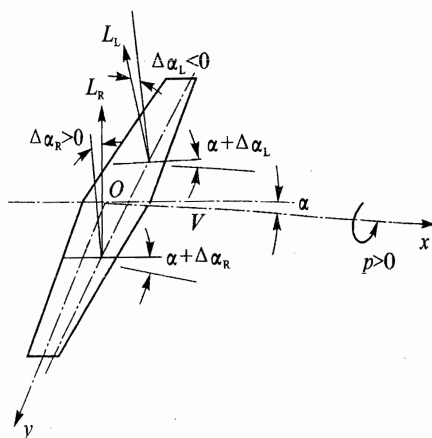


图 8.15 滚转角速度 p 引起的偏航力矩

由图 8.14 看出，$p>0$ 时，垂尾的附加速度向左，引起正的侧滑角 $\beta_{vt}=\dfrac{ph_{vt}}{\sqrt{k_q}V}$，产生的附加气动侧力绕 Oy_b 轴形成正的偏航力矩，即其交感导数 $C_{np.vt}>0$。超声速飞行器由于采用大垂尾，甚至双垂尾，对全机的 C_{np} 影响相对增大。同样将某机的 C_{np} 计算结果列于表 8.3 内。

表 8.3 某机各部件偏航交感导数

交感导数	全 机	机 翼	垂 尾	其 他
C_{np}	0.001 8	−0.023	0.024	0.000 8

8.3.2 偏航角速度 r 引起的横侧力矩

当飞行器以迎角 α、速度 V 飞行时，如同时绕 Oz_b 轴以角速度 r 转动，则机翼、机身、平尾和垂尾上都会出现线性变化的相对流速分布，其值与 r 和距 Oz_b 轴的垂直距离成正比，如图 8.16 所示。

这一附加流速，改变了各气动部件的流态，从而影响其压强分布，产生气动侧力和横侧力矩。在 r 值不大的情况下，可用气动导数 $C_{cr}=\partial C_c/\partial\bar{r}$，$C_{lr}=\partial C_l/\partial\bar{r}$ 和 $C_{nr}=\partial C_n/\partial\bar{r}$ 来表征。其中 $\bar{r}=rb/2V$ 为无因次偏航角速度。

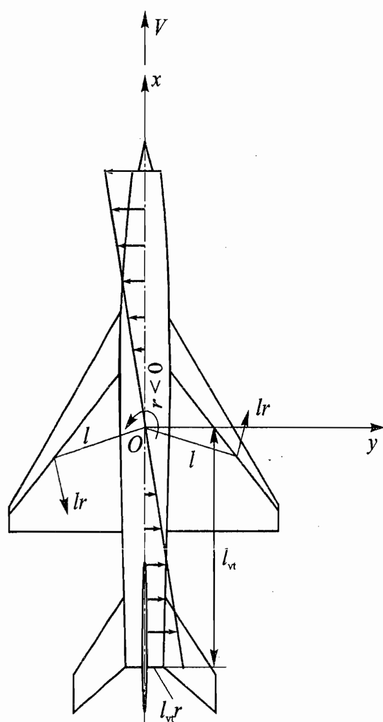


图 8.16　偏航角速度引起的飞机各点附加流速分布

1. 偏航阻尼力矩

通常垂尾是产生偏航阻尼力矩的主要部件。机翼作用所占比重比垂尾的要小得多，但在大迎角时不能忽略。机身和平尾部分的作用一般可以忽略。

r 的存在，使左、右两半翼气流速度改变。离 Oz_b 轴垂直距离 l 处的速度改变量为 $\Delta V=rl$。右偏航转动时 $r<0$，右半翼气流速度增加，左半翼气流速度减少，使右半翼阻力大于左半翼阻力，而产生正的偏航力矩，阻止飞行器绕 Oz_b 轴转动。其偏航阻尼导数 $C_{nr.\text{w}}<0$。

而垂尾处出现向右的侧向相对气流，形成正的侧滑角 $\Delta\beta_{\text{vt}}$，其平均值可表示为

$$\Delta\beta_{\text{vt}}=-\frac{rl_{\text{vt}}}{\sqrt{k_q}V}$$

从而产生向左的侧向力和相应的正偏航力矩，同样阻尼飞行器绕 Oz_b 转动，其偏航阻尼导数 $C_{nr.\text{vt}}<0$。飞行器总的偏航阻尼导数应是这两部分之和。表 8.4 中列出了同一飞机的偏航阻尼导数的计算结果。

表 8.4　某机各部件的偏航阻尼导数

偏航阻尼导数	全　机	机　翼	垂　尾	其　他
C_{nr}	−0.146	−0.002	−0.143	−0.001

2. 滚转交感力矩

偏航引起的滚转交感力矩，主要也是由机翼和垂尾引起的。当飞行器以负的角速度 r 旋转时，随着左、右两半翼气流速度的变化，也会引起其升力变化。右半翼升力将大于左半翼的升力，而形成负的滚转力矩，其值显然与升力系数 C_L 有关。当 $C_L=0$ 时，两半翼流速即使不等，也不致引起滚转力矩。此时，机翼的滚转交感力矩导数 $C_{lr.\text{w}}>0$。

同时，垂尾处形成的侧滑角，产生负的侧向力，形成绕 Ox_b 的左滚转力矩，因此垂尾的滚转交感力矩导数 $C_{lr.\text{vt}}>0$，与机翼的作用是一致的。

全机的 C_{lr} 应是以上两部分之和。表 8.5 中列出了某机的滚转交感力矩导数的计算结果。



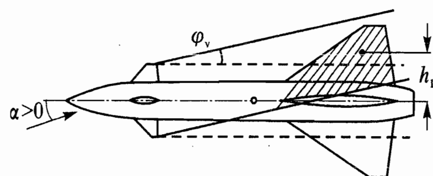
表 8.5　某机各部件的滚转交感力矩导数

滚转交感导数	全　机	机　翼	垂　尾	其　他
C_{lr}	0.065	0.039	0.024	0.002

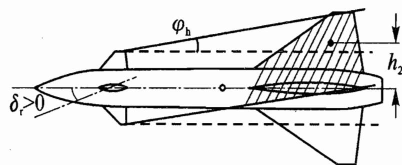
8.4　斜吹力矩

对于轴对称鸭式布局飞行器，若在飞行过程中存在迎角和侧滑角，同时操纵鸭式方向舵面或/和鸭式升降舵面，则会造成翼面上洗流不对称，从而构成绕 Ox_b 轴的滚转力矩。该力矩称为斜吹力矩。下面仅简要介绍产生斜吹力矩的机理。

先讨论迎角 $\alpha\neq0$ 和方向鸭式舵面偏角 $\delta_r\neq0$ 的情况。此时假设 $\beta=0,\delta_e=0$。当正偏转鸭式方向舵 $\delta_r>0$ 时，垂直翼面上的流速方向受到舵面偏转引起的侧洗流影响，形成附加侧滑角 $\Delta\beta_w<0$，产生侧力 $\Delta C>0$。此时，如迎角 $\alpha=0$，垂直翼面上的侧洗区上下对称，故不会形成绕 Ox_b 的滚转力矩。如迎角 $\alpha>0$，将会造成垂翼面上侧洗区不对称(如图 8.17(a)的阴影区)，气流方向向上偏斜，其偏斜角 φ_v 通常应小于迎角 α，侧力作用点上移，形成绕 Ox_b 的右滚转力矩 $\Delta C_l>0$。



(a) 垂直翼面上的侧洗区不对称



(b) 水平翼面上的下洗区不对称

图 8.17　轴对称飞行器斜吹力矩形成机理($\alpha\neq0,\delta_r\neq0$)

正迎角下，鸭式升降舵面引起的下洗将影响水平翼面，形成附加 $\Delta\alpha_w<0$，产生升力 $\Delta C_L<0$。此时，当鸭式方向舵面 $\delta_r=0$ 时，水平翼面上的下洗区左右对称，故不会产生绕 Ox_b 轴的滚转力矩。若 $\delta_r>0$，将会使气流方向向右偏斜，其偏斜角 $\varphi_h<\delta_r$，造成水平翼面上的下洗区不对称(如图 8.17(b)中的阴影区)，升力作用点右移，也会产生绕 Ox_b 的右滚转力矩 $\Delta C_l>0$。

再讨论侧滑 $\beta\neq0$ 和鸭式升降舵面偏角 $\delta_e\neq0$ 的情况。当 $\delta_e>0$ 时，水平翼面上的下洗区由于存在 $\beta>0$，使下洗区向左偏斜，从而形成左滚转力矩 $\Delta C_l<0$；而侧滑角 $\beta>0$ 时，垂直翼面上的侧洗区同样由于鸭式升降舵面偏转 δ_e，会使侧洗区向下偏斜，也会形成左滚转力矩 $\Delta C_l<0$。

由此可见，不同的迎角、侧滑角、鸭式方向舵偏角和鸭式升降舵偏角的组合，可能会产生很大的斜吹力矩。根据经验，其估算公式可近似表示为

$$C_{l,w}=k(\alpha\delta_r-\beta\delta_e) \tag{8.30}$$

式中系数 k 是 Ma 和飞行器外形的函数。显然，这种洗流不对称同样会引起俯仰和偏航力矩，但其值较小。



8.5 非对称定常飞行时飞行器的平衡

对称定常飞行是飞行器的基本飞行状态，在第 7 章已详细介绍。非对称定常飞行中，有两种飞行状态是需要研究的，即定常侧滑和定常盘旋运动的平衡和静操纵特性，这对于保证飞行器机动灵活、安全地飞行是非常重要的，为此飞行器设计必须给予考虑。

8.5.1 定常直线侧滑飞行时的平衡和静操纵

飞行器作侧滑飞行时，会引起阻力的增大，所以正常情况下总希望飞行器保持对称飞行。但在某些情况下，如飞机的侧风着陆、不对称动力飞行时，往往要求侧滑飞行。本节将首先根据飞行器作定直飞行时的横侧平衡方程，确定需要的横侧操纵面平衡偏角；然后简单介绍设计规范中有关定直侧滑飞行的静操纵性指标；最后介绍定直侧滑飞行中的实例：侧风着陆和不对称动力的平衡和操纵情况。

1. 定常直线侧滑飞行的横侧平衡

图 8.18 为某机作定直侧滑飞行示意图。从图上可见，作用在飞机上的侧向力 C，通过倾斜飞机，利用重力在 Oy 方向上的分量 $W\sin\phi$ 来平衡。侧滑引起的横航向力矩，可用偏转副翼和方向舵所产生的操纵力矩来平衡。于是飞行器横侧平衡可表示为

$$\left.\begin{aligned} &C_\beta\beta + C_{\delta_r}\delta_r + W\sin\phi = 0 \\ &C_\beta\beta + L_{\delta_a}\delta_a + L_{\delta_r}\delta_r = 0 \\ &N_\beta\beta + N_{\delta_a}\delta_a + N_{\delta_r}\delta_r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

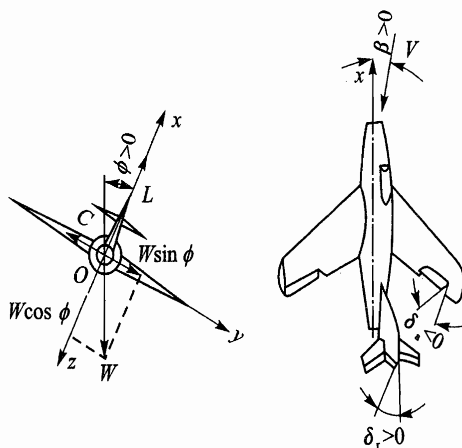


图 8.18 定常直线侧滑飞行时作用在飞机上的力



考虑到副翼偏转产生的偏航力矩 $N_{\delta_a}\delta_a$ 较小，可略去不计，且 $W\sin\phi \approx L\sin\phi$。上述平衡方程简化后，并用系数形式表示，则为

$$\left.\begin{aligned} &C_{c\beta}\beta + C_{c\delta_r}\delta_r + C_L\phi = 0 \\ &C_{l\beta}\beta + C_{l\delta_a}\delta_a + C_{l\delta_r}\delta_r = 0 \\ &C_{n\beta}\beta + C_{n\delta_r}\delta_r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.32}$$

在各气动导数为已知的情况下，上式包含四个未知数 β,ϕ,δ_a 和 δ_r。若给定侧滑角 β，则可求得

$$\left.\begin{aligned} &\delta_a = -\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta_a}}\left(1-\frac{C_{l\delta_r}C_{n\beta}}{C_{l\beta}C_{n\delta_r}}\right)\beta \\ &\delta_r = -\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}}\cdot\beta \\ &\phi = -\frac{C_{c\beta}}{C_L}\left(1-\frac{C_{c\delta_r}C_{n\beta}}{C_{c\beta}C_{n\delta_r}}\right)\beta \end{aligned}\right\} \tag{8.33}$$

可见定直侧滑飞行中所需副翼和方向舵平衡偏角，以及飞行器滚转角 ϕ 都与 β 成正比。将上式绘成曲线 $\delta_a=f(\beta)$，$\delta_r=f(\beta)$，谓之横侧操纵面偏角平衡曲线。为实现定常侧滑飞行，飞行品质规范中规定：蹬右方向舵应产生左侧滑；压左副翼杆应产生左侧滑；左滚转增加随之左侧滑增加等。这些要求可用静操纵性指标 $\frac{\partial\delta_a}{\partial\beta}<0$，$\frac{\partial\delta_r}{\partial\beta}>0$ 和 $\frac{\partial\phi}{\partial\beta}>0$ 来表示。其具体表达式可由式(8.33)对 β 求导得出，即

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\delta_a}{\partial\beta} = -\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta_a}}\left(1-\frac{C_{l\delta_r}C_{n\beta}}{C_{l\beta}C_{n\delta_r}}\right) \\ &\frac{\partial\delta_r}{\partial\beta} = -\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}} \\ &\frac{\partial\phi}{\partial\beta} = -\frac{C_{c\beta}}{C_L}\left(1-\frac{C_{c\delta_r}C_{n\beta}}{C_{c\beta}C_{n\delta_r}}\right) \end{aligned}\right\} \tag{8.34}$$

由于 $C_{l\delta_a}<0$，$C_{n\delta_r}<0$，所以为满足 $\frac{\partial\delta_a}{\partial\beta}<0$ 和 $\frac{\partial\delta_r}{\partial\beta}>0$ 要求，必须满足

$$\left.\begin{aligned} &C_{l\beta} - \frac{C_{l\delta_r}C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}} < 0 \\ &C_{n\beta} > 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.35}$$

由此可见，根据静操纵性指标要求，飞行器应具有航向静稳定性，且横向静稳定性还要满足 $C_{l\beta}<\frac{C_{l\delta_r}C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}}$ 的条件，即具有足够的上反效应。这便是横航向静稳定性与静操纵性之间的内在联系。$\frac{\partial\phi}{\partial\beta}>0$ 反映对侧力特性要求，一般在飞行实践中常能满足。



为了试飞测试方便，定直侧滑横侧向静操纵指标采用$\dfrac{\partial\delta_a}{\partial\phi}<0$和$\dfrac{\partial\delta_r}{\partial\phi}>0$来衡量。这些指标可以通过式(8.33)导出$\delta_a$，$\delta_r$与$\phi$的关系，再对$\phi$求导得出，即

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\delta_a}{\partial\phi}&=\frac{C_L}{C_{l\delta_a}}\frac{C_{l\beta}-C_{l\delta_r}C_{n\beta}/C_{n\delta_r}}{C_{c\beta}-C_{c\delta_r}C_{n\beta}/C_{n\delta_r}}\\ \frac{\partial\delta_r}{\partial\phi}&=\frac{C_L}{C_{n\delta_r}}\frac{C_{n\beta}}{C_{c\beta}-C_{c\delta_r}C_{n\beta}/C_{n\delta_r}}\end{aligned}\right\}\tag{8.36}$$

2. 侧风着陆

飞机着陆时如遇相对跑通侧风，为使机头对准跑道，往往需要飞机带侧滑和倾斜的飞行（见图8.19(a)）。以垂直跑道的右侧风为例，如风速为V_w，飞机对地速度V，则侧滑角β应为

$$\beta\approx\arctan\frac{V_w}{V}\tag{8.37}$$

通常着陆时地速较小，因此对应一定的风速，β可能较大。由定直侧滑平衡关系式(8.33)可见，相应的副翼和方向舵偏角也较大。但从飞机结构和气动方面考虑，副翼和方向舵偏角都受到一定限制。例如副翼偏角不超过$\pm20°$，方向舵偏角则在$\pm25°\sim\pm30°$之间。如果横航向操纵效能较低，则在侧滑着陆时要求的副翼和方向舵平衡舵偏角可能超过允许偏角，或缺少必要的供机动用的操纵余量，这样就会限制飞机采用定直侧滑着陆。为此飞行品质规范中对侧风着陆有具体规定，在垂直侧风风速V_w不大于10 m/s时，横航向操纵效能保证用侧滑修正侧风进行着陆。

例：设某机着陆时$V=75$ m/s，垂直右侧侧风风速$V_w=10$ m/s。已知进场构形的气动参数及导数为

$$C_{c\beta}=-0.2,\quad C_{l\beta}=-0.07,\quad C_{n\beta}=0.12,\quad C_L=0.9$$
$$C_{l\delta_a}=-0.08,\quad C_{c\delta_r}=-0.12,\quad C_{l\delta_r}=0.017,\quad C_{n\delta_r}=-0.086$$

按式(8.37)算出

$$\beta=\arctan\frac{V_w}{V}=7.6°$$

将此值代入式(8.33)得

$$\delta_a=-4.4°,\quad \delta_r=10.6°,\quad \phi=0.27°$$

表明横侧操纵效能符合规范要求。

3. 不对称动力飞行

不对称动力飞行是指多发动机飞机一侧发动机发生故障，造成推力左右不对称飞行。设计规范要求飞机应能作定常直线飞行。下面将以双发飞机为例，讨论右侧发动机发生故障后，为保持定直飞行时的横侧平衡和静操纵问题。

如图8.19(b)所示，此时认为左侧发动机发出标准额定推力T，根据定直飞行条件，应$T\approx D$，则不对称推力引起的偏航力矩为$\Delta N_T=Ty_T$，化成系数形式为



$$C_{n.T}=\frac{\Delta N_T}{qSb}=\frac{Ty_T}{qSb}\approx\frac{1}{2}C_D\bar{y}_T \quad (8.38)$$

式中 $\bar{y}_T=\frac{2y_T}{b}$；y_T为左侧发动机推力矩对称面的距离。

不对称动力下的飞机横侧平衡方程组可直接在式(8.32)中加进 $C_{n.T}$，即可得出

$$\left.\begin{aligned}C_{c\beta}+C_{c\delta_r}\delta_r+C_L\phi=0\\C_{l\beta}\beta+C_{l\delta_a}\delta_a+C_{l\delta_r}\delta_r=0\\C_{n\beta}\beta+C_{n\delta_r}\delta_r+C_{n.T}=0\end{aligned}\right\}\quad(8.39)$$

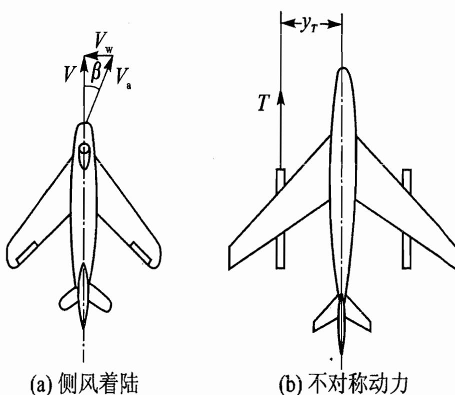


图 8.19 飞机定直侧滑飞行状态实例

从上式可求得

$$\left.\begin{aligned}\delta_a&=\frac{C_{l\delta_r}}{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}C_{n.T}-\left(\frac{C_{l\beta}}{C_{l\delta_a}}-\frac{C_{l\delta_r}C_{n\beta}}{C_{l\delta_a}C_{n\delta_r}}\right)\beta\\\delta_r&=-\frac{C_{n.T}}{C_{n\delta_r}}-\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}}\beta\\\phi&=\frac{C_{L\delta_r}}{C_LC_{n\delta_r}}C_{n.T}-\frac{1}{C_L}\left(C_{c\beta}-C_{c\delta_r}\frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_a}}\right)\beta\end{aligned}\right\}\quad(8.40)$$

式(8.40)与式(8.33)相比，不同之处在于 δ_a，δ_r 和 ϕ 中都出现与 $C_{n.T}$有关的常数项。因此该情况下的横侧平衡和静操纵与侧风着陆时有所不同。对于侧风着陆，飞行速度和侧风风速一定，β就一定，δ_a，δ_r 和 ϕ 也由式(8.33)惟一地确定。一般来说有 β就有ϕ，且左侧滑对应左倾斜，右侧滑对应右倾斜。而不对称动力的情况，给定 $C_{n.T}$后，式(8.40)中有四个变量 δ_a，δ_r，ϕ 和 β，因此就有无穷多组解。任意给定一个变量，便能确定其余三个变量。于是，由于 $C_{n.T}$存在，就有可能使飞机有侧滑而无倾斜，即机翼水平带侧滑飞行；也可以无侧滑带倾斜飞行。

例：设某飞机以 $C_L=0.8$，$C_D=0.08$ 作右发停车不对称动力飞行。已知 $\bar{y}_T=0.2$，其余的气动导数分别为

$$C_{l\beta}=-0.086,\quad C_{l\delta_a}=-0.08,\quad C_{l\delta_r}=0.057$$
$$C_{n\beta}=0.17,\quad C_{n\delta_r}=-0.083$$
$$C_{c\beta}=-0.68,\quad C_{c\delta_r}=0.11$$

由式(8.40)可求得

$$\left.\begin{aligned}\delta_a&=3.94^\circ+0.38\beta\\\delta_r&=5.52^\circ+2.05\beta\\\phi&=-0.76^\circ+0.57\beta\end{aligned}\right\}$$

将上述结果画成图 8.20 的曲线形式可以看出，如朝着工作着的发动机一侧侧滑(本例为左侧滑)，方向舵偏角会小一些；而朝停车一侧侧滑，则方向舵偏角会迅速增大。对多发动机飞



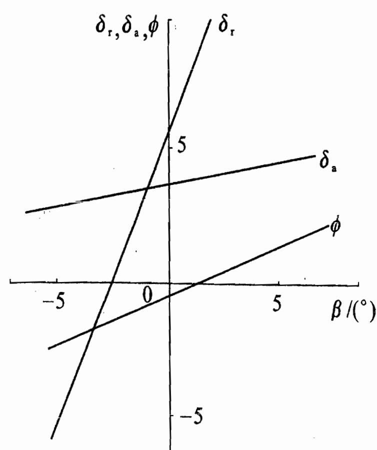


图 8.20　不对称动力算例附图

机，速度较低时的严重不对称动力情况，常成为检验方向舵操纵效能的一种设计情况。

4. 蹬舵反倾斜现象

有的飞行品质规范中规定应能单独利用方向舵操纵使飞机按应有的方向改变其倾斜姿态，蹬左舵（$\delta_r>0$），飞机向左滚转；蹬右舵（$\delta_r<0$），飞机向右滚转。如果蹬舵后的效果与应有的滚转方向相反，便出现所谓"蹬舵反倾斜"现象。下面简单地说明产生这一现象的原因。

设驾驶员蹬左舵（$\delta_r>0$），方向舵偏转，同时会产生右滚和左偏航操纵力矩（$L_{\delta_r}\delta_r>0, N_{\delta_r}\delta_r<0$），使飞机出现右侧滑（$\beta>0$），如飞机具有横向静稳定性，则产生左滚的横向静稳定力矩（$L_\beta\beta<0$）。当左滚静稳定力矩超过右滚操纵力矩（$|L_\beta\beta|>|L_{\delta_r}\delta_r|$）时，飞机便会向左滚转，这符合规范要求。若左滚静稳定力矩值不足以克服右滚操纵力矩，或当失去横向静稳定性，如某些后掠翼飞机在跨声速段飞行，则左偏航和右侧滑的综合效果产生了右滚力矩，蹬左舵出现了右滚转，即出现蹬舵反倾斜现象。

8.5.2　正常盘旋飞行时的平衡和静操纵

正常盘旋和定常拉升运动一样，常用来衡量飞行器的机动飞行能力。当飞行器在给定高度速度 V 和过载 n_n 作正常盘旋时，将出现绕体轴的定常角速度分量，从而引起附加的气动力矩。为实现平衡，就需要相应地偏转各个操纵面。

1. 正常盘旋时的角速度

当飞机以角速度 Ω 绕空间垂直轴作右正常盘旋时，其角速度矢量垂直向下，如图 8.21 所示。

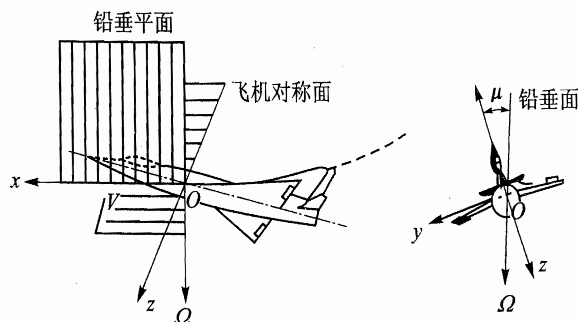


图 8.21　右正常盘旋

在机体轴上的角速度分量为



$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \boldsymbol{L}_{bg} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta\sin\phi \\ \cos\theta\cos\phi \end{bmatrix} \Omega \tag{8.41}$$

利用第3章中正常盘旋关系式

$$\cos\mu = \frac{1}{n_n}, \qquad \sin\mu = \frac{\sqrt{n_n^2 - 1}}{n_n}$$

$$\Omega = g\sqrt{n_n^2 - 1}/V$$

假设 θ 为小量，可认为 $\cos\theta \approx 1$，$\sin\theta = \theta$ 以及 $\phi \approx \mu$。代入上式后，即得

$$\left.\begin{aligned} \bar{p} &= \frac{pb}{2V} = -\frac{gb\sqrt{n_n^2 - 1}}{2V^2}\theta \\ \bar{q} &= \frac{qc}{V} = \frac{gc(n_n^2 - 1)}{V^2 n_n} \\ \bar{r} &= \frac{rb}{2V} = \frac{gb\sqrt{n_n^2 - 1}}{2V^2 n_n} \end{aligned}\right\} \tag{8.42}$$

2. 平衡所需舵偏角

正常盘旋时，除了要平衡角速度引起的气动力矩之外，还需平衡相对定直平飞增加的 $\Delta n_n = (n_n - 1)C_w$ 所产生的气动力矩。于是用系数表示的附加力矩表示式为

$$\left.\begin{aligned} \Delta C_l &= C_{lp}\bar{p} + C_{lr}\bar{r} \\ \Delta C_m &= C_{mq}\bar{q} + C_{m\alpha}(n_n - 1)C_w/C_{L\alpha} \\ \Delta C_n &= C_{np}\bar{p} + C_{nr}\bar{r} \end{aligned}\right\} \tag{8.43}$$

上述附加气动力矩需由相应的舵面偏角所产生的操纵力矩加以平衡。于是有

$$\left.\begin{aligned} &\Delta C_l + C_{l\delta_a} \cdot \Delta\delta_a + C_{l\delta_r} \cdot \Delta\delta_r = 0 \\ &\Delta C_m + C_{m\delta_e}\Delta\delta_e = 0 \\ &\Delta C_n + C_{n\delta_a} \cdot \Delta\delta_a + C_{n\delta_r} \cdot \Delta\delta_r = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.44}$$

将式(8.43)代入式(8.44)，并略去 $C_{n\delta_a}$ 和 $C_{l\delta_r}$ 项后，可解得近似式

$$\left.\begin{aligned} \Delta\delta_a &= \frac{gb\sqrt{n_n^2 - 1}}{2V^2 C_{l\delta_a}}(C_{lp}\theta - C_{lr}/n_n) \\ \Delta\delta_e &= -\frac{(n_n - 1)C_w}{C_{m\delta_e}}\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L} + \frac{C_{mq}}{\mu_1}\frac{n_n + 1}{n_n}\right) \\ \Delta\delta_r &= \frac{gb\sqrt{n_n^2 - 1}}{2V^2 C_{n\delta_r}}(C_{np}\theta - C_{nr}/n_n) \end{aligned}\right\} \tag{8.45}$$

现在再来判断实现右正常盘旋所需舵面偏角的方向。由于 $C_{l\delta_a}$，C_{lp} 一般为负值，C_{lr} 为正值，则要求 $\Delta\delta_a > 0$；而 $C_{n\delta_r}$，C_{nr} 一般也为负值，C_{np} 为正值，则要求 $\Delta\delta_r < 0$。也就是说右正常盘

旋时，要求驾驶员左压杆（右副翼向下）和蹬右舵（方向舵偏向右翼）。对于升降舵要求，一般 $\partial C_m/\partial C_L$，$C_{m\delta_e}$，$C_{mq}$ 均为负值，故 $\Delta\delta_e<0$，即要求驾驶员拉杆。

当飞机改作左盘旋时，Ω 和 ϕ 都反号，由式(8.41)可见，p 和 r 将反号，平衡所需副翼和方向舵偏角随之变号为 $\Delta\delta_a<0$，$\Delta\delta_r>0$；而 q 不变，且 $\Delta n_n>0$，故对升降舵要求是相同的，仍是 $\Delta\delta_a<0$。

需要指出的是，保持上述正常盘旋和进入正常盘旋所要求的副翼偏转方向是不相同的。要使飞机进入右盘旋时，驾驶员应“杆舵”一致地右压杆、蹬右舵，同时适当地拉杆，以产生所需的 Ω。当飞机接近预定的滚转角 ϕ 时，驾驶员应适时地向左回杆，改成左压杆，以维持右正常盘旋的平衡。

8.5.3 稳定滚转时的平衡和静操纵

稳定滚转常用来衡量副翼的滚转操纵效率。当副翼突然偏转某一角度时，飞机将从零滚转速率开始加速滚转，如不考虑副翼偏转引起的侧滑和偏航运动，飞机将继续不停地加速滚转，直到因 p 产生的滚转阻尼力矩与副翼操纵力矩相平衡，飞机才以 p 等速稳定滚转。由此可见，稳定滚转实质上是限定 β 和 r 为零时的仅考虑滚转自由度的定常运动，是一种假想的机动动作。尽管如此，这种运动与副翼操纵的短时间内反应，还是接近的。

根据稳定滚转的含义，可以写出滚转力矩的平衡方程，其系数形式为

$$C_{lp}\bar{p}+C_{l\delta_a}\cdot\delta_a=0 \tag{8.46}$$

由此得

$$\bar{p}=-\frac{C_{l\delta}}{C_{lp}}\delta_a \tag{8.47}$$

可见，在给定飞行条件下，一定的副翼偏转对应一定的滚转角速度。显然副翼操纵的本质不同于升降舵和方向舵的操纵。对后两者来说，它们属于“角位移”操纵，即在给定飞行条件下，一定的升降舵和方向舵偏角对应一定的迎角和侧滑角。因而对于前者副翼操纵来说，应属于“角速度”操纵。从式(8.47)中还能体现出副翼的操纵效率。

飞机实际的稳定滚转角速度，还与飞行速度 V 有关，即 $p=\frac{2V}{b}\bar{p}$。所在以低速，特别在近地飞行时，驾驶员比较关心 $\bar{p}$ 值，其值过小会给滚转操纵带来困难。有的飞行品质规范要求在(1.2～1.4) $V_{\min}$情况下，副翼操纵效能应保证 $\bar{p}$ 不小于0.055，对应杆力不小于98 N。

在高速大动压飞行时，压缩性和结构弹性变形会使副翼操纵效率下降。如继续保持 p 不小于0.055，对副翼操纵效能就显得要求太高。针对这一情况，飞行品质规范中又规定速度在(0.9～1.0) $V_{\max}$时，副翼操纵效能应能产生的实际滚转角速度 $p>1.5$ rad/s，对应杆力不超过98 N。

上述指标对低速大展弦比飞机比较合适，因为这类飞机对副翼操纵反应比较接近单自由度的。对高速飞机来说，副翼操纵反应与单自由度滚转反应有差别。因此，近期的飞行品质规

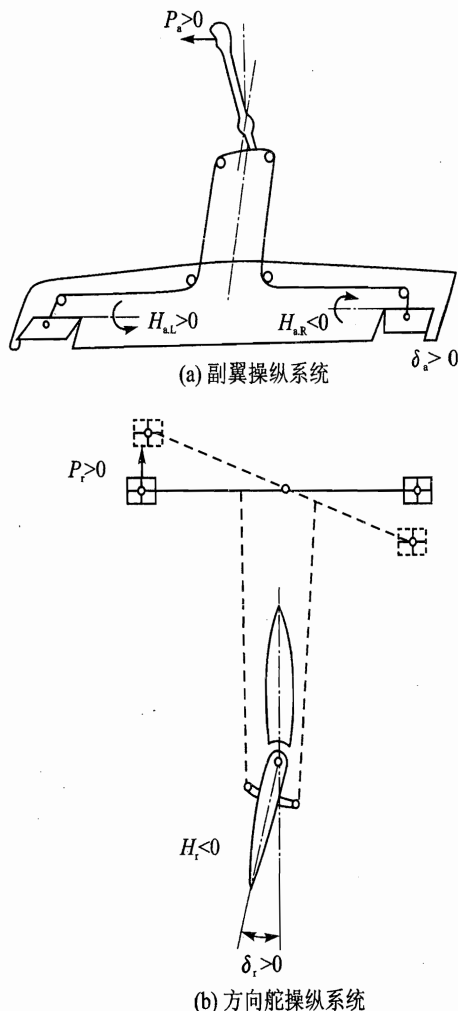


范对滚转操纵效率的要求，改为以副翼阶跃偏转在给定时间内滚转角不小于规定值来衡量，如起飞着陆状态要求 1 s 内滚转 30°；空战时要求 1 s 内滚转 90°等。

8.6 铰链力矩和操纵力特性

与纵向情况类似，驾驶员通过施加操纵力和移动操纵机构来实现对飞机的横侧操纵。因而横侧操纵力和位移特性，就成了驾驶员评价飞机横航向静操纵性的重要指标。

横侧操纵力和位移的符号规定为：副翼左压杆，相应的驾驶员杆力 P_a 和杆位移 d_a 为正，右副翼下偏 δ_a 为正（见图 8.22(a)）；蹬左脚蹬，相应的脚蹬力 P_r 和脚蹬位移 d_r 为正，方向舵偏向右翼 δ_r 为正（见图 8.22(b)）。显然，横侧操纵力是用来平衡副翼和方向舵舵面上的铰链力矩；而操纵机构位移则与副翼和方向舵偏角保持确定的对应关系。



(a) 副翼操纵系统

(b) 方向舵操纵系统

图 8.22 横侧向操纵系统原理图

利用虚位移原理，在原操纵系统处于平衡状态的基础上，可建立横侧操纵力与相应铰链力矩的关系，对于副翼为

$$P_a = -k_a H_a = -[(k_a H_a)_R - (k_a H_a)_L] \tag{8.48}$$

因为左、右副翼偏角不同，产生的铰链力矩刚好相反，故式中出现左、右副翼铰链力矩之差。$k_a = \Delta\delta_a/\Delta d_a$ 称为副翼操纵系统传动比。如采用差动副翼，则左、右副翼传动比不同，即 $k_{a.R} \neq k_{a.L}$。

对于方向舵为

$$P_r = -k_r H_r \tag{8.49}$$

式中 $k_r = \Delta\delta_r/\Delta d_r$ 称为方向舵操纵系统传动比。

8.6.1 副翼和方向舵铰链力矩

由于舵面处绕流的复杂性，其铰链力矩系数一般不易估准，常采用吹风试验得出。这里只是定性地从物理上说明铰链力矩的性质及其影响因素。

1. 副翼铰链力矩

副翼铰链力矩 H_a 一般也用无因次系数 C_{ha} 来表示。由于副翼杆力为左、右两片舵面的铰链力矩之差，所以必须分别考虑左、右副翼的铰链力矩。以单个右翼为例，可写成

$$H_{a.R}=qS_a c_a\cdot C_{ha.R} \tag{8.50}$$

式中 S_a 为副翼单个舵面铰链轴后的面积；c_a 为相应的副翼几何平均弦长。

为简单起见，先考虑无上反直机翼。此时铰链力矩系数 $C_{ha.R}$ 可表示成

$$C_{ha.R}=(C_{ha.0}+C_{ha.\alpha}\alpha_r+C_{ha.\delta}\delta_a+C_{ha.\tau}\tau_a+C_{ha.p}\bar{p}+C_{ha.r}\bar{r})_R \tag{8.51}$$

式中 $C_{ha.0}$ 为副翼剖面非对称而引起的铰链力矩系数。

$C_{ha.\alpha_R}=\left(\dfrac{\partial C_{ha}}{\partial \alpha}\right)_R$ 为迎角引起的铰链力矩系数导数。对于无上反直机翼构形，左副翼产生的应与右副翼的相等，即

$$C_{ha.\alpha_R}=C_{ha.\alpha_L}$$

$C_{ha.\delta_R}=\left(\dfrac{\partial C_{ha}}{\partial \delta_a}\right)_R$ 为副翼偏角引起的铰链力矩系数的导数。对于简单副翼，左、右副翼反向偏转，故

$$C_{ha.\delta_R}=-C_{ha.\delta_L}$$

$C_{ha.\tau_R}=\left(\dfrac{\partial C_{ha}}{\partial \tau_a}\right)_R$ 为副翼调整片偏角引起的铰链力矩系数的导数，同理 $C_{ha.\tau_R}=-C_{ha.\tau_L}$。

$C_{ha.p_R}=\left(\dfrac{\partial C_{ha}}{\partial p}\right)_R$ 为角速度 p 引起的铰链力矩系数的导数。它是通过机翼局部迎角变化形成的。正的 $\bar{p}$ 使右翼迎角变化量为

$$\Delta\alpha_R(p)\approx py_{s.c}/V=\bar{p}\bar{y}_{s.c}$$

式中 $y_{s.c}$ 为右副翼面心至对称面的距离。引起的附加铰链力矩系数为

$$\Delta C_{ha_R}(p)=C_{ha.\alpha}\cdot\Delta\alpha_R=C_{ha.\alpha}\bar{p}\bar{y}_{s.c}$$

上式对 $\bar{p}$ 求导，得相应的导数。同时由于左副翼迎角的反对称变化，则

$$C_{ha.p_R}=-C_{ha.p_L}=C_{ha.\alpha}\bar{y}_{s.c}$$

$C_{ha.r_R}=\left(\dfrac{\partial C_{ha}}{\partial r}\right)_R$ 为角速度 r 引起的铰链力矩系数的导数。它将通过机翼的局部速度变化而产生的。正的 $\bar{r}$ 使右副翼速度变化量为

$$\Delta V(r)\approx ry_{s.c}$$

引起的附加铰链力矩系数为

$$\Delta C_{ha_R}(r)=C_{ha.0}\bar{r}\bar{y}_{s.c}$$

上式对 $\bar{r}$ 求导，即得相应导数。考虑到左副翼速度的反对称变化，则可得

$$\Delta C_{ha.r_R}=-C_{ha.r_L}=C_{ha.0}\bar{y}_{s.c}$$

如果考虑简单操纵机构，左、右副翼传动比相同，杆力平衡的副翼铰链力矩将可直接由左、



右翼铰链力矩之差确定，代入式(8.48)，可表示为

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{a}} &= H_{\mathrm{a.R}} - H_{\mathrm{a.L}} = \\ & 2qS_{\mathrm{a}}c_{\mathrm{a}}(C_{ha.\delta_{\mathrm{a}}} \cdot \delta_{\mathrm{a}} + C_{ha.\tau_{\mathrm{a}}} \cdot \tau_{\mathrm{a}} + C_{ha.\alpha}\bar{y}_{\mathrm{s.c}} \cdot \bar{p} + C_{ha.0}\bar{y}_{\mathrm{s.c}} \cdot \bar{r}) \end{aligned} \tag{8.52}$$

对于有后掠、上反的机翼，当有侧滑时，不能直接用上述公式来计算副翼铰链力矩，因为此时左、右两翼的动压和迎角不等，其值需根据后掠角和侧滑角确定，随后按相应公式分别算出左、右副翼的铰链力矩，再合起来。

2. 方向舵铰链力矩

方向舵铰链力矩 H_{r} 也用无因次力矩系数 C_{hr} 表示，为

$$H_{\mathrm{r}} = k_q q S_{\mathrm{r}} c_{\mathrm{r}} C_{hr} \tag{8.53}$$

式中 S_{r} 为方向舵铰链轴后的面积；c_{r} 为方向舵的几何平均弦长。方向舵铰链力矩系数 C_{hr} 可表示为

$$C_{hr} = C_{hr.\beta}\beta + C_{hr.\delta}\delta_{\mathrm{r}} + C_{hr.p}\bar{p} + C_{hr.r}\bar{r} + C_{hr.\tau}\tau_{\mathrm{r}} \tag{8.54}$$

式中 $C_{hr.\delta}=\dfrac{\partial C_{hr}}{\partial \delta_{\mathrm{r}}}$ 和 $C_{hr.\tau}=\dfrac{\partial C_{hr}}{\partial \tau_{\mathrm{r}}}$ 分别为方向舵和调整片偏转引起的铰链力矩导数，可类似于升降舵求得。

$C_{hr.\beta}=\dfrac{\partial C_{hr}}{\partial \beta}$ 为侧滑角引起的铰链力矩导数，可表示为

$$C_{hr.\beta} = \frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta_{\mathrm{vt}}}\left(1-\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right) \tag{8.55}$$

$C_{hr.p}=\dfrac{\partial C_{hr}}{\partial \bar{p}}$ 和 $C_{hr.r}=\dfrac{\partial C_{hr}}{\partial \bar{r}}$ 分别为角速度 $\bar{p}$ 和 $\bar{r}$ 引起的铰链力矩导数，可近似地表示为

$$\left.\begin{aligned} C_{hr.p} &= \frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta_{\mathrm{vt}}}\Delta\beta(\bar{p}) = \frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta_{\mathrm{vt}}} \cdot \frac{\bar{h}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_q}} \\ C_{hr.r} &= \frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta_{\mathrm{vt}}}\Delta\beta(\bar{r}) = \frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta_{\mathrm{vt}}} \cdot \frac{\bar{l}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_q}} \end{aligned}\right\} \tag{8.56}$$

将这些导数代入式(8.53)后，可整理成

$$H_{\mathrm{r}} = k_q q S_{\mathrm{r}} c_{\mathrm{r}}\left\{\frac{\partial C_{hr}}{\partial \beta_{\mathrm{vt}}}\left[\left(1-\frac{\partial \sigma}{\partial \beta}\right)+\frac{\bar{h}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_q}}+\frac{\bar{l}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_q}}\right] \cdot \beta_{\mathrm{vt}} + \frac{\partial C_{hr}}{\partial \delta_{\mathrm{r}}} \cdot \delta_{\mathrm{r}} + \frac{\partial C_{hr}}{\partial \tau_{\mathrm{r}}} \cdot \tau_{\mathrm{r}}\right\} \tag{8.57}$$

8.6.2　横侧操纵力特性

下面仅定性了解横侧力操纵特性。详细的公式推导由于繁杂将省去，其原理类似于纵向。如读者需要详细了解，请参阅有关资料。

1. 定常直线侧滑飞行

这里仍讨论无差动副翼，其左、右副翼传动比是相同的。当副翼调片处于中立位置时，定直侧滑水平飞行时副翼操纵杆力可近似表示如下：

对于无上反直机翼的飞机，有

$$P_a = -P_a^* \frac{C_{l\delta_a}}{C_L} n_n \delta_a \tag{8.58}$$

对于具有后掠翼的飞机，有

$$P_a \approx -P_a^* \frac{C_{l\delta_a}}{C_L} n_n \left[\delta_a + \frac{2C_{ha.0} + C_{ha.\alpha}}{C_{ha.\delta}} \beta \tan \chi \right] \tag{8.59}$$

式中 $P_a^* = k_a \frac{C_{ha.\delta}}{C_{l\delta_a}} \cdot 2S_a c_a \frac{W}{S}$，称为副翼操纵力对飞机质心的侧向位移梯度，代表驾驶员为了克服数值为 Wb 的滚转力矩所需施加的操纵力。而 $n_n = \frac{L}{W} = \frac{1}{\cos \mu}$。

当方向舵调整片处于中立位置时，定直侧滑水平飞行时的方向舵的脚蹬力，可近似表示为

$$P_r = -P_r^* \frac{C_{n\delta_r}}{C_L} n_n \left(\delta_r + \frac{C_{hr.\beta}}{C_{hr.\delta}} \beta \right) \tag{8.60}$$

式中 $P_r^* = k_r \frac{C_{hr.\delta}}{C_{n\delta_r}} S_r c_r \frac{W}{S}$，称为方向舵操纵力对 Wb 偏航力矩的梯度，代表为了克服数值为 Wb 的偏航力矩所需施加的方向舵操纵力。

将定直侧滑飞行所需的舵偏角和侧滑角的式(8.33)代入式(8.59)、式(8.60)中，并类同升降舵操纵引入舵面松浮时横侧气动导数后，经整理可改写成

$$P_a = -\frac{P_a^* n_n}{C_{c\beta} - C_{c\delta} \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}}} \left(C_{l\beta.f} - C_{l\delta_r} \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}} \right) \phi \tag{8.61}$$

$$P_r = -\frac{P_r^* n_n}{C_{c\beta} - C_{c\delta} \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}}} C_{n\beta.f} \cdot \phi \tag{8.62}$$

式中横航向松浮导数为

$$C_{l\beta.f} = \left(\frac{\partial C_l}{\partial \beta} \right)_f = C_{l\beta} - C_{l\delta_a} \frac{2C_{ha.0} + C_{ha.\alpha}\alpha}{C_{ha.\delta}} \cdot \tan \chi$$

$$C_{n\beta.f} = \left(\frac{\partial C_n}{\partial \beta} \right)_f = C_{n\beta} - C_{n\delta_r} \frac{C_{ha.\beta}}{C_{ha.\delta}}$$

可见，定直侧滑飞行时横侧操纵力特性基本上与横航向松浮静稳定性导数成正比。这与纵向操纵力的情况是一致的。

将式(8.62)对 ϕ 求导得

$$\frac{\partial P_r}{\partial \phi} = -\frac{P_r^* n_n}{C_{c\beta} - C_{c\delta} \frac{C_{n\beta}}{C_{n\delta_r}}} C_{n\beta.f} \tag{8.63}$$

有的飞行品质规范将其列为方向舵静操纵力指标。



2. 正常盘旋飞行

与定直平飞相比，以同样高度、速度进行正常盘旋时，除了迎角要加大，还出现了三个方向的旋转角速度。因此，纵、横向舵面上都产生附加铰链力矩，需要由驾驶员施加操纵力予以平衡。

同样，为定性说明问题，仍以某后掠翼飞机为例，在所有调整片均处于中立位置情况下，副翼的附加操纵杆力可近似表示为

$$P_{\mathrm{a}}=-P_{\mathrm{a}}^{*}\frac{C_{l\delta_{\mathrm{a}}}}{C_{L}}n_{\mathrm{n}}\left[\delta_{\mathrm{a}}+\frac{C_{ha.\alpha}}{C_{ha.\delta}}(2\alpha\bar{r}+\bar{p})\bar{y}_{\mathrm{s.c}}+\frac{C_{ha.0}}{C_{ha.\delta}}\bar{r}\bar{y}_{\mathrm{s.c}}\right] \tag{8.64}$$

方向舵的附加脚蹬力近似表示为

$$P_{\mathrm{r}}=-P_{\mathrm{r}}^{*}\frac{C_{l\delta_{\mathrm{r}}}}{C_{L}}n_{\mathrm{n}}\left[\delta_{\mathrm{r}}+\frac{C_{hr.\beta}}{C_{hr.\delta}}+\left(\frac{\bar{h}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_{q}}}\bar{p}+\frac{\bar{l}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_{q}}}\bar{r}\right)\right] \tag{8.65}$$

升降舵的附加操纵杆力近似表示为

$$\Delta P_{\mathrm{e}}=-P_{\mathrm{e}}^{*}\frac{C_{m\delta_{\mathrm{e}}}}{C_{L}}n_{\mathrm{n}}\left\{\Delta\delta_{\mathrm{e}}+\frac{C_{he.\alpha_{\mathrm{t}}}}{C_{he.\delta}}\left[\Delta\alpha\left(1-\frac{\partial\varepsilon}{\partial\alpha}\right)+\frac{\bar{l}_{\mathrm{ht}}}{\sqrt{k_{q}}}q\right]\right\} \tag{8.66}$$

式中“Δ”表示相对定直平飞状态的增量。

再将正常盘旋所需舵偏角式(8.45)以及盘旋角速度、$\Delta\alpha$ 与过载关系式(8.42)代入式(8.64)～式(8.66)中，还引入相应的舵面松浮导数，经整理后，正常盘旋时的附加操纵力公式可改写为

$$\left.\begin{aligned}P_{\mathrm{a}}&=-P_{\mathrm{a}}^{*}\frac{gb\sqrt{n_{\mathrm{n}}^{2}-1}}{2V^{2}C_{L}}C_{lp.\mathrm{f}}\\P_{\mathrm{r}}&=-P_{\mathrm{r}}^{*}\frac{gb\sqrt{n_{\mathrm{n}}^{2}-1}}{2V^{2}C_{L}}C_{nr.\mathrm{f}}\\\Delta P_{\mathrm{e}}&=P_{\mathrm{e}}^{*}\frac{n_{\mathrm{n}}^{2}-1}{\mu_{1}n_{\mathrm{n}}}\left[C_{mq.\mathrm{f}}+\frac{n_{\mathrm{n}}\mu_{1}}{n_{\mathrm{n}}+1}\left(\frac{\partial C_{m}}{\partial C_{L}}\right)_{\mathrm{f}}\right]\end{aligned}\right\} \tag{8.67}$$

式中横航向松浮导数分别为

$$\left.\begin{aligned}C_{lp.\mathrm{f}}&=C_{lp}-C_{l\delta_{\mathrm{a}}}\frac{C_{ha.\alpha}}{C_{ha.\delta}}\bar{y}_{\mathrm{s.c}}\\C_{nr.\mathrm{f}}&=C_{nr}-C_{n\delta_{\mathrm{r}}}\frac{C_{hr.\beta_{\mathrm{vt}}}}{C_{hr.\delta}}\frac{\bar{l}_{\mathrm{vt}}}{\sqrt{k_{q}}}\end{aligned}\right\} \tag{8.68}$$

3. 稳定滚转

根据稳定滚转的定义，可以只考虑绕 Ox_{b} 轴的单自由度滚转。此时，副翼操纵杆力可由式(8.64)中令 $\bar{r}=0, C_L=C_W$，即可得出

$$P_{\mathrm{a}}=-P_{\mathrm{a}}^{*}\frac{C_{l\delta_{\mathrm{a}}}}{C_{W}}\left(\delta_{\mathrm{a}}+\frac{C_{ha.\alpha}}{C_{ha.\delta}}\bar{p}\bar{y}_{\mathrm{s.c}}\right) \tag{8.69}$$

将稳定滚转所需的副翼偏角式(8.47)代入得

$$P_a = \frac{P_a^*}{C_W}\left(C_{lp} - C_{l\delta_a}\frac{C_{he,\alpha}}{C_{ha,\delta}}\bar{y}_{s.c}\right)\bar{p} = \frac{P_a^*}{C_W}C_{lp.f} \cdot \bar{p} \tag{8.70}$$

上式对 $\bar{p}$ 求导得

$$\frac{\partial P_a}{\partial \bar{p}} = \frac{P_a^*}{C_W}C_{lp.f} \tag{8.71}$$

有的飞行品质中将上式列为副翼静操纵力的指标。

8.6.3　助力器操纵时的杆力特性

对于高速飞机,副翼操纵系统也装有无回力助力器,如略去操纵系统摩擦力,副翼杆力完全来自载荷机构。若压杆位移增大,则载荷机械弹簧压缩量增大,杆力增大,即

$$P_a = \frac{dP_a}{dd_a} \cdot \frac{dd_a}{d\delta_a} \cdot \delta_a$$

式中 dP_a/dd_a 为副翼操纵系统的载荷机构杆力梯度;$d\delta_a/dd_a = k_a$,即为副翼操纵系统传动比。于是上式写成

$$P_a = \frac{1}{k_a}\frac{dP_a}{dd_a}\delta_a \tag{8.72}$$

将不同横侧定常运动所需的舵偏角如式(8.33)、式(8.40)代入上式,即可得实现上述定常运动时助力器操纵所需的副翼杆力特性。

从式(8.72)可见,类似于升降舵助力器系统,可以通过改变传动比和杆力梯度来改善杆力静操纵特性。采用几组不同弹簧刚度组成的载荷机构,使杆力与杆位移关系如图 8.23 所示。小位移时,杆力梯度 dP_a/dd_a 大些,杆力增加明显,驾驶员易于掌握杆量;而大位移时,杆力梯度 dP_a/dd_a 小些,以致于杆力不会过大,造成驾驶员过于疲劳。

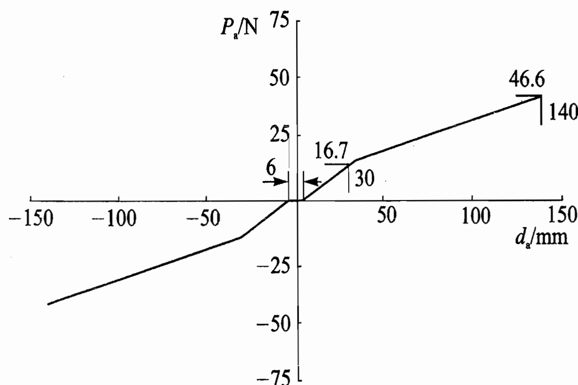


图 8.23　某机的装有无回力助力器副翼操纵系统杆力和杆位移关系



在副翼操纵系统中有时还装有非线性机构，可使传动比 k_a 发生变化，杆位移 d_a 与副翼偏角不再是线性变化，如图 8.24 所示。小偏角时 k_a 小，大偏角时 k_a 大。这样在改变同样的偏角情况下，小偏角时相应的杆位移大些，可保证操纵不致过于灵敏；大偏角时相应的杆位移小些，可以避免操纵过于迟钝。

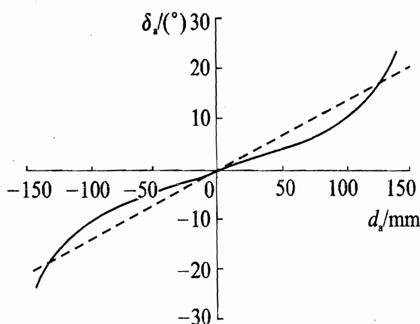


图 8.24 非线性机构对副翼杆位移与偏角关系影响

8.7 影响飞行器横航向平衡、静稳定和静操纵的其他因素

8.7.1 动力装置的影响

动力装置工作时的影响，主要考虑螺旋桨或涡轮喷气发动压气机和涡轮的反作用扭矩、螺旋桨滑流及涡轮喷气发动机尾喷流的引射作用等。

螺旋桨及涡轮喷气发动机转动部件的反作用扭矩，在多发动机飞机低速飞行、发动机高转速工作状态下比较明显。从互换性要求出发，发动机转动部件大部分采用同一形式。转动部件高速同向旋转，反作用扭矩就大；低速飞行时，气动力作用小，所以反作用扭转的相对影响就较严重。为了减轻这种反作用扭转的影响，有时可将垂尾的安定面适当偏置一个很小的角度，使得在主要飞行状态下，所需横航向操纵面的偏角可减小一些。

螺旋桨产生的滑流本身是扭转的，它引起飞机绕流的非对称性，同时使垂尾区平均速度的大小和方向都发生变化。滑流流过机翼时也会改变机翼的局部流动条件。这些变化都会引起横航向气动导数的改变。尾喷流的引射作用则视尾喷流与平、垂尾的相对位置而定。

无论是发动机转动部件的反作用扭矩，还是滑流和尾喷流的影响，一般都是通过试验来确定的。

8.7.2 构形变化的影响

1. 增强横向操纵效能装置

常见的装置有扰流板和涡流发生器。扰流板安装在机翼的上表面，当副翼操纵效能降低



时，就打开以协助完成横向操纵任务，如图 8.25 所示。扰流片打开，引起平板前压强增大，破坏了上翼面的光滑流线，使该半翼的升力减小，构成附加的滚转力矩。通常扰流片操纵是与副翼联动的，当副翼偏角达到一定值时（8°～10°），副翼上偏的那一边的扰流片自动打开，起到增强副翼操纵效能的作用，同时可减少不利偏航力矩。当机翼两侧的扰流片同时打开时，使飞机升力下降，阻力增加，是防止飞机在着陆初始阶段“反弹”现象的措施之一。

涡流发生器是一些导向叶片，垂直安装在机翼翼面上。图 8.26 所示的是安装在副翼前缘前面的涡流发生器。每一叶片的流动像半个小机翼，产生的翼梢旋涡将翼面附面层外的气流带入附面层内，以增加附面层内的动能，延缓气流分离，从而改善副翼在大迎角下的效能。

2. 襟翼、起落架

襟翼放下时，改变了机翼展向载荷分布。一定 C_L 下，放襟翼将使机翼展向载荷向机翼中部相对集中，从而使 $|C_{l\beta.\mathrm{w}}|$，$C_{np.\mathrm{w}}$ 和 $C_{lr.\mathrm{w}}$ 等值变小。但使垂尾区侧洗加大，从而使 $C_{n\beta.\mathrm{vt}}$ 值变大，相应的速度阻滞加大，即 k_q 变小。起落架放下时对横侧气动导数也存在一定影响。这些影响一般可以通过吹风试验得到。

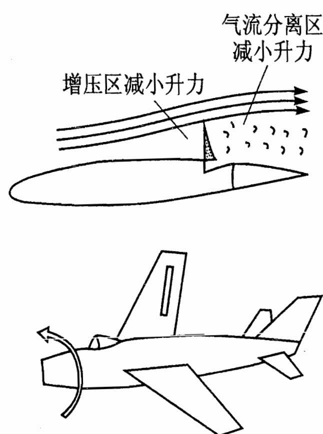


图 8.25　扰流板增强横向操纵作用

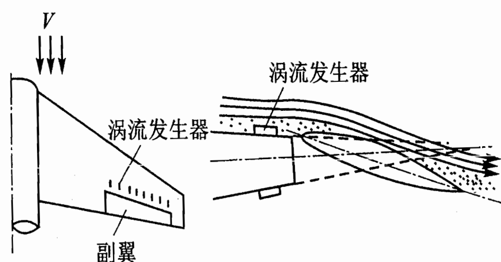


图 8.26　涡流发生器的作用

8.7.3　弹性变形的影响

结构弹性变形的影响是复杂的，即使对称飞行，由于展向气动载荷作用，机翼也会变形，从而使上反角发生变化。如展向气动载荷不通过机翼刚性轴，则在弯曲变形的同时，还产生扭转变形。如有非对称运动，则附加载荷将进一步引起机翼变形。这些变形势必影响横侧气动导数，继而影响飞行器动力学特性。但由于涉及其他学科，这里不作全面介绍。下面仅介绍机翼弹性变形引起的副翼反效现象。

现代飞机大多采用后掠薄机翼，副翼安置在机翼外侧，由于机翼刚度较小，在速压很大的情况下，偏转副翼将引起较大的附加气动载荷。亚声速时，附加载荷大体作用在副翼所在部位



的翼弦中弦附近；超声速时，则在副翼翼面上。附加载荷往往作用在机翼刚性轴之后，引起机翼扭转变形，如图 8.27 所示。其结果是使副翼下偏一侧机翼局部迎角因扭转变形而减小，副翼上偏一侧则加大。几何迎角反对称变化引起的气动力矩削弱了副翼滚转操纵效果。随着速压的增加，相同副翼偏角引起的机翼扭转变形也增大，副翼操纵效能就越低；达到某动压 q 值时，副翼操纵效能削弱到零，副翼就完全失去滚转操纵能力，则此时的 q 称副翼操纵反效的临界速压，相应的速度称副翼反效临界速度。当飞行速度超过该临界速度时，偏转副翼将引起相反的效果，即左压杆会产生向右的滚转力矩；右压杆会产生向左的滚转力矩。这就是所谓副翼操纵的反效现象。

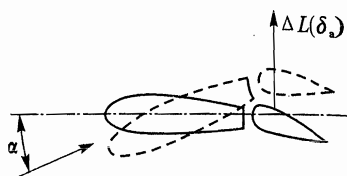


图 8.27　副翼偏转引起的机翼扭转变形

为保证飞行器飞行安全，减轻大速压飞行时外侧副翼操纵效能下降的不利影响，目前采用的措施中，有的飞机配置内侧副翼，低速飞行时使用外侧副翼，高速飞行时使用内侧副翼；有的飞机安装扰流片装置，来加强滚转操纵效能。

8.7.4　大迎角、地面效应的影响

许多由机翼产生的横航向气动导数是与迎角（或 C_L）直接有关的。迎角增加至一定值后，升力线斜率将出现非线性变化，流过飞行器表面的气流出现分离、不对称的情况，结果造成作用在机上的横航向气动力和力矩变化。图 8.28 为某高速飞机横航向气动导数随迎角的变化规律。可见阻尼导数在大迎角下出现变号；横航向静稳定性降低，甚至出现航向静不稳定；舵面操纵效率也下降等。这些变化势必会影响飞行器的动力学特性。

对于低速飞机，大迎角下可能会出现所谓“机翼自转”的现象，从升力系数随 α 变化曲线图 8.29 可知，当对称面处迎角超过临界迎角 α_c，飞机以 $p>0$ 滚转时，右半翼剖面的迎角大于左半翼剖面迎角，而相应的 C_L 值有可能小于左半翼的，机翼两侧的升力差引起绕 Ox_b 轴的力矩，其作用方向与飞机滚转方向一致，不但不阻止飞机滚转，反而起加速滚转作用，故谓之“机翼自转”现象，也即造成机翼滚转阻尼导数反号 $C_{lp,w}>0$。

对于高速飞机，通常采用大后掠翼、三角翼，现代飞机还加上边条的气动布局，这将延缓气流分离。提高临界迎角，升力系数 C_L 在超过临界迎角后下降缓慢，因而出现自转时机较晚，甚至不出现机翼自转。但是，大迎角下，由于翼身对垂尾的遮蔽作用增强，垂尾几乎全部处于翼身产生的分离气流中，加上垂尾有效后掠角变大等原因，导致垂尾的航向稳定性降低，全机出现航向发散现象。如图 8.28 中的某高速飞机，迎角超过 20°，即出现 $C_{n\beta}<0$。

无论是低速飞机的“机翼自转”现象，还是高速飞机的“航向发散”现象，均是造成飞机进入尾旋的根本原因。其详细说明见第 11 章。

近地飞行时，地面效应改变了全机的绕流条件，使翼身组合体升力线斜率增大，影响尾流的大小和方向。这些因素会间接影响横航向气动导数。但由于在飞机倾斜下，下沉机翼一侧，

图 8.28　某高速飞机横航向气动系数随 α 变化曲线



因接近地面升力增大，上翘机翼一侧升力则减小，从而产生使飞机趋向水平的滚转力矩，即出现了 $C_{l\phi}$ 这样的动导数等。

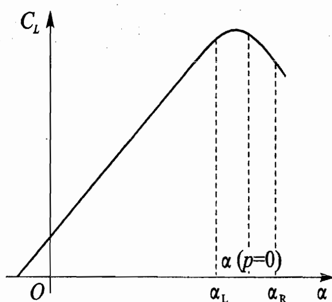


图 8.29　大迎角时机翼滚转产生的迎角变化

复习思考题

8.1　方向舵固定在中立位置时，$C_n\sim\beta$ 曲线为什么常通过原点，呈反对称变化？偏转方向舵时，如在气动力线性变化范围，则曲线如何变化？

8.2　何谓飞行器的航向静稳定性和横向静稳定性？影响横航向静稳定性的主要因素是什么？

8.3　现代高速飞行器的横航向气动特性有何特点？

8.4　试推导因非对称装载在飞行器上作用有不对称滚转力矩 ΔL 时，为保持定直飞行所需的副翼、方向舵偏角的表达式(设 $C_{n\delta_a}$ 可略)。

8.5　试分析方向舵松浮时，对飞行器横航向静稳定性的影响，并导出相应的松浮导数 $C_{l\beta.f}$ 和 $C_{n\beta.f}$。

8.6　飞机从定常直线无侧滑飞行状态转入定常右盘旋，试问驾驶员应如何操纵副翼、方向舵和升降舵？

第9章　飞机的纵向稳定性和操纵性

前述的静稳定性和静操纵性问题中,重点讨论了飞机受到扰动后的初始恢复特性与参数的关系,以及从一个飞行状态过渡到另一个飞行状态的稳态增量和飞机设计参数的关系。而飞机受扰后最终的恢复过程和操纵反应的过渡过程,则是本章分析的一个重点。

同时,现代飞机往往利用自动器改善甚至"主动"控制飞机的飞行动力学特性,从而减少对飞机气动、总体设计的约束,提高飞行性能。

不论怎样,在飞行动力学分析和设计的基本讨论中,仍一般从线性小扰动模型出发,飞机的扰动运动用纵向和横航向分开的模型分别描述,线性系统理论则是主要的理论工具,数值分析工具可利用 MATLAB 等软件。

因此,本章首先讨论飞机纵向运动的稳定性,再讨论纵向操纵性。在此基础上,结合现代带自动器飞机,介绍其中几种基本类型的控制器及其对飞行动力学的影响。最后简单介绍飞机纵向飞行品质要求。

9.1　飞机纵向运动稳定性

9.1.1　纵向扰动运动方程和基本求解理论

在6.5节详细讨论了纵向小扰动运动方程。对于飞机稳定性和操纵性分析,一般可以不计高度变化对外力和外力矩的影响,并假设基准运动为水平直线,由方程式(6.78)得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\Delta\dot{V}\\ \Delta\dot{\alpha}\\ \Delta\dot{q}\\ \Delta\dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_V & X_\alpha+g & 0 & -g\\ -Z_V & -Z_\alpha & 1 & 0\\ \overline{M}_V-\overline{M}_{\dot{\alpha}}Z_V & \overline{M}_\alpha-\overline{M}_{\dot{\alpha}}Z_\alpha & \overline{M}_q+\overline{M}_{\dot{\alpha}} & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta\theta\end{bmatrix}+$$

$$\begin{bmatrix}X_{\delta_e} & X_{\delta_p}\\ -Z_{\delta_e} & -Z_{\delta_p}\\ \overline{M}_{\delta_e}-\overline{M}_{\dot{\alpha}}Z_{\delta_e} & \overline{M}_{\delta_p}-\overline{M}_{\dot{\alpha}}Z_{\delta_p}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\delta_e\\ \Delta\delta_p\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu} \tag{9.1}$$

其中状态矢量 $\boldsymbol{x}=[\Delta V\quad \Delta\alpha\quad \Delta q\quad \Delta\theta]^{\mathrm{T}}$,操纵矢量 $\boldsymbol{u}=[\Delta\delta_e\quad \Delta\delta_p]^{\mathrm{T}}$,$\Delta\delta_e$ 和 $\Delta\delta_p$ 分别为气动舵面偏角(常规飞机纵向为升降舵或全动平尾)和油门杆位置。



表 9.1 列出了纵向动力学导数用气动导数表示的关系式。

表 9.1 纵向气动导数

纵向气动导数	单 位	纵向气动导数	单 位
$X_V=\dfrac{T_V\cos(\alpha_*+\varphi_T)}{m}-\dfrac{(C_{DV}+2C_{D^*})q_*S}{mV_*}$	s^{-1}	$X_\alpha=\dfrac{-T_*\sin(\alpha_*+\varphi_T)-CD\alpha q_*S}{m}$	m/s^2
$X_{\delta_e}=-C_{D\delta_e}\dfrac{q_*S}{m}$	m/s^2	$X_{\delta_p}=\dfrac{T_{\delta_p}\cos(\alpha_*+\varphi_T)}{m}$	m/s^2
$Z_V=\dfrac{T_V\sin(\alpha_*+\varphi)}{mV_*}+\dfrac{(C_{LV}+2C_{L^*})q_*S}{mV_*^2}$	m^{-1}		
$Z_\alpha=\dfrac{(C_{D^*}+C_{L\alpha})q_*S}{mV_*}=\dfrac{T_*\cos(\alpha_*+\varphi_T)+C_{L\alpha}q_*S}{mV_*}$	s^{-1}		
$Z_q=C_{Lq}\left(\dfrac{c}{2V_*}\right)\dfrac{q_*S}{mV_*}$		$Z_{\dot\alpha}=C_{L\dot\alpha}\left(\dfrac{c}{2V_*}\right)\dfrac{q_*S}{mV_*}$	
$Z_{\delta_e}=C_{L\delta_e}\dfrac{q_*S}{mV_*}$	s^{-1}	$Z_{\delta_p}=\dfrac{T_{\delta_p}\sin(\alpha_*+\varphi)}{mV_*}$	s^{-1}
$\overline{M}_V=\dfrac{(C_{mV}+2C_{m*})q_*Sc}{V_*I_y}=\dfrac{C_{mV}q_*Sc}{V_*I_y}$	m/s	$\overline{M}_\alpha=C_{m\alpha}\dfrac{q_*Sc}{I_y}$	s^{-2}
$\overline{M}_q=C_{mq}\left(\dfrac{c}{2V_*}\right)\dfrac{q_*Sc}{I_y}$	s^{-1}	$\overline{M}_{\dot\alpha}=C_{m\dot\alpha}\left(\dfrac{c}{2V_*}\right)\dfrac{q_*Sc}{I_y}$	s^{-1}
$\overline{M}_{\delta_e}=C_{m\delta_e}\dfrac{q_*Sc}{I_y}$	s^{-2}	$\overline{M}_{\delta_p}=\dfrac{C_{m\delta_p}q_*Sc+\Delta M_{\delta_p}}{I_y}$	s^{-2}

式(9.1)是典型的高阶线性常系数常微分方程组,描述了飞机偏离其对称定常直线平衡运动后,纵向运动的偏离情况。如前所述,相应的基本问题有两类,即所谓稳定性和操纵性问题。

对于稳定性问题,讨论受到偏离平衡的初始扰动,但并不施加操纵($\boldsymbol{u}=0$)时,飞机随后的运动情况。对应的运动模型进一步表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x},\qquad \boldsymbol{x}(0)\neq 0 \tag{9.2}$$

对于此方程的解,以二阶方程为例说明。此时方程式(9.2)展开为标量形式

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_1&=a_{11}x_1+a_{12}x_2\\ \dot{x}_2&=a_{21}x_1+a_{22}x_2\end{aligned}\right\}$$

以 $x_1=C_1e^{\lambda t}$,$x_2=C_2e^{\lambda t}$代入上式,得

$$\begin{bmatrix}\lambda-a_{11} & -a_{12}\\ -a_{21} & \lambda-a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ C_2\end{bmatrix}e^{\lambda t}=0$$

可见,要使上式对所有时刻 t 成立,则 λ 是相应于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根,$[C_1\quad C_2]^T$ 是相应于 λ 的特征矢量。



对于一般的 n 阶方程式(9.2),其解取决于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征根。当所有的 n 个特征根 $\lambda_i(i=1,\cdots,n)$ 互异时,其解为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i\mathrm{e}^{\lambda_i t} \tag{9.3}$$

式中 $\boldsymbol{X}_i$ 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 相应于 λ_i 的特征矢量,具体值取决于初始条件。

对于操纵性问题,则讨论施加操纵后的飞机运动情况。对应的运动模型可进一步表示为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{x}(0)=0 \tag{9.4}$$

这是非齐次方程,直接应用微分方程理论,解的结构为

$$\boldsymbol{x}(t)=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i\mathrm{e}^{\lambda_i t}+g(t) \tag{9.5}$$

式中 λ_i 是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征矢量,$g(t)$ 是方程式(9.4)的一个特解,$\boldsymbol{X}_i$ 由初始条件确定。

另外,也常将式(9.2)、式(9.4)进行 Laplace 变换,并用线性系统分析方法讨论。

9.1.2 模态特性分析方法

1. 稳定性判定准则

这里以式(9.1)中 $\boldsymbol{A}$ 的特征根讨论为主,其等价于特征方程

$$\begin{vmatrix} \lambda-X_V & -(X_\alpha+g) & 0 & g \\ Z_V & \lambda+Z_\alpha & -1 & 0 \\ -(\overline{M}_V-\overline{M}_{\dot\alpha}Z_V) & -(\overline{M}_\alpha-\overline{M}_{\dot\alpha}Z_\alpha) & \lambda-(\overline{M}_q+\overline{M}_{\dot\alpha}) & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix}=0 \tag{9.6}$$

的解。其展开后为关于 λ 的一元四次代数方程

$$\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4=0 \tag{9.7}$$

若仅仅需要了解此方程对应的原微分系统的稳定性,则可由关于四次特征方程的 Routh-Hurwitz 稳定性准则判定。飞机纵向扰动运动稳定的充分必要条件为

$$b_1>0,\quad \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & b_4 & b_3 \end{vmatrix}>0,\quad \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 \\ 0 & b_4 & b_3 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 \end{vmatrix}>0 \tag{9.8}$$

亦等价于

$$\left.\begin{array}{l} b_1>0,\quad b_2>0,\quad b_3>0,\quad b_4>0 \\ R=b_1b_2b_3-b_1^2b_4-b_3^2>0 \end{array}\right\} \tag{9.9}$$

并且,若 $b_4=0$,式(9.9)中其他条件均满足,则对应有一个特征根为零根;若 $R=0$,其他条件均满足,则对应有一对特征根为纯虚根。



2. 二阶振动系统

由代数方程理论可知，式(9.7)为实系数一元四次代数方程，必有4个根，且若有复根则必成对共轭出现。亦即，式(9.7)可以分解为两个一元二次代数方程之积

$$(\lambda^2+D_1\lambda+F_1)(\lambda^2+D_2\lambda+F_2)=0$$

式中 D_1,F_1,D_2,F_2 均为实数，而扰动运动的特性取决于每个一元二次特征方程。若原四阶微分系统稳定，则对应的每一个二阶系统稳定。由 Routh - Hurwitz 稳定性准则不难得出，将等价于

$$D_1>0,\quad F_1>0,\quad D_2>0,\quad F_2>0$$

下面先回顾二阶系统的稳定特性，其标准的特征方程形式如

$$\lambda^2+2\xi\omega_n\lambda+\omega_n^2=0,\qquad \omega_n^2>0 \tag{9.10}$$

相应的微分方程模型为

$$\ddot{x}+2\xi\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=0 \tag{9.11}$$

在给定 $x(0),\dot{x}(0)$条件下求解。

模型式(9.11)可以描述许多实际物理系统的运动规律，如弹簧-振子阻尼系统、操纵飞机舵面偏转的伺服舵机等。其中 ξ,ω_n 分别称为系统的阻尼比和无阻尼自振频率。

系统特征根为

$$\lambda_{1,2}=-\xi\omega_n\pm i\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\overset{\text{def}}{=\!=}\eta+i\omega \tag{9.12}$$

可见，$\lambda_{1,2}$或为一对共轭复根，或为两个实根。通常情况两个根不相同，则微分方程式(9.11)的解为

$$x(t)=X_1e^{\lambda_1t}+X_2e^{\lambda_2t} \tag{9.13}$$

式中 X_1,X_2由 $x(0),\dot{x}(0)$确定，当 $\lambda_{1,2}$为共轭复根时，X_1,X_2必共轭。

如式(9.13)所示，当 $\lambda_{1,2}$为两个实根时，$x(t)$的运动形式为两个指数型单调运动的叠加。若 $\lambda_{1,2}$为一对共轭复根，并记 $X_{1,2}=|X_1|e^{\pm i\varphi}$，则式(9.13)可进一步写成

$$x(t)=2|X_1|e^{\eta t}\cos(\omega t+\varphi) \tag{9.14}$$

式中振幅$|X_1|$和初始相位 φ 可由 $x(0),\dot{x}(0)$确定。

总之，二阶自由振动系统的运动是由两类简单的运动叠加而成，称之为典型模态运动，每一个实特征根或每一对共轭复根都代表了一个基本模态运动。其中实特征根代表了非周期的指数型运动，而共轭复根代表了周期振荡运动。视特征根实部符号情况，每一个模态运动或为发散的，或为收敛的，不发散也不收敛时则处于临界稳定状态。发散或收敛的情况如图9.1所示。

当系统振动运动为收敛的，则所有的模态为收敛的，亦即所有的特征根具有负实部或为负实根；当振动运动为发散的，则系统有一个或一个以上的模态为发散的，亦即有一个或一个以上的特征根具有正实部或为正实根；当有一个特征根为零或一对特征根为纯虚根，而其他根为



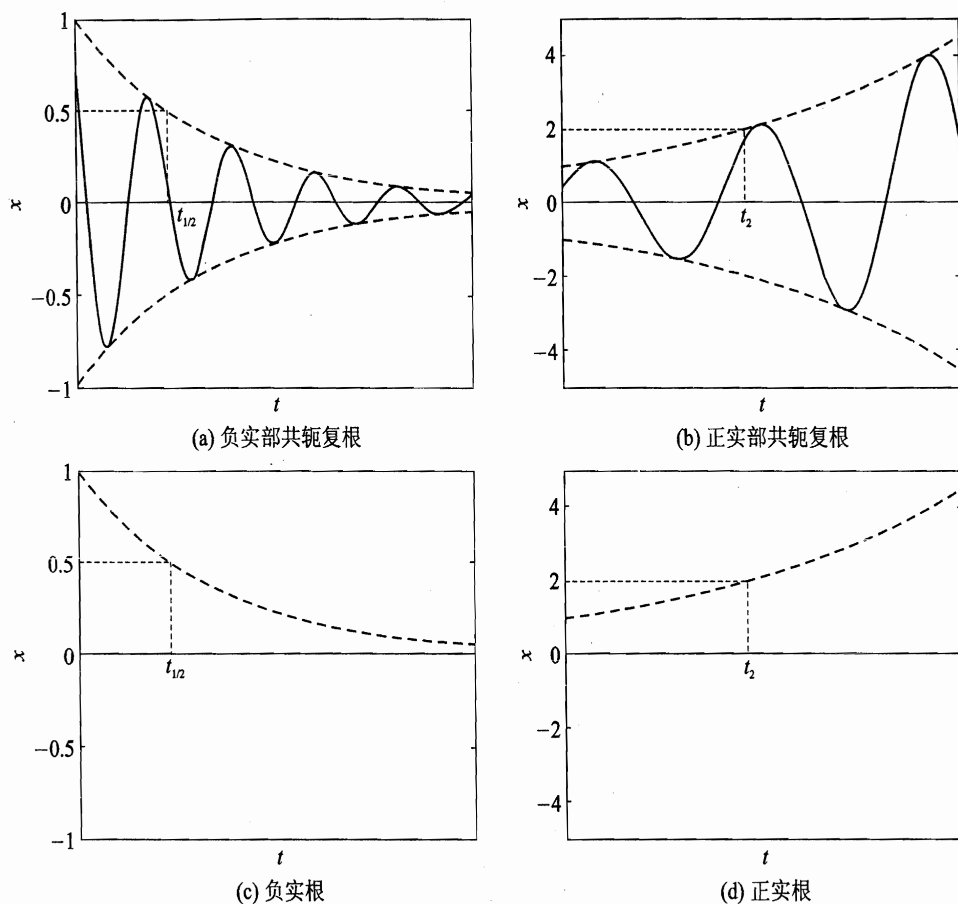


图 9.1 特征根代表的典型模态运动

收敛根，则振荡运动振幅既不收敛，也不发散。

图 9.2 示出特征根参数在复平面上的表达关系，由此容易推断当特征根在复平面上移动时导致的模态特性的变化。

当固定无阻尼自振频率 ω_n 时，随着阻尼比 ξ 变化，系统响应特性变化如表 9.2 所列。

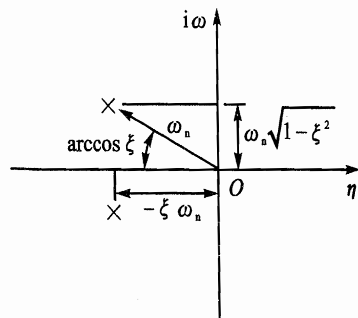


图 9.2 特征根参数关系

表 9.2 系统响应特性随阻尼比的变化

阻尼比	特征根类型	响应类型
$\xi<-1$	两个不同的正实根	指数型单调发散运动
$0>\xi>-1$	一对正实部复根	指数型谐振荡发散运动
$\xi=0$	一对纯虚根	等幅谐振荡运动
$0<\xi<1$	一对负实部复根	指数型谐振荡收敛运动(欠阻尼)
$\xi=1$	两个相同的负实根	指数型收敛运动(临界阻尼)
$\xi>1$	两个不同的负实根	指数型单调收敛运动(过阻尼)



3. 模态运动参数

描述模态运动的常用参数如下。

(1) 半衰期 $t_{1/2}$ 或倍幅时 t_2

它描述了模态运动参数变化到初始时的一半(若模态收敛)或初始时的 2 倍(若模态发散)所需要的时间。当模态运动为振荡型时,按其包络线确定,如图 9.1 所示。由式(9.13)、式(9.14)可知,若模态收敛,则由

$$e^{\lambda t_{1/2}} = \frac{1}{2} \quad 或 \quad e^{\eta t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

得

$$t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\lambda} \quad 或 \quad t_{1/2} = -\frac{\ln 2}{\eta} \tag{9.15a}$$

类似地,当模态发散时,则

$$t_2 = \frac{\ln 2}{\lambda} \quad 或 \quad t_2 = \frac{\ln 2}{\eta} \tag{9.15b}$$

近似地 $\ln 2 \approx 0.693$。可见,特征根在复平面上离虚轴越远,则不论收敛或发散都越快。

(2) 振荡频率 ω 或周期 T

对于振荡型模态,频率 ω(rad/s)表示每秒钟内振荡次数,而周期 T(s)表示振荡一周所需要的时间。由式(9.12)、式(9.14)可知

$$\left.\begin{aligned} \omega &= \omega_n \sqrt{1-\xi^2} \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \end{aligned}\right\} \tag{9.16}$$

可见,特征根在复平面上离原点越远,则振荡频率越快,周期越短。

(3) 半衰期内振荡次数 $N_{1/2}$

它表明振荡模态频率与阻尼之间的关系。其值越大,则振荡频率过高或者振荡阻尼过小。由定义得

$$N_{1/2} = \frac{t_{1/2}}{T} = \frac{\ln 2\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi} \approx 0.110\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi} \tag{9.17}$$

上述模态叠加、稳定性情况及其模态参数定义,适用于各类用线性常微分方程描述的高阶运动系统。对于纵向扰动描述为四阶方程时,当特征根为一对共轭复根 $\eta \pm i\omega$ 和两个不同实根 λ_3, λ_4 时,式(9.1)描述的扰动运动恢复规律为

$$\left.\begin{aligned} x_1(t) &= A_1 e^{\eta t} \cos(\omega t + \varphi_1) + X_{3,1} e^{\lambda_3 t} + X_{4,1} e^{\lambda_4 t} \\ &\vdots \\ x_4(t) &= A_4 e^{\eta t} \cos(\omega t + \varphi_4) + X_{3,4} e^{\lambda_3 t} + X_{4,4} e^{\lambda_4 t} \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

式中 $x_1, \cdots, x_4$ 即为纵向扰动状态量,而每一特征根相应的模态在各个状态量中的表现关系



(振荡模态振幅比例 $A_1:\cdots:A_4$、相位 $\varphi_1,\cdots,\varphi_4$ 差别和单调模态幅值比)则取决于该特征根相应的特征矢量。

9.1.3 典型的纵向运动模态

对于常规布局飞机,其模态特性呈现一定的规律,下面先看一例。

例:某型通用航空飞机,具有无后掠梯形翼,下单翼带上反。其基本参数如下:

重量 $W = 12\ 224$ N;

惯矩 $I_x = 1\ 420.9\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_y = 4\ 067.5\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_z = 4\ 786.0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_{xz} = 0\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$;

机翼面积 $S = 17.1\ \text{m}^2$,平均气动弦长 $c=1.74$ m,展长 $b = 10.18$ m;

飞机在海平面以 $Ma = 0.158$ 飞行,$C_{L*}=0.41, C_{D*}=0.05$;

迎角导数 $C_{L\alpha}=4.44, C_{D\alpha}=0.33, C_{m\alpha}=-0.683$;

速度导数 $C_{LV}=0.0,\ C_{DV}=0.0,\ C_{mV}=0.0$;

动导数 $C_{L\dot{\alpha}}=C_{z\dot{\alpha}}=0.0, C_{m\dot{\alpha}}=-4.36, C_{Lq}=-C_{zq}=3.80, C_{mq}=-9.96$;

操纵导数 $C_{L\delta_e}=-C_{z\delta_e}=0.355, C_{D\delta_e}=0.0, C_{m\delta_e}=-0.923$。

上述与角度有关的量的单位均为弧度,不计推力随速度的变化。

首先代入表 9.1 中的导数计算式,然后应用式(9.1)计算扰动运动相关矩阵。对于运动稳定性问题,仅需要其中的状态矩阵,得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -0.045\ 2 & 1.686\ 9 & 0 & -9.810\ 0 \\ -0.006\ 9 & -2.029\ 1 & 1 & 0 \\ 0.006\ 3 & -6.984\ 3 & -3.001\ 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征根分布如图 9.3 所示,模态特性如表 9.3 所列。

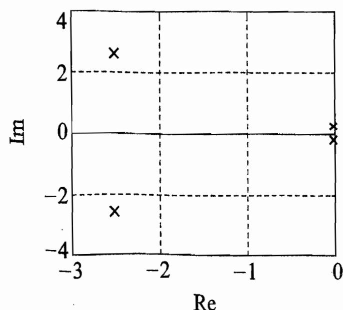


图 9.3 示例飞机纵向运动特征根分布

表 9.3 示例飞机模态特性

特征根	$t_{1/2}$/s	T/s	$N_{1/2}$/周	模态命名
-2.520 ± 2.597i	0.275	2.420	0.11	短周期模态
-0.017 ± 0.213i	40.31	29.50	1.37	长周期(沉浮)模态

由此,示例飞机纵向扰动运动具有两个模态,其中一个为周期很短、衰减快的振荡模态,称为短周期模态;另外一个为周期长、衰减慢的振荡模态,称为长周期模态(或沉浮模态)。

由式(9.14)与式(9.18)可知,除了特征根决定各模态演变的收敛/发散快慢及其振荡情况



之外，对于每一模态，各变量之间的相对大小及其相位关系取决于相应的特征矢量。

表 9.4 示出示例飞机纵向模态的特征结构，而图 9.4 则更形象地示出特征矢量图。其中对应于共轭特征根中虚部为$+i\omega$的一支，随着时间的推移，特征矢量在复平面上将以角速度ω反时针旋转，同时成指数规律收缩或伸张(取决于特征根实部)；另一支与此共轭，随着时间的推移，在复平面上以角速度ω顺时针旋转。此两支的合成形成了完整的振荡模态。另外，特征矢量仅提供状态变量的相对变化信息，所以不妨取俯仰角$\Delta\theta=1$。由于俯仰角速度有量纲，所以没有与其他参数直接比较。

表 9.4　示例飞机模态特征结构(对应于虚部为$+i\omega$的特征根)

状态变量	短周期模态特征矢量	长周期模态特征矢量
$\Delta V/V_*$	0.033+0.025i	−0.118+0.840i
$\Delta\alpha$	1.140+0.760i	0.008−0.050i
Δq	−2.521+2.596i	−0.017+0.213i
$\Delta\theta$	1	1
$(\Delta V/V_*):\Delta\alpha:\Delta\theta$	$0.042e^{37.1°i}:1.370e^{33.7°i}:1$	$0.849e^{98.0°i}:0.051e^{-80.8°i}:1$

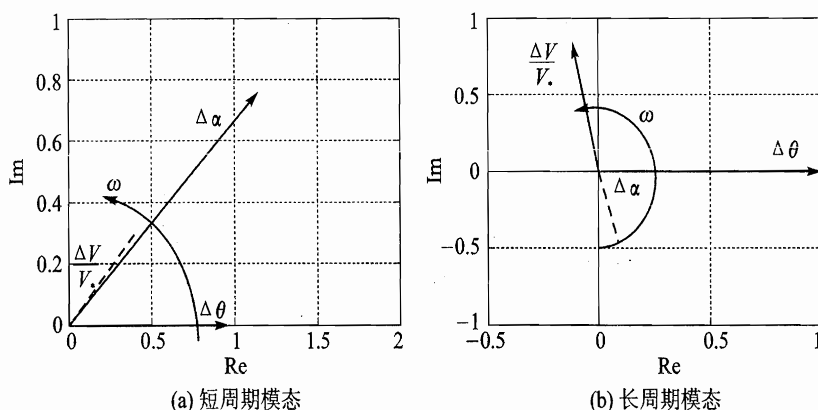


图 9.4　示例飞机特征矢量图

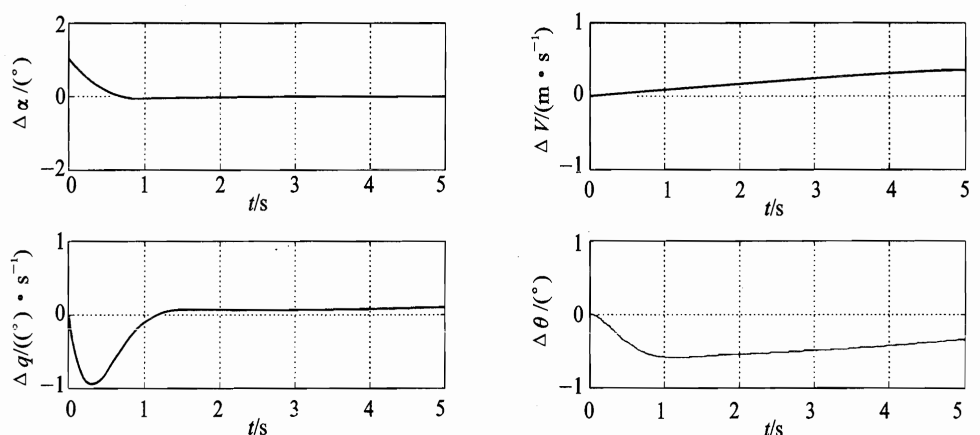
由此，在短周期模态中，速度变化较小并可以忽略，而迎角振荡的振幅和相位与俯仰角相近。另一方面，长周期模态以速度和俯仰角的变化为主，且速度相位比俯仰角大约超前 90°。

两种典型模态在示例飞机纵向扰动运动中的具体体现如图 9.5 所示。

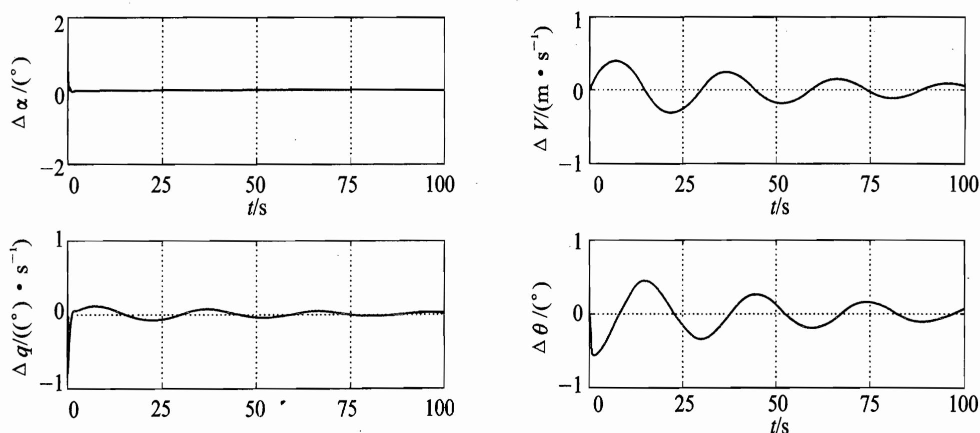
总之，飞机典型纵向扰动运动具有两个模态，其中振荡的短周期模态周期很短、衰减快。其周期和半衰期在数秒量级(有时甚至不到 1 s)，频率每秒几弧度，转动运动参数如迎角、俯仰角速度等主要呈现该短周期模态特性。受扰后恢复的瞬态过程集中在最初的几秒内，随后迎角、俯仰角速度基本恢复到未扰动的原平衡状态，故适宜在较小的时间尺度内观察。

长周期模态周期长、衰减慢。其周期和半衰期在数十秒甚至数百秒量级(有时发散、或者

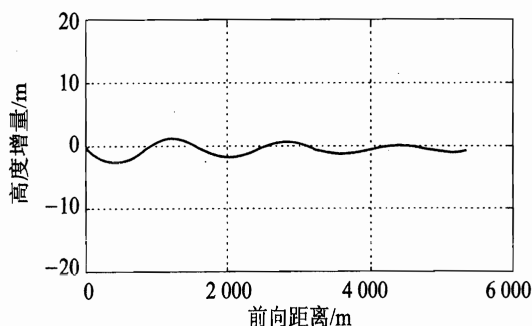
不振荡)、频率每秒零点几弧度甚至更小。质心运动速度及轨迹主要表现该模态特性,适宜在较长的时间尺度观察。在长周期时间尺度内,飞机作迎角几乎不变的上下起伏运动(如图 9.5(c)所示),故长周期模态又名“沉浮”模态。其中飞行速度相位比俯仰角大约超前 90°,速度和高度交替变化,动能和势能相互转换。



(a) 短时间尺度



(b) 长时间尺度



(c) 飞行轨迹

图 9.5 示例飞机纵向扰动运动时间历程



在受扰最初几秒(短周期表现强烈的时段),速度变化不明显。至于其他状态参数如俯仰角,则两种模态特性都有所表现,其恢复过程是两个模态的叠加。

本节示例飞机的纵向运动模态特性具有典型性。下面作进一步分析,以便了解其物理成因。

9.1.4 短周期模态分析

根据 9.1.3 节的结果,短周期模态主要表现在扰动恢复的初始阶段,且近似认为 $\Delta V \approx 0$,则根据式(9.1),并略去切向力方程,得到主要反映短周期模态特性的近似方程

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Z_\alpha & 1 \\ \overline{M}_\alpha - \overline{M}_{\dot{\alpha}} Z_\alpha & \overline{M}_q + \overline{M}_{\dot{\alpha}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \end{bmatrix} \tag{9.19}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda + Z_\alpha & -1 \\ -(\overline{M}_\alpha - \overline{M}_{\dot{\alpha}} Z_\alpha) & \lambda - (\overline{M}_q + \overline{M}_{\dot{\alpha}}) \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 - (\overline{M}_q + \overline{M}_{\dot{\alpha}} - Z_\alpha)\lambda - (\overline{M}_\alpha + \overline{M}_q Z_\alpha) = 0 \tag{9.20}$$

根据二阶系统的稳定性判定准则,如果短周期是稳定的,则上述特征方程的系数必须大于零,即

$$\left.\begin{aligned} -(\overline{M}_q + \overline{M}_{\dot{\alpha}} - Z_\alpha) > 0 \\ -(\overline{M}_\alpha + \overline{M}_q Z_\alpha) > 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.21}$$

对于一般飞机,$\overline{M}_q < 0, \overline{M}_{\dot{\alpha}} < 0, Z_\alpha > 0$,故式(9.21)第一条件自然满足。将第二条件化成无因次气动力系数形式,得

$$\left\{\bar{x} - \left[\bar{x}_{\mathrm{ac}} - \frac{C_{mq}(C_{L\alpha} + C_{D^*})}{2\mu_1 C_{L\alpha}}\right]\right\} C_{L\alpha} < 0 \tag{9.22a}$$

因为 $C_{L\alpha} \gg C_{D^*}$,或者说不计推力在升力方向的分量(正如推导式(7.66)所作的假设),则得到临界条件

$$(\bar{x} - \bar{x}_{\mathrm{m}}) C_{L\alpha} < 0 \tag{9.22b}$$

式中 $\mu_1 = 2m/\rho Sc$ 为飞机的相对密度;$\bar{x}_{\mathrm{m}} = \bar{x}_{\mathrm{ac}} - C_{mq}/(2\mu_1)$ 为飞机的握杆机动点。

由上式,当飞机的质心位于握杆机动点之前,即 $\bar{x} < \bar{x}_{\mathrm{m}}$ 时,纵向短周期运动稳定;否则,若 $\bar{x} > \bar{x}_{\mathrm{m}}$,飞机的纵向短周期运动不稳定。握杆机动点可作为飞机短周期运动稳定性的判据。

根据式(9.11)、式(9.12),短周期模态近似频率和阻尼比为

$$\left.\begin{aligned} \omega_{\mathrm{n.sp}} &= \sqrt{-(\overline{M}_\alpha + \overline{M}_q Z_\alpha)} \\ \xi_{\mathrm{sp}} &= -\frac{\overline{M}_q + \overline{M}_{\dot{\alpha}} - Z_\alpha}{2\omega_{\mathrm{n.sp}}} \end{aligned}\right\} \tag{9.23}$$

例: 飞机及其状态同 9.1.3 节。按照式(9.23),得到

$$\omega_{\mathrm{n.sp}} = \sqrt{-(-8.8) + (-2.05)(-2.02)}\,\mathrm{rad/s} = 3.60\ \mathrm{rad/s}$$

$$\xi_{sp}=-\frac{(-2.05)+(-0.88)+(-2.02)}{2(3.60)}=0.69$$

$$\lambda_{sp}=-\xi_{sp}\omega_{n.sp}\pm i\omega_{n.sp}\sqrt{1-\xi_{sp}^2}=-2.48\pm 2.61i$$

相应的模态参数：$t_{1/2}=0.278$ s，$T=2.407$ s。与按四阶方程得到的结果相比(见表 9.3)，二者误差不到 1 %。

可见，式(9.19)～式 (9.23)能够比较准确地反映短周期模态的参数规律。对于具有正常纵向静稳定性的飞机，$\overline{M}_\alpha<0$ 实际上提供了纵向受扰动后振荡型转动运动中的主要"恢复"力矩源，其值的大小将首先影响振荡频率(注意这里俯仰导数均已除了俯仰惯矩 I_y)；而 $\overline{M}_q+\overline{M}_{\dot\alpha}<0$ 提供了受扰动后振荡型转动运动中的主要阻尼力矩源(能量衰减因素)。此外，垂直平动运动对短周期模态也有影响(通过 $\overline{Z}_\alpha$ 项改变迎角的变化规律)。

当飞机作超声速飞行时，相对于同高度亚声速飞行，由于 Ma 值的增加，短周期模态频率将明显增大；但由于俯仰阻尼作用的减弱，则短周期阻尼比趋于下降。特别地，高空超声速飞行由于飞机气动惯性比的下降，经常出现短周期动态特性变差的问题。图 9.6 示出了一架超声速战斗机的具体特性。

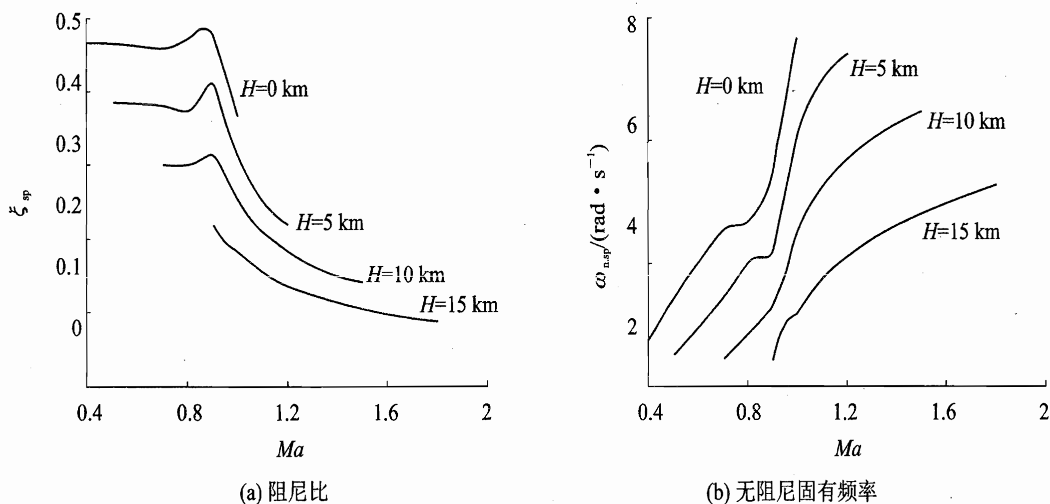


图 9.6　某战斗机纵向短周期模态的高度速度特性

如果短周期特性不理想，可以通过调整飞机重心、改变平尾容积等总体设计措施进行改善。但对于飞行包线范围较宽大的飞机，较好的解决方法是通过使用反馈控制器。

9.1.5　长周期模态分析

长周期模态表现时间较长，其中可以认为迎角和飞行法向速度已恢复为未扰动平衡状态值。根据式(9.1)，由切向力和法向力方程，且近似认为 $\Delta\alpha\approx 0$，则反映长周期模态特性的近似方程可写为



$$\begin{bmatrix}\Delta\dot{V}\\ \Delta\dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_V & -g\\ Z_V & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta V\\ \Delta\theta\end{bmatrix} \tag{9.24}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-X_V & g\\ -Z_V & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-X_V\lambda+Z_Vg=0 \tag{9.25}$$

长周期模态近似频率和阻尼比为

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\text{n.p}}&=\sqrt{Z_Vg}\\ \xi_{\text{p}}&=\frac{-X_V}{2\omega_{\text{n.p}}}\end{aligned}\right\} \tag{9.26}$$

由表 9.1,当不考虑压缩性的影响和推力随速度的变化时,则

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\text{n.p}}&=\sqrt{2}\,\frac{g}{V_*}\\ \xi_{\text{p}}&=\frac{1}{\sqrt{2}(C_L/C_D)_*}\end{aligned}\right\} \tag{9.27}$$

另外,若认为长周期(沉浮)运动为动能和势能持续交换的等机械能运动,则

$$\frac{1}{2}mV_*^2=\frac{1}{2}mV^2+mg\Delta H=\text{常数}$$

若未扰动和扰动按长周期模态恢复时升力系数相同(假设迎角扰动已恢复),并考虑上式扰动速度 V 变化规律,则扰动时升力可表达为

$$L=mg-\rho g(\Delta H)SC_{L*}$$

高度方向动力学方程可写为

$$m\Delta\ddot{H}=L\cos\Delta\gamma_{\text{w}}-mg\approx L-mg$$

将上述升力 L 公式代入后,得

$$\Delta\ddot{H}+\left(\frac{\rho gSC_{L*}}{m}\right)\Delta H=\Delta\ddot{H}+\omega_{\text{n.p}}^2\Delta H=0 \tag{9.28}$$

其中,动能和势能交换振荡运动的频率为

$$\omega_{\text{n.p}}=\sqrt{\frac{\rho gSC_{L*}}{m}}=\sqrt{2}\,\frac{g}{V_*} \tag{9.29}$$

这一结果与式(9.27)频率相同,但按机械能守恒假设,无法估计长周期阻尼比。

上述简化进一步说明形成长周期模态的物理机制。飞机纵向受扰后,力矩平衡能较快恢复。而微弱的不平衡力将要持续较长时间,如图 9.7 所示。当升力增加时,飞机将出现不大的向上法向加速度 a_n,航迹便和缓地上弯,使 $\Delta\dot{\gamma}>0$;同时,重力在航迹切向的分量使切向加速度向后,$a_\tau<0$,速度减少,因而升力下降。当升力下降到小于重力在升力方向的分量时,$\Delta\dot{\gamma}<0$,航迹转向下弯。当 $\Delta\gamma<0$ 时,重力的分量又使飞机增速,升力逐渐加大。当升力大于重力在



升力方向的分量时，$\Delta\gamma$ 又逐渐增加。如此反复，形成速度、俯仰角及高度变化的长周期振荡。这一振动的阻尼与$(T_V - D_V)/m$ 等多种参数有关，且数值通常较小，故收敛和发散都较和缓，驾驶员易于控制。

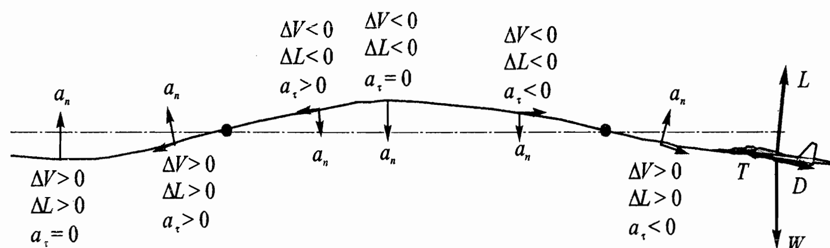


图 9.7 长周期模态的运动背景

例：飞机及其状态同 9.1.3 节。按照式(9.27)，得到

$$\omega_{n.p} = \sqrt{2}\,\frac{9.8}{53.6}\ \text{rad/s} = 0.26\ \text{rad/s}$$

$$\xi_p = \frac{1}{\sqrt{2}(0.41/0.05)} = 0.086$$

$$\lambda_p = -\xi_p\omega_{n.p} \pm i\omega_{n.p}\sqrt{1-\xi_p^2} = -0.022 \pm 0.259i$$

相应的模态参数：$t_{1/2}=31.4$ s，$T=24.3$ s。与按四阶方程得到的结果相比(见表 9.3)，二者误差分别为 22 %和 18 %。

虽然还有其他的长周期近似方法，但精度都明显低于短周期模态近似。其原因是前述的长周期模态为“弱”模态属性，受许多小量的影响，一旦进行简化必然导致明显的误差。但无论如何，式(9.24) ～式 (9.27)及式(9.29)仍反映了长周期模态的主要特点。其振荡周期主要受当前飞行速度影响，而振荡的衰减情况则与$(T_V - D_V)/m$ 等多种参数有关。随着飞行条件(如高度、速度)的变化，长周期模态的特性将有明显变化。另外，飞行轨迹角 γ_* 对长周期模态也有明显影响，而短周期受此参数影响则较小。特别还要注意，随飞行条件的变化，长周期模态经常还可能变成不稳定的或蜕变成非振荡模态。

若长周期模态衰减特性不满意，则一般仅通过气动、总体等方法进行调节比较困难，或者可能导致飞行性能的明显下降。当对此模态有较高的要求时，可以考虑应用反馈控制方法予以改善。

9.1.6 现代飞机纵向模态特点

现代飞机的飞行范围大，构形变化丰富，从而有更多的模态特性。特别是随着航空技术的发展，自动控制技术在飞机设计中得到广泛的应用，从而给设计师提供了更多的自由度，并可



能设计出更优越的飞机。

从飞行动力学的观点，随着自动器的引入，至少可以带来以下好处：

- 不必要强调提供自然静稳定性（放宽静稳定性设计），因而可以使用更小的尾翼使飞行性能得到改善；
- 可以设计出在全飞行包线内具有一致满意度的动态特性，这是仅靠气动、总体设计难以达到的；
- 可以使飞机飞行更舒适、安全；
- 更进一步地，自动器可以提供更多的操纵响应类型，满足不同飞行阶段、不同飞行任务的需要。

换言之，现代飞机的飞行动力学特性已较过去大大丰富。

本节着重讨论随着静稳定性的放松，飞机纵向自然模态变化的特点。关于相应的自动控制律设计问题，在 9.3 节讨论；第 11 章将结合空间机动飞行对自动器的其他特点进行扼要介绍。

常规具有纵向静稳定性的飞机，通常具有明显的短周期和长周期模态。图 9.8 所示为一架现代高性能战斗机低速飞行时随重心变化的纵向模态根轨迹。在前重心位置具有正常的静稳定余度 $K_n=7.6\ \%$，此时具有常规模态特性。当重心后移静余度减少后，由式(9.23)可知，短周期频率将下降，而阻尼 $\xi_{sp}\omega_{n.sp}$ 几乎不变。图 9.8(a)证实了这一点。与此同时，长周期模态振荡复根随静余度下降亦逐渐向实轴靠拢，如图 9.8(b)所示。当静稳定性接近中立时，模态特性发生明显的变化；在静稳定余度 $K_n=-0.4\ \%$时，长、短周期特征根均蜕化成实根，且其中一个长周期根不稳定。随着静余度继续下降，一个长周期和一个短周期根互相靠拢，在 $K_n=-1.4\ \%$时，重新耦合为一组新的阻尼比和频率都很低的振荡模态根（常成为第三振荡模态）；另一个原短周期根向负实轴发展，而另一个原长周期根向正实轴发展，在 $K_n=-7.4\ \%$ 的后重心位置时，已演变为 1.25 的大正实根（相应的倍幅时间不到 0.6 s），运动迅速发散。

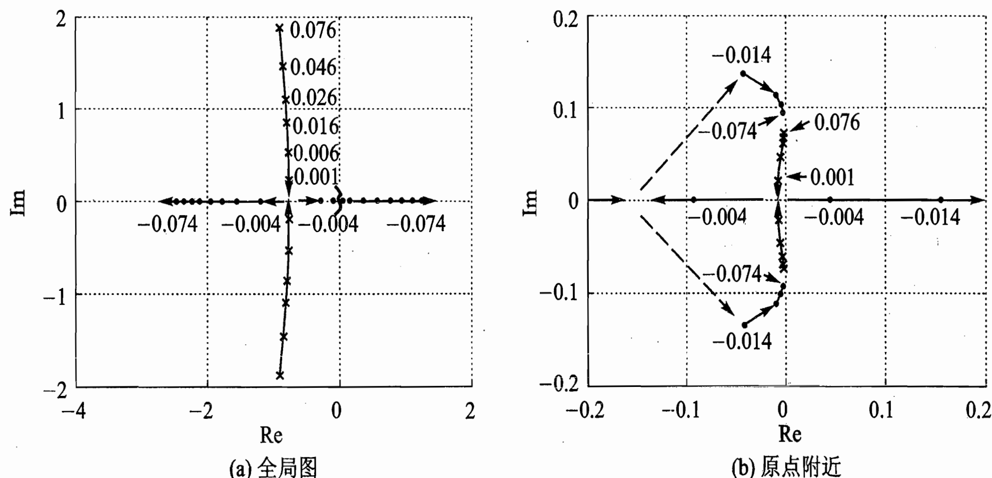


图 9.8　随重心调节（静余度 K_n 变化）纵向运动根轨迹



可见，现代飞机从提高飞行性能的角度，广泛采用了纵向放宽静稳定性设计，但其纵向自然模态是不能满足飞行需要的，必须进行人工增稳。

稳定性边界从 Routh - Hurwitz 判据可以得出。展开式(9.6)，实特征根稳定要求常数项为正，即

$$b_4 = g(Z_\alpha \overline{M}_V - Z_V \overline{M}_\alpha) > 0 \tag{9.30}$$

临界稳定时取等号。用无因次气动导数替换，该稳定性条件等价于

$$C_{m\alpha}(C_{LV} + 2C_{L^*}) - C_{mV}(C_{L\alpha} + C_{D^*}) < 0 \tag{9.31}$$

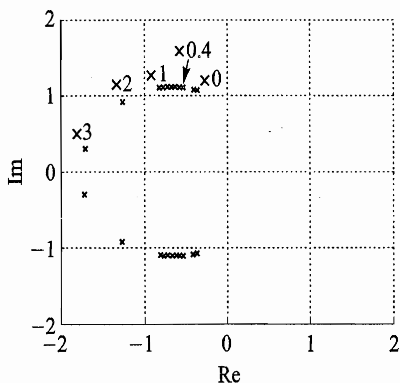


图 9.9　短周期根随俯仰阻尼导数的变化
(乘因子为对原 $C_{mq}+C_{m\dot{\alpha}}$ 的缩放)

当不考虑压缩性和动力系统对稳定性的影响时，则此稳定性要求简化成纵向静稳定性要求

$$C_{m\alpha} < 0 \tag{9.32}$$

否则，式(9.31)更准确。

另外，为了充分发挥纵向放宽静稳定性的作用，在设计上更多的是采用减少平尾容积的方法，因而将导致俯仰阻尼等参数减少。图 9.9 示出了随($C_{mq}+C_{m\dot{\alpha}}$)变化对短周期模态特性的影响，相应的静余度为 $K_n=0.026$ 的正常范围。可见，当俯仰阻尼导数值较大时，随其减少导致短周期阻尼比下降，而频率的变化相对较小；当俯仰阻尼导数值较小时，随其减少导致短周期阻尼比和频率的变化均较明显，共同作用的结果是阻尼 $\xi_{sp}\omega_{n.sp}$(特征根实部)逐渐下降，参见式(9.23)。

9.2　飞机纵向动操纵性

系统对输入的响应特性评价，一般包括稳态增量特性和瞬态特性。飞机对驾驶杆的操纵输入响应特性也同样可以分为所谓静操纵性和动操纵性。静操纵性指施加操纵输入指令后参数的稳态增量与操纵指令之比值的关系，前面讨论的舵偏角平衡曲线梯度($\Delta\delta_e/\Delta V$)、驾驶杆力梯度($\Delta P_e/\Delta V$)、每 g 舵偏角($\Delta\delta_e/\Delta n_n$)、每 g 驾驶杆力($\Delta P_e/\Delta n_n$)等都是纵向静操纵性指标。动操纵性则指驾驶员操纵驾驶杆后飞机响应的动态特性，如超调量、振荡情况和达到新的稳定状态所需时间等。对响应特性的评价指标可以在时域内要求，也可以在频域内提出。

另一方面，无自动器的飞机对驾驶杆的操纵输入响应，包括驾驶杆输入后舵面的偏转响应和飞机各状态参数对舵面偏转的响应两个动力学环节；而对于带自动器飞机，则包括其他更多的动力学环节和结构形式。

对于可以用线性常微分方程描述的系统，对任何复杂操纵输入的响应都可以分解为对简单操纵输入(如阶跃、脉冲和谐波等信号)响应的叠加。



本节首先介绍常用的时域响应指标，然后简单介绍飞机操纵系统及其动力学建模特点，最后分析飞机对升降舵输入的开环操纵响应规律。

9.2.1　时域响应指标

图 9.10 为系统初始状态静止时对单位阶跃输入的响应曲线，其纵坐标按稳态响应值正则化，定义响应指标如下。

延迟时间 t_d：响应曲线第一次达到稳态值的一半所需的时间。

上升时间 t_r：响应曲线从稳态值的 10 %上升到 90 %(或从 5 %上升到 95 %，或从 0 上升到 100 %)所需的时间。

峰值时间 t_p：响应曲线达到超调量的第一个峰值所需的时间。

最大超调量 M_p：响应曲线的最大值与稳态值之差，用百分比表示定义为

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

调节时间 t_s：达到该时间后，响应曲线将保持在稳态值附近的一个允许误差范围内(通常取±5 %或±2 %)。

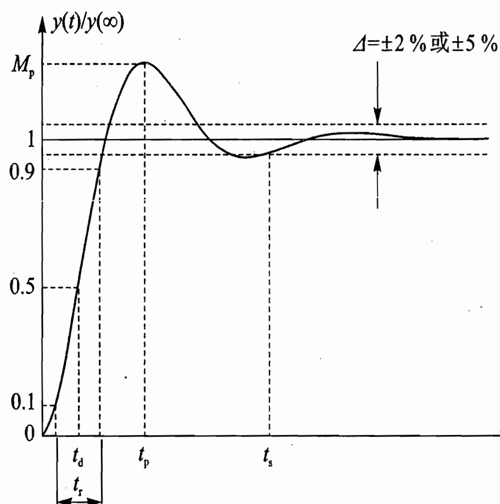


图 9.10　单位阶跃输入响应曲线

应当指出，这些性能指标，并非在任何情况下都必须全部采用。如过阻尼系统，其瞬态响应不出现超调现象，就无须采用峰值时间和最大超调量指标。

对于二阶欠阻尼系统：

$$\frac{y(s)}{r(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} \tag{9.33}$$

其中 $0<\xi<1$。在零初始条件下，对于单位阶跃输入响应为



$$
\left.\begin{aligned}
y(t) &= 1-\frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t+\varphi\right)\\
\varphi &= \arctan\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}
\end{aligned}\right\} \tag{9.34}
$$

可以推出其指标如下。

上升时间(从 0 上升到稳态值的 100 %)：

$$
t_r = \frac{\pi-\varphi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \tag{9.35}
$$

峰值时间：

$$
t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \tag{9.36}
$$

最大超调量：

$$
M_p = e^{-(\xi/\sqrt{1-\xi^2})\pi} \tag{9.37}
$$

调节时间：

$$
t_s \approx \begin{cases} 4/(\xi\omega_n) & (\text{按}\pm 2\ \%\ \text{的误差带}) \\ 3/(\xi\omega_n) & (\text{按}\pm 5\ \%\ \text{的误差带}) \end{cases} \tag{9.38}
$$

上述指标均属于动态指标。另外，控制精确度是系统的稳态响应性能指标。对于稳定的控制系统，一般是根据阶跃、斜坡或抛物线输入所引起的稳态误差来衡量。

定义阶跃响应稳态误差 e_{ss} 为输出稳态值与阶跃幅值的相对差，即

$$
e_{ss} = \frac{y(\infty)-r(\infty)}{r(\infty)}
$$

9.2.2 飞行操纵系统

飞机飞行操纵系统有不同的种类，经历了不同的阶段而逐渐发展。早期驾驶杆(驾驶盘或脚蹬)和操纵舵面之间直接通过机械方式(杆或钢索)连接，属于完全人力操纵方式；20 世纪 40 年代开始采用气动卸载的方法(例如随动调整片)，或者通过增加一个在操纵连杆上起作用的液压助力器卸去大部分载荷，属于部分人力操纵方式，帮助驾驶员克服随着飞行速度和飞机的尺寸增加而大大增加的铰链力矩；50 年代以后，则可以完全通过由助力器来补偿舵面上的铰链力矩，即属于完全助力操纵方式。此时由载荷机构提供人工感觉，在驾驶杆和助力器的调节阀之间仍存在机械连接，从舵面到驾驶杆没有力的反馈，因而驾驶杆位置不受舵面的影响，也称之为无回力操纵方式。

此后的阶段发展迅速，进入了自动飞行控制时代。为了改进飞机的固有特性，采用了增稳器和阻尼器，以解决飞行范围扩大到高空、超声速后，仅靠气动、总体设计难以克服的困难。其中敏感元件感受飞机当前的状态参数，通过滤波、比较和放大后，作为电信号-机械位移转换装



置的舵机的输入信号，并推动助力器工作，最终改变飞机舵面的偏转角，改变飞行特性。与此同时，驾驶杆与助力器之间仍有机械连接。采用自动器后，要考虑到仪表设备(计算机、传感器等)的可靠性问题。因此从飞机安全的角度，增稳和阻尼系统的功能受到限制，更多的只是从辅助的角度改进了飞机的固有特性，而不是根本改变已知的动态特性，如图 9.11 所示。

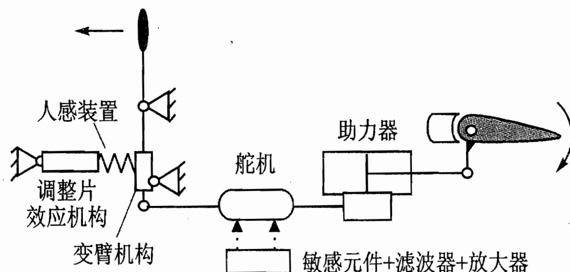


图 9.11　增稳器、阻尼器

图 9.12 表示飞行操纵(或控制)系统的又一发展阶段，即从电气-机械系统过渡到由纯电信号传输的控制系统，所谓电传操纵系统。这种系统有结构简单、灵活性大等优点。最初这类系统还有一套机械备份系统，以便当电传通道发生故障时飞行员可以应急使用。随后的发展则是通过余度技术，取消机械备份，并进入主动控制阶段。在这里由计算机来决定操纵面的偏转，系统的功能没有受到限制。通过采用适当的控制或调节规律可使飞机的动态特性在一定程度内发生变化。

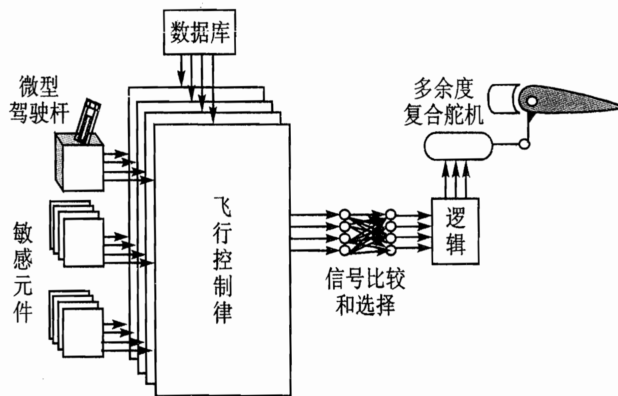


图 9.12　多余度电传操纵系统

操纵系统的动力学特性对飞机的操纵响应的影响不容忽视。但对于操纵系统的动力学模型，将与具体的操纵系统形式有关。

以现代飞机主操纵系统常用的舵机为例。作为传动机构，舵机将驾驶员的指令信号和敏感元件输出信号，转化为机械位移来偏转操纵舵面。大多数情况下，从舵机输出端引出位移或速度反馈信号，以改善舵机工作的动态特性，形成舵机回路。其结构原理图如图 9.13 所示。



根据供给舵机的能源不同来分，目前常见的有两种，即液压舵机和电液舵机。

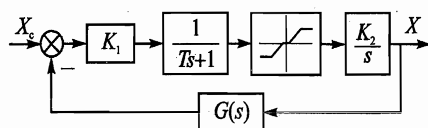


图 9.13 舵机回路结构图

图 9.13 中，具体的反馈形式确定了传递函数 $G(s)$，且初步分析时可以忽略其中非线性因素，令 $K=K_1K_2$，可以得到舵机回路的闭环传递函数如下。

(1) 位置反馈舵机回路

此时，$G(s)=1$，闭环回路传递函数为

$$G_\delta(s)=\frac{X(s)}{X_c(s)}=\frac{1}{T_\delta^2 s^2+2\xi_\delta T_\delta s+1} \tag{9.39}$$

式中

$$T_\delta=\sqrt{\frac{K}{T}},\qquad \xi_\delta=\frac{1}{2\sqrt{TK}}$$

舵机的带宽 $\omega_\delta=1/T_\delta$ 越大，则舵机对动态响应的影响越小。其上限需考虑回路稳定性要求。

(2) 速度反馈舵机回路

此时，$G(s)=s$，闭环回路传递函数为

$$G_\delta(s)=\frac{X(s)}{X_c(s)}=\frac{K_\delta}{s(T_\delta s+1)} \tag{9.40}$$

式中

$$T_\delta=\frac{T}{K+1},\qquad K_\delta=\frac{K}{K+1}\approx 1$$

(3) 均衡反馈舵机回路

此时，

$$G(s)=\frac{T_f s}{T_f s+1}$$

闭环回路传递函数为

$$G_\delta(s)=\frac{X(s)}{X_c(s)}=\frac{1+T_f s}{T_f s}\frac{1}{\frac{T_f}{K}s^2+\frac{T+T_f}{KT_f}s+1+\frac{1}{KT_f}}\approx$$

$$\frac{1+T_f s}{T_f s}\frac{1}{T_\delta^2 s^2+2\xi_\delta T_\delta s+1} \tag{9.41}$$

其中，考虑了 $T_f\gg T$，$KT_f\gg 1$，并且 T_δ，ξ_δ 同式(9.39)。于是，在 $\omega<1/T_f$ 的低频范围内，均衡舵机回路具有速度反馈舵机回路的作用；在 $\omega>1/T_f$ 的高频范围内，则具有位置反馈舵机回路的作用。

可见，不同的舵机回路特性，为飞行自动控制器提供了不同的控制规律。至于助力器数学模型，可以作为舵机回路的特例，简化为

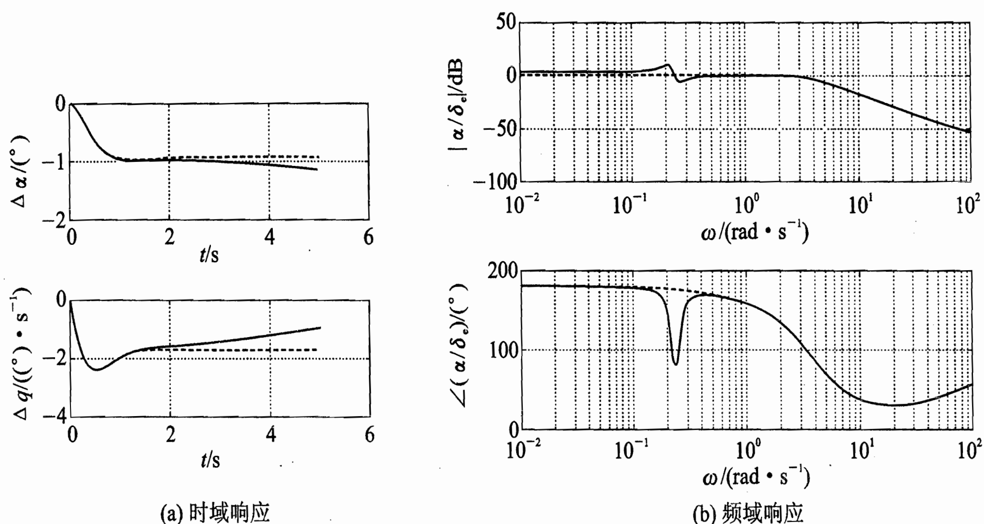


图 9.14 示例飞机升降舵操纵响应(实线：四阶模型；虚线：短周期近似模型；$\Delta\delta_e=1°$)

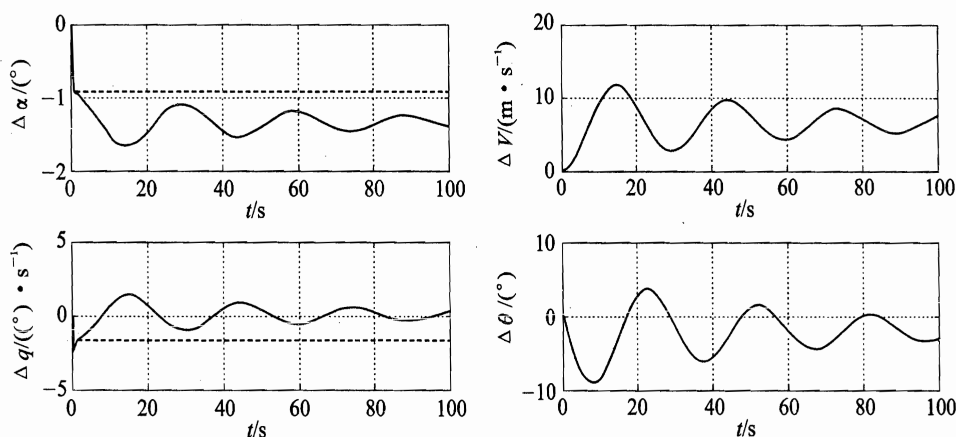


图 9.15 示例飞机升降舵操纵响应(实线：四阶模型；虚线：短周期近似模型；$\Delta\delta_e=1°$)

$$\Delta\ddot{\alpha}-(\overline{M}_q+\overline{M}_{\dot{\alpha}}-Z_\alpha)\Delta\dot{\alpha}-(\overline{M}_\alpha+\overline{M}_q Z_\alpha)\Delta\alpha=$$

$$\Delta\ddot{\alpha}+2\xi_{sp}\omega_{n.sp}\Delta\dot{\alpha}+\omega_{n.sp}^2\Delta\alpha=\overline{M}_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{9.46}$$

对照式(9.33)、式(9.34)，在 $0<\xi_{sp}<1$ 和零初始条件下，阶跃偏转升降舵 $\Delta\delta_e$ 后：

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\alpha(t)=\frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\omega_{n.sp}^2}\left[1-\frac{e^{-\xi_{sp}\omega_{n.sp}t}}{\sqrt{1-\xi_{sp}^2}}\sin\left(\omega_{n.sp}\sqrt{1-\xi_{sp}^2}\,t+\varphi_\alpha\right)\right]\Delta\delta_e\\&\varphi_\alpha=\arctan\frac{\sqrt{1-\xi_{sp}^2}}{\xi_{sp}}\end{aligned}\right\} \tag{9.47}$$

在短周期时间尺度内，过载增量为



$$\Delta n_{\mathrm{n}}(t) \approx \frac{\Delta L}{mg} \approx \frac{V_* Z_\alpha}{g} \frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\omega_{\mathrm{n.sp}}^2}\left[1-\frac{\mathrm{e}-\xi_{\mathrm{sp}}\omega_{\mathrm{n.sp}}t}{\sqrt{1-\xi_{\mathrm{sp}}^2}}\sin\left(\omega_{\mathrm{n.sp}}\sqrt{1-\xi_{\mathrm{sp}}^2}t+\varphi_\alpha\right)\right]\Delta\delta_e \quad (9.48)$$

其稳态值为

$$\Delta n_{\mathrm{n}}(\infty) = \frac{V_* Z_\alpha}{g} \frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\omega_{\mathrm{n.sp}}^2}\Delta\delta_e \quad (9.49)$$

化成无因次气动导数形式后，得

$$\frac{\Delta\delta_e}{\Delta n_{\mathrm{n}}(\infty)} = -\frac{C_{L*}}{C_{m\delta_e}}\left(\frac{\partial C_m}{\partial C_L}+\frac{C_{mq}}{2\mu_1}\right) \quad (9.50)$$

这正是式(7.65)按拉升运动得到的静操纵性指标。

需要注意的是，当对于飞机纵向放宽静稳定性，并且飞机具有接近中立的静不稳定度时，上述按短周期近似所得的结果将导致较大的低频响应误差，如图9.16所示。其中飞机的数据同9.1.6节示例。图9.16(a)、图9.16(b)分别对应于静稳定余量$K_n=-0.42\ \%$和$K_n=-7.42\ \%$时的结果。可见，图9.16(a)具有明显的低频差异，而图9.16(b)类似于静稳定时，对于迎角响应误差比较集中(但此时模态不再按长、短划分)。无论如何，对于放宽静稳定性的飞机，使用二阶近似模型进行操纵稳定性分析和进一步的飞行控制器设计时必须谨慎，应该尽量使用四阶模型。

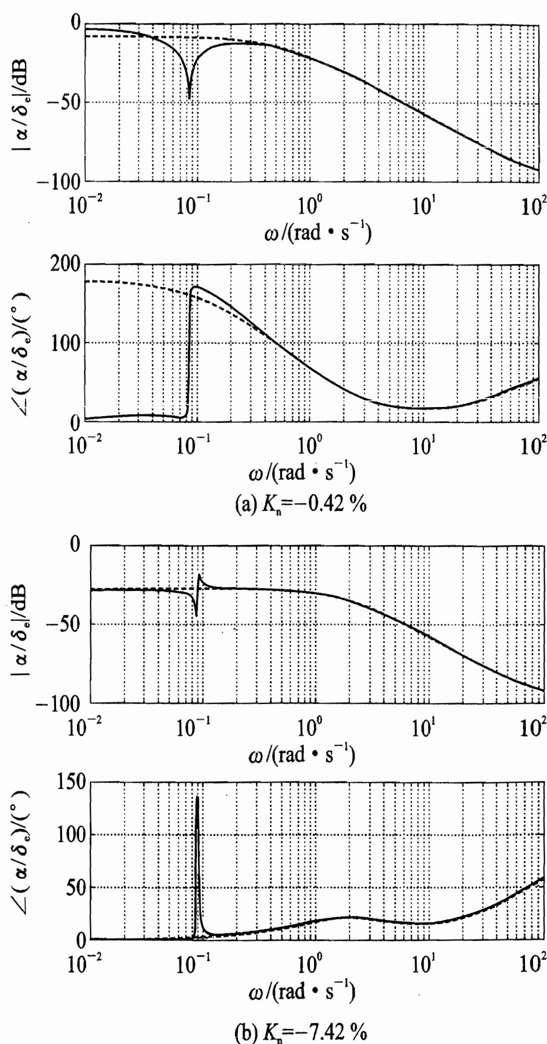


图9.16　放宽静稳定性后迎角对升降舵操纵频率响应
(实线：四阶模型;虚线：短周期近似模型)

对于俯仰操纵响应，还须注意到操纵升降舵后飞行轨迹的变化情况，如图9.17所示。可以看到，操纵升降舵后，首先导致俯仰力矩的变化，从而俯仰姿态发生改变，并由此导致迎角和升、阻力的变化，最终使得飞行轨迹改变。由于常规飞机的这种外力变化机理，轨迹相对于姿态的变化有明显的滞后时间t_d。若按式(9.43)、式(9.45)，并忽略操纵力导数Z_{δ_e}，可得

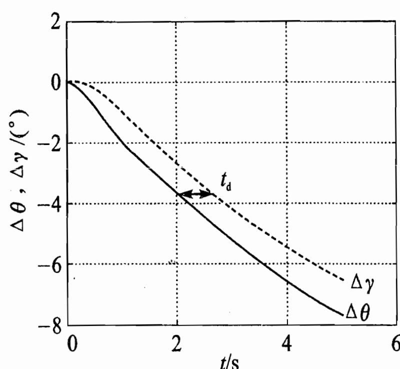


图 9.17　轨迹响应相对于姿态的滞后

$$\frac{\gamma(s)}{\theta(s)}=\frac{Z_\alpha}{s+Z_\alpha}=\frac{1}{t_d s+1} \tag{9.51}$$

轨迹延迟时间为

$$t_d=1/Z_\alpha \tag{9.52}$$

上述飞行轨迹变化的滞后是由于常规飞机的受力特点所决定的内在属性，不会因为增稳控制等的引入而改变。

最后通过示例说明飞机对油门响应的特点。

例： 某型通用航空飞机，数据同 9.1.3 节示例。初始为平衡飞行，增大油门后推力增量为 0.05 W，其中推力通过飞机重心（不引起附加力矩），并且不考虑发动机响应动力学。飞机的时域响应如图 9.18 所示。显然飞机运动主要表现出长周期模态特性，速度首先增大，并按沉浮特性缓慢衰减至初始未扰动之值；迎角的变化较小；轨迹角最终趋于增大的稳态增量 $\Delta\gamma_{ss}>0$。当发动机推力线不经过飞机重心时，则 $\Delta\gamma_{ss}\neq0$，且 $\Delta\alpha_{ss}\neq0$。至于发动机响应动力学的影响，主要改变最初几秒飞机的响应。在这里，以长周期模态为主要特征的运动，其作用可以不计。

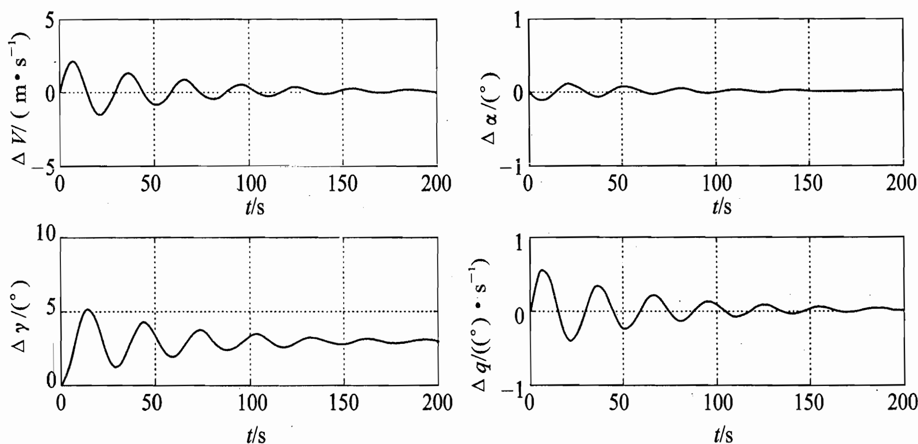


图 9.18　示例飞机对油门操纵响应（推力线过飞机重心）

9.3　带自动器飞机的纵向操纵性和稳定性特性

早在 20 世纪初，为了减轻驾驶员负担，实现精确控制，就考虑采用自动控制装置来替代驾驶员的部分工作，由此各类型的自动驾驶仪相继出现。随着飞机性能的不断提高和飞行任务的不断复杂，特别是大高度、远航程的运输机和高速、高机动战斗机的出现，为保证飞机具有良好的飞行性能和飞行品质，对于控制器的要求也愈趋复杂。从功能上划分，可以将飞行自动控



制器分为以下几类。

- 自动驾驶仪：其功能为控制飞机在空间的姿态和轨迹；
- 阻尼器、增稳器：主要用于改善飞机的稳定性；
- 控制增稳系统：能够同时改善飞机的稳定性和操纵性，使全飞行包线范围内的飞行品质满足要求；
- 电传操纵系统：采用主动控制技术，从而极大地改善了飞机的性能，甚至改变了飞机的运动模式；
- 综合控制系统：将飞行控制系统与火力、推进、航电等控制系统进行有机交联，能够充分发挥飞机作为空中武器平台的作用，极大提高其作战效能。

从飞行力学角度看，复杂的飞行控制系统的最终效果只是偏转各类操纵机构（如气动舵面），以改变飞机运动特性。因此，从物理上定性分析飞行控制系统的作用时，常用某些简单的代数关系式来代替整个飞控系统，即所谓理想自动器假设。

具体来说，设 y 为飞机的某个运动参数，δ 为某个操纵机构偏转角度。理想自动器调节规律可以写成

$$\Delta\delta = K\Delta y$$

式中 K 为自动器增益系数，也就是说整个自动器用线性放大器替代。飞机上将增加的附加气动力或气动力矩为

$$\Delta M = M_\delta \Delta\delta = KM_\delta \Delta y$$

附加气动导数增量为

$$\Delta M_y = KM_\delta$$

可见，采用理想自动器模型可以初步认识其功能。

本节具体举例介绍常用纵向自动器对飞机操纵稳定性的改善或提高特点。

9.3.1 俯仰阻尼器

飞机使用俯仰阻尼器是为了改善短周期模态的阻尼特性。图 9.19 为此类自动器的工作原理图，其中角速度传感器感受到俯仰角速度信号后，经过放大作为舵机移动信号，并通过助力器带动舵面朝着阻止飞机转动的方向偏转。例如当飞机产生机头上仰的角速度时，阻尼器工作的结果让升降舵（平尾）下偏，产生阻止机头上仰的气动力矩，其效果相当于加大了平尾俯仰阻尼力矩。

如果按照理想控制器分析，即不考虑阻尼器中舵机、助力器等元件本身动态特性的影响，可得升降舵（平尾）偏角与俯仰角速度之间的关系（即控制方程）如下

$$\Delta\delta_e = K_q q \tag{9.53}$$

式中 K_q 为俯仰角速度对升降舵（平尾）偏度的反馈增益，$K_q>0$。附加气动阻尼导数增量为

$$\Delta M_q = K_q M_{\delta_e} \tag{9.54}$$



由式(9.23)可知，这一般将会提高飞机的短周期阻尼比和无阻尼自振频率。

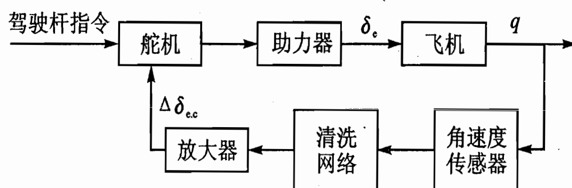


图 9.19　俯仰阻尼器结构图

随 K_q变化的根轨迹示例如图 9.20 所示，可见，不太大的反馈增益就可以明显改善短周期阻尼比，而长周期模态特性相对变化较慢。

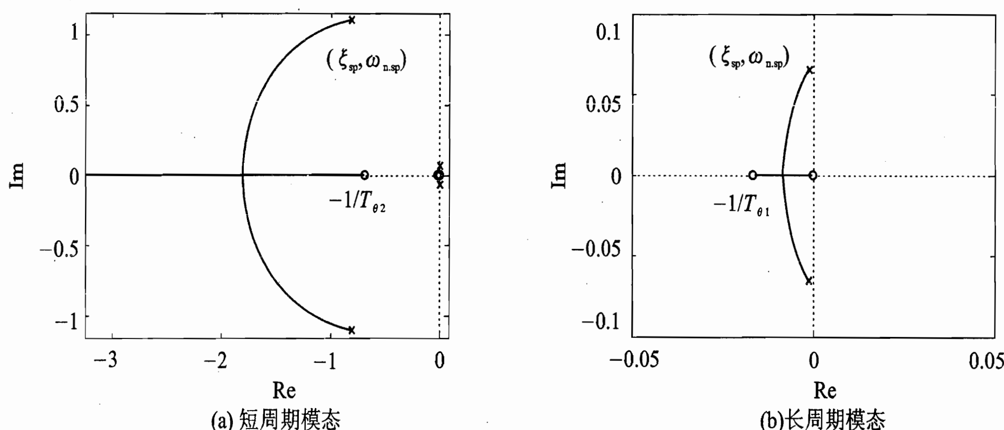


图 9.20　俯仰阻尼器系统根轨迹

需要注意的是，引入俯仰角速度反馈后，飞机对升降舵输入的响应稳态值下降，即降低了飞机的静操纵性。由式(9.46)、式(9.54)，增加俯仰阻尼器后，按理想调节器有

$$\Delta\ddot{\alpha} - [(\overline{M}_q + K_q\overline{M}_{\delta_e}) + \overline{M}_{\dot{\alpha}} - Z_\alpha]\Delta\dot{\alpha} - [\overline{M}_\alpha + (\overline{M}_q + k_q\overline{M}_{\delta_e})Z_\alpha]\Delta\alpha =$$

$$\Delta\ddot{\alpha} + 2\xi'_{sp}\omega'_{n.sp}\Delta\dot{\alpha} + \omega'^2_{n.sp}\Delta\alpha = \overline{M}_{\delta_e}\Delta\delta_e \tag{9.55}$$

由式(9.49)，过载稳态响应值为

$$\Delta n_n(\infty) = \frac{V_* Z_\alpha}{g} \frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\omega'^2_{n.sp}}\Delta\delta_e \tag{9.56}$$

可见，引入俯仰角速度反馈改善阻尼特性的同时，固有振荡频率增大，稳态响应值下降。

为了协调这一稳定性和操纵性的矛盾，常用的方法是引进清洗网络。清洗网络实际上为高通滤波器，对低频的反馈信号不起作用。此时反馈通道传递函数为

$$G_c(s) = K_q \frac{\tau s}{\tau s + 1} \tag{9.57}$$

则系统能够保持无反馈时的静操纵特性。同时为了获得合适的系统动态特性，清洗网络的时间常数选取应适当，不要过小。



另外，由于随飞行高度和速度的变化，气动特性变化很大。如反馈增益按中空条件调整，则固定不变的增益将使得低空飞行感到阻尼偏大，而高空飞行可能阻尼不足，故反馈增益需要随飞行条件调节。例如按动压和飞行高度调节，使得高空小动压时反馈增益较大，而低空大动压时增益较小，以便可能提供全飞行包线内均满意的动态特性。图 9.21 是某飞机俯仰阻尼器增益随飞行高度和动压的调节图。

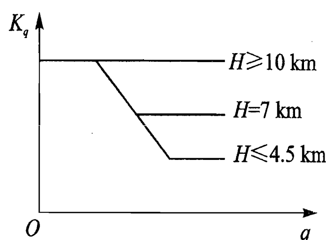


图 9.21 K_q 随高度和动压调节

9.3.2 纵向增稳系统

从 9.3.1 节分析可知，阻尼器的作用主要是增加飞机的俯仰阻尼，从而在一定程度上改善了飞机的短周期反应特性。但它不能改变飞机的纵向静稳定性。现代高速飞机飞行包线不断扩大，从亚声速到超声速飞行的焦点位置发生很大变化，因而对一定的质心位置，飞机的纵向静稳定性也发生较大改变。当设计超声速飞行具有合适的静稳定性时，在亚声速由于焦点前移，静稳定性常感不足，甚至是静不稳定的，即前述的纵向放宽静稳定性设计。这时不能仅仅依靠阻尼器，必须借助于纵向增稳装置。

增稳装置是在阻尼器基础上发展而来的。它除了俯仰角速度反馈回路外，还有对迎角或法向过载的反馈回路，因而不仅能增加飞机俯仰阻尼，而且还能增加飞机的纵向静稳定性，提高飞机的短周期振荡频率，可以在更广阔的飞行范围内改善飞机的飞行品质。

图 9.22 为增稳装置的工作原理图。其中迎角变化是通过迎角传感器感受，其信号输入放大器放大后，再经舵机及助力器推动舵面朝着减小迎角变化的方向偏转。

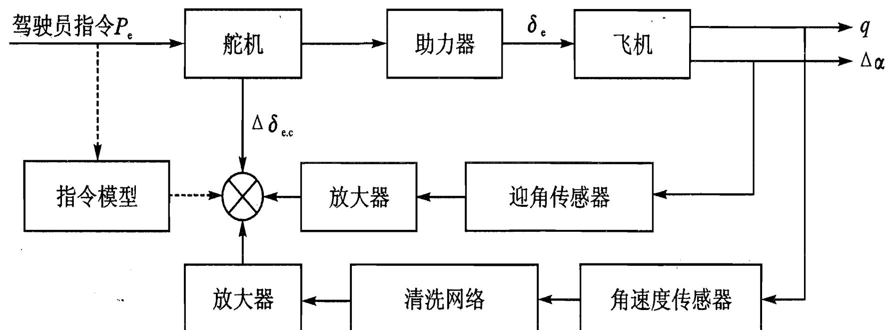


图 9.22 纵向增稳系统结构图(虚线通道：增强操纵性-控制增稳)

如果按照理想控制器分析，并且暂时忽略滤波器的作用，则可得控制方程如下：

$$\Delta\delta_e = K_q q + K_\alpha \Delta\alpha \tag{9.58}$$

式中 K_q，K_α 为俯仰角速度和迎角对升降舵(平尾)偏度的反馈增益，$K_q > 0$，$K_\alpha > 0$。附加的气动导数增量为

$$\Delta M_q = K_q M_{\delta_e}, \qquad \Delta M_\alpha = K_\alpha M_{\delta_e} \tag{9.59}$$

从力学的观点看，通过反馈的作用将部分操纵效能转换成了相应的俯仰阻尼力矩和静稳定力矩，从而改善了飞行模态特性。

下面通过具体的示例进一步说明俯仰增稳系统的特点。

例：某飞机状态具有纵向静不稳定特性。其迎角和俯仰角速度对平尾偏角的传递函数分别为

$$\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)} = -\frac{0.123\,2(s+75.00)(s^2+0.019\,64\,s+0.008\,892)}{(s-0.097\,55)(s+1.912)(s^2+0.301\,4s+0.036\,01)}$$

其单位为(°)/(°)。

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)} = -\frac{10.06s(s+1.027)(s+0.021\,74)}{(s-0.097\,55)(s+1.912)(s^2+0.301\,4s+0.036\,01)}$$

其单位为(°)·s^{-1}/(°)。

其中，不稳定模态具有约 10 s 的时间常数，而第三振荡模态周期约 33 s、阻尼比为 0.79。为了更接近实际分析，将迎角传感器和助力器动力学特性分别描述为具有带宽 10 rad/s 和 20.2 rad/s的一阶环节，即

$$G_\alpha(s) = \frac{10}{s+10}, \qquad G_\delta(s) = \frac{20.2}{s+20.2}$$

随着迎角反馈的根轨迹如图 9.23(a)所示。迎角反馈使第三振荡模态(ζ_α，ω_α)逐渐变成两个实模态，其中一个与来自于开环大负实根的一支汇合，成为类似于常规短周期的振荡模态根；另一个与从右面左移的实模态根汇合，并向原点附近的复零点靠拢，显现出了常规静稳定飞机特性。另外，迎角传感器和助力器极点在左半平面离原点很远处，二者逐渐汇合、再分开，并向负无穷远及 $s=-75$ 的零点发展，因为对其他模态影响较小，在图 9.23(a)中未示出。可以通过此图配置迎角反馈增益，当选择 $K_\alpha = 0.5$ 时，等效短周期模态自然频率为 2.12 rad/s 的适中值，而阻尼比为 0.315，偏低。

此时俯仰角速度对输入的传递函数为

$$\frac{q(s)}{F_e(s)} = -\frac{203.2s(s+10)(s+1.027)(s+0.021\,74)}{(s+20.01)(s+10.89)(s^2+0.016\,91s+0.006\,911)(s^2+1.398s+4.608)}$$

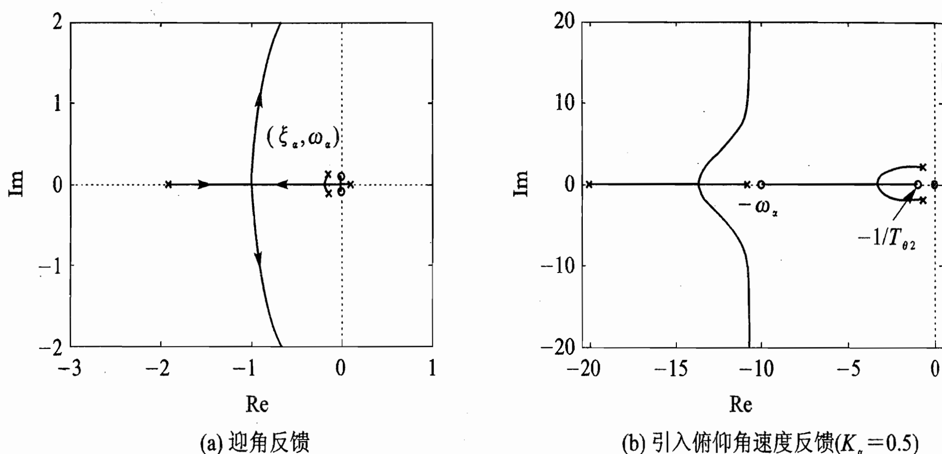
其中增加了由于迎角传感器所带来的 $s=-\omega_\alpha=-10$ rad/s 附加零点。以此作为新的被控对象，引入角速度反馈，根轨迹如图 9.23(b)所示。其中等效长周期模态仍为原点附近的稳定模态，图中略去其细节不作放大。由此根轨迹，选择 $K_q = 0.25$ 时，短周期自然频率为 2.8 rad/s，阻尼比为 0.72，比较满意。此时，

$$\frac{q(s)}{F_e(s)} = -\frac{203.2s(s+10)(s+1.027)(s+0.021\,74)}{(s+16.39)(s+11.88)(s^2+0.017\,56s+0.004\,542)(s^2+4.035s+7.852)}$$

同时，助力器的极点从 $s=-20.01$ 移至 $s=-16.39$，迎角传感器极点从 $s=-10$ 到 $s=-11.88$，对其他模态的影响不大。总之，若传感器、执行机构具有足够大的带宽，则一般在初步设计时



可以忽略其影响。



(a) 迎角反馈　　(b) 引入俯仰角速度反馈($K_\alpha=0.5$)

图 9.23　纵向增稳系统根轨迹

需要注意的是，由于迎角测量误差相对较大，而且迎角传感器容易出现机械故障，所以实际使用中一般应尽量避免引入迎角反馈，而采用其他等效的信号如法向过载进行反馈增稳，特别是当飞机本身具有纵向静稳定性时。此外，对于俯仰角速度反馈通道也同样引入高通滤波器等改善操纵性；在飞行包线内，反馈增益需要随飞行条件调节。

9.3.3　纵向控制增稳系统

无论阻尼器或增稳系统，其目的都是改善飞机的模态特性(即稳定性)，但经常还导致静稳定性的下降。为解决稳定性和静操纵性之间的矛盾，对于以机械式操纵为基础的飞机，在增稳系统的基础上增加前馈，即增加杆力(或杆位移)传感器和指令模型，将驾驶员的操纵指令与飞机的响应构成闭环控制，形成所谓控制增稳系统的增强系统，如图 9.22 所示。引入虚线通道后，在增稳系统的基础上形成了控制增稳系统，与机械操纵系统并联工作。

对于纵向控制，以杆位移操纵为例，若反馈信号为法向过载和俯仰角速度，则理想自动器的调节规律为

$$\delta_e = \delta_e^F P_e(1+K_P) + K_q q + K_n \Delta n_n \tag{9.60}$$

式中 $\delta_e^F=\Delta\delta_e/\Delta P_e$ 为驾驶杆操纵几何传动比，并注意到定常曲线运动中

$$q=(g/V_*)\Delta n_n$$

所以对过载求导后，可得每 g 杆位移特性

$$\frac{\Delta P_e}{\Delta n_n} = \left[\frac{\Delta\delta_e}{\Delta n_n} - \left(K_n + K_q\frac{g}{V_*}\right)\right]\Big/\delta_e^F(1+K_P) \tag{9.61}$$

可见，若 $K_P=0$，则闭环每 g 杆位移操纵量比开环时增加，静操纵性下降。引入驾驶员操纵信号作为前馈信号，通过调整增益系数 K_P 来实现需要的每 g 杆位移特性。在全飞行包线

内使用时，K_P可按动压和飞行高度等飞行条件自动调节(调节摇臂长度)，可以实现近乎常值的每g杆位移特性。对于杆力操纵，也可以以类似方法调整弹簧刚度，从而保证杆力梯度适当。

随着飞行控制技术的发展，应用电传操纵系统取消机械杆系，飞控计算机作为能高速处理大规模信息的核心装置后，又从控制增稳系统向"主动控制"发展，飞行控制成为在总体设计中与气动布局、结构和动力系统并列的飞机设计基本要素。这不但更容易进行飞机设计，使其具有满意的稳定性、操纵性(或飞行品质)，而且能够根据飞行任务的需要，提供新的飞行模式，并提高飞行性能及其他飞机特性。

9.3.4 高度稳定系统

前面介绍的的三种系统，都是以改善飞机的稳定性和操纵性为目的，以期提供给驾驶员更满意的飞机，但操纵过程仍然依靠驾驶员完成。能够自动引导飞机飞行的自动器则称为自动驾驶仪。最简单的自动驾驶仪的功能是保持飞行姿态或者某些轨迹参数。此时，自动驾驶仪可以间或代替驾驶员，但飞机构形的改变、自动驾驶仪的接通或断开、功能模式的选择和参数的设定等需要依靠驾驶员完成。随着飞行控制技术的发展，自动驾驶/导引系统可以实现飞机的全自动飞行，实现无人机的自主飞行模式。

从原理来说，自动驾驶/导引系统通常是多回路控制系统，在外回路引入适当的反馈，而内回路可以是阻尼器、增稳器等。

飞行高度稳定/控制系统是常用的一类纵向自动驾驶仪。高度稳定系统能够使飞机保持在空中飞行走廊的某一固定高度，从而满足空中飞行管制的要求，并减轻驾驶员的负担；或者在飞机执行侦察、摄像等飞行任务时，能精确地保持高度不变。而在飞机着陆进场时，要求飞机保持规定的$-2°\sim-5°$的下滑角，这是要求更高的高度控制系统完成的任务。

对于常规飞机，高度偏差的修正是通过改变飞行轨迹角实现的，而飞行轨迹角的改变可以通过操纵升降舵(全动平尾)或调节发动机油门实现，但一般调节油门的效果较慢。例如，当前高度比预期的高时，希望减小轨迹角使飞机下降；而轨迹角的减少则是通过飞机低头进而减少迎角，并产生向下的法向过载增量实现的。对高度的修正，首先需要引入高度反馈信号，实际应用中，除了低空飞行，一般感受到的都是气压高度，因为这是根据外部压力传感器信号由大气数据计算机合成的。另外，也应该引用其他信号作为反馈信号，考虑实际信号测量问题，常用俯仰角或法向过载调节系统作为内回路。

下面首先讨论与高度稳定或控制相关的(纵向)飞行轨迹稳定性问题，然后通过一个具体的示例分析高度稳定系统设计的一些特点。

1. (纵向)飞行轨迹稳定性

这里所谓的(纵向)飞行轨迹稳定性问题，指自动驾驶仪或驾驶员通过操纵升降舵或全动平尾而实现对飞行高度(轨迹)的控制这一闭环系统(过程)的稳定性问题。在飞机执行特定的



任务时，驾驶员将对特定的参数进行监控和及时操纵修正，其操纵行为的动力学特征一般是非线性的且比较复杂。下面仅进行简化分析，将自动驾驶仪或驾驶员的动力学特性当成纯增益环节。

假定控制器(驾驶员或自动驾驶仪)只操纵升降舵或全动平尾，并且能够精确保持轨迹水平，$\Delta\gamma=\Delta\theta-\Delta\alpha=0$；同时认为对于轨迹的操纵过程，短周期模态衰减足够快，俯仰力矩始终平衡，迎角的改变量由力矩方程确定。除了平飞，这一模型对于分析着陆进场(下滑角$-2°\sim-5°$)也是适用的。

这样，由式(9.1)得到飞机的纵向小扰动方程为

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\dot{V}-X_V\Delta V-(X_\alpha-g)\Delta\alpha=X_{\delta_e}\Delta\delta_e\\&-Z_V\Delta V-Z_\alpha\Delta\alpha=Z_{\delta_e}\Delta\delta_e\\&-\overline{M}_V\Delta V-\overline{M}_\alpha\Delta\alpha=\overline{M}_{\delta_e}\Delta\delta_e\end{aligned}\right\}\tag{9.62}$$

由上述第二、三式，得到受到扰动 ΔV 后，为维持水平轨迹，相应的迎角和舵偏角增量为

$$\left.\begin{aligned}\Delta\alpha&=-\frac{Z_V\overline{M}_{\delta_e}-Z_{\delta_e}\overline{M}_V}{Z_\alpha\overline{M}_{\delta_e}-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha}\Delta V\\\Delta\delta_e&=-\frac{Z_\alpha\overline{M}_V-Z_V\overline{M}_\alpha}{Z_\alpha\overline{M}_{\delta_e}-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha}\Delta V\end{aligned}\right\}\tag{9.63}$$

代入到切向力方程，得

$$\Delta\dot{V}-\left[\widetilde{X}_V-(\widetilde{X}_\alpha-g)\frac{\widetilde{Z}_V}{\widetilde{Z}_\alpha}\right]\Delta V=0\tag{9.64}$$

式中

$$\widetilde{X}_V=X_V-\overline{M}_VX_{\delta_e}/\overline{M}_{\delta_e},\qquad\widetilde{X}_\alpha=X_\alpha-\overline{M}_\alpha X_{\delta_e}/\overline{M}_{\delta_e}$$
$$\widetilde{Z}_V=Z_V-\overline{M}_VZ_{\delta_e}/\overline{M}_{\delta_e},\qquad\widetilde{Z}_\alpha=Z_\alpha-\overline{M}_\alpha Z_{\delta_e}/\overline{M}_{\delta_e}$$

可见，受扰后速度的变化规律为

$$\Delta V(t)=\Delta V_0\mathrm{e}^{\lambda t}\tag{9.65}$$

其中稳定的充分必要条件为特征根

$$\lambda=\widetilde{X}_V-(\widetilde{X}_\alpha-g)\frac{\widetilde{Z}_V}{\widetilde{Z}_\alpha}<0\tag{9.66}$$

可见，操纵升降舵来精确保持飞行轨迹时，速度变化是其主要特征。因此对于有人驾驶飞机，该类稳定性问题刚开始发现时，被称为“速度稳定性”。但它实质上是用升降舵来控制飞行高度和轨迹时出现的人-机闭环系统稳定性问题，一般也称之为纵向“轨迹稳定性”。

若不计升降舵偏转和 Ma 对气动力系数的影响，不计发动机推力随飞行速度的变化，则式(9.66)进一步简化成



$$\lambda=-\frac{2q_* S}{mV_*}\frac{C_{L\alpha}C_{D*}+C_{D*}^2-C_{L*}C_{D\alpha}}{C_{L\alpha}+C_{D*}}\approx$$

$$-\frac{2g}{V_*}\left(\frac{C_{D*}}{C_{L*}}-\frac{\partial C_D}{\partial C_L}\right)<0 \tag{9.67}$$

飞行条件对应于极曲线的最大升阻比点或平飞需用推力曲线的最小值点(即有利飞行状态)时,飞行轨迹稳定性为中立;飞行速度大于该状态对应的有利速度,即处于正操纵的第一平飞范围时,系统是稳定的;而低于有利速度飞行,即处于反操纵的第二平飞范围时,则系统是发散的,如图 9.24 所示。

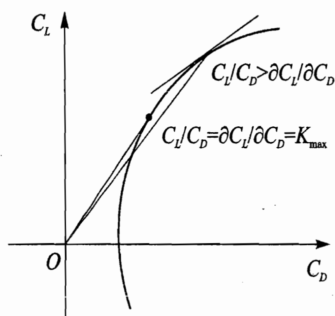


图 9.24 飞机平衡极曲线

对于着陆进场保持规定下滑角的飞行,因为飞行速度较小,可能处于飞行反操纵范围。为了确保着陆安全,许多国家飞行品质规范对着陆进场的飞行轨迹稳定性要求进行了规定。为了便于飞行试验测量,引进其他参数代替。

阶跃偏转升降舵,可以应用终值定理推出稳态轨迹角增量相对于稳态速度增量的比值:

$$\left(\frac{\Delta\gamma}{\Delta V}\right)_{ss}=\frac{1}{g}\left[\widetilde{X}_V-(\widetilde{X}_\alpha-g)\frac{\widetilde{Z}_V}{\widetilde{Z}_\alpha}\right]=\frac{\lambda}{g} \tag{9.68}$$

所以,可以用$(\Delta\gamma/\Delta V)_{ss}$作为着陆进场飞行轨迹稳定性参数。

2. 高度稳定系统示例

下面的示例采用俯仰角调节系统作为内回路。

例:某运输机巡航飞行 $H_*=7\ 620$ m,$Ma_*=0.5$。其飞行高度和俯仰角速度对升降舵的传递函数为

$$\frac{H(s)}{\delta_e(s)}=-\frac{1.711\ 1(s+0.002\ 264)}{(s+0.000\ 189\ 2)(s^2+0.004\ 943s+0.008\ 084)(s^2+1.047s+1.756)}$$

其单位为 m/(°)。

$$\frac{q(s)}{\delta_e(s)}=-\frac{1.133\ 4s(s+0.556\ 7)(s+0.018\ 97)(s+0.000\ 166\ 6)}{(s+0.000\ 189\ 2)(s^2+0.004\ 943\ s+0.008\ 084)(s^2+1.047s+1.756)}$$

其单位为(°)·s^{-1}/(°)。

可见,除了长、短周期模态外,还有一个时间常数很长的单调收敛模态(对应于非常接近原点的实特征根),反映了飞机保持其平衡高度飞行的微弱趋势,称之为“高度模态”。当忽略高度变化对大气密度、发动机推力等的影响时,高度对升降舵的传递函数的影响可以确定如下:

由 $$\dot{H}=\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=V\sin\gamma=V\sin(\theta-\alpha)$$

线化后,得

$$\frac{H(s)}{\delta_e(s)}=\frac{V_*}{s}\left[\frac{\theta(s)}{\delta_e(s)}-\frac{\alpha(s)}{\delta_e(s)}\right]$$



可见高度模态根为零，高度受扰后是中立稳定的。本例中的非零根是由于考虑了高度变化对大气密度的影响，从而纵向扰动运动方程是五阶的，即高度变化与其他的速度、迎角、俯仰角速度和俯仰角等参数的变化耦合。

为了设计高度保持系统，若仅引入比例型高度反馈，则用根轨迹图不难发现，不大的增益就会使系统发散。考虑内回路采用俯仰角调节系统，但若仅用俯仰角反馈，将导致短周期模态特性恶化，故同时引入俯仰角和俯仰角速度反馈。完整的高度稳定系统框图如图 9.25 所示。

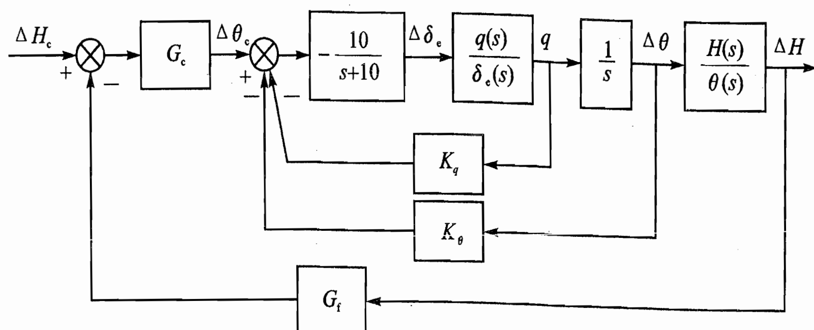


图 9.25　高度稳定系统

图 9.25 中，考虑了以带宽为 10 rad/s 的一阶模型模拟助力器，并且注意其中包含了负号，表示抬头的俯仰姿态指令(正值)需要升降舵上偏(负值)。G_f为高度传感器动力学参数，理想情况取为 1。G_c为为控制器。若用古典控制的根轨迹法或频域法选参，则需要逐一按回路选取，并且反复校正。另外，对于 G_c的结构，可以选择超前-滞后网络，也可以按比例＋积分形式。从对硬件的要求而言，超前-滞后网络更有利。

选取 $K_q=2.5\ (°)/((°)\cdot s^{-1})$，$K_\theta=3\ (°)/(°)$，并且

$$G_c=\frac{(s+0.05)(s+0.3)}{(s+0.01)(s+2.4)}$$

高度稳定自动驾驶仪单位阶跃响应特性如图 9.26 所示。

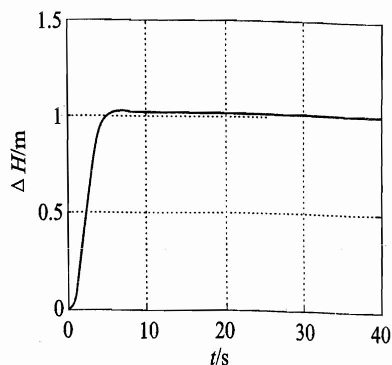


图 9.26　高度稳定自动驾驶仪单位阶跃响应特性

9.4 飞机的纵向飞行品质

飞机飞行品质指飞机的飞行动力学特性。它决定了驾驶员为实现预定任务时的操纵难易程度(驾驶员工作负担)和完成任务的精确度,不仅与飞机和驾驶员的动态特性有关,而且与驾驶员完成任务的工作环境等其他因素有关。在设计飞机时,其动力学特性必须保证飞行安全,驾驶员能够以较轻的负担顺利完成预定任务。飞行品质要求或规范是各类飞机设计和评价的依据。与飞行品质要求相关的概念如下。

飞机类型:例如可按飞机尺寸、重量、机动性划分为轻小型飞机、高机动性战斗机、大型运输机等。

飞行任务阶段:例如起飞、巡航、空战和着陆等。

飞机工作状态:例如正常状态与故障状态等。

飞行品质等级:表明了对飞机完成飞行任务的可接受程度。一般最低等级应该能够安全地操纵飞机,而满意等级的飞行品质表明飞机明显地适合完成飞行任务。

驾驶员评价尺度:由于飞行品质优劣一般按驾驶员试飞、模拟的意见为基础进行评定,所以为了使驾驶员的意见具有共同的衡量尺度和描述术语,而建立了统一的定性评价尺度。目前世界上较通用的评价尺度为美国的 C-H 评价尺度。

对不同类型的飞机,在不同的飞行任务阶段及其不同的工作状态,飞行品质要求是不同的。为此,美国军用飞机飞行品质要求手册 MIL—HDBK—1797 将飞行品质要求分为四种飞机类型、三种飞行任务阶段和三个飞行品质等级;对于不同的工作状态,需要满足不同的等级要求。飞行品质的各种具体指标要求,是根据试飞、模拟得到的各类数据和意见,按驾驶员评价尺度判定并最终确定的。世界上各航空发达国家,对各类飞机均制定有飞行品质规范。目前,我国军用飞机一般遵循的飞行品质规范为 GJB 185—86《有人驾驶飞机(固定翼)飞行品质》。

本节介绍一些基本的纵向飞行品质要求内容。

1. 纵向平衡特性

要求飞机在飞行包线内能满足俯仰力矩平衡,并且在起飞和着陆飞行中均具有足够的俯仰操纵效能和适度的操纵力。

2. 纵向静稳定性

如果飞行速度增加,则为了维持平衡飞行应使用推杆力。这实际上是对杆力平衡曲线梯度进行了限制,其中杆力梯度符号取决于松杆静稳定性。一般在跨声速“勺形”区,即使使用 Ma 配平机构及人工感觉系统,也难以达到稳定梯度的要求,故允许适当放宽。

3. 定常机动飞行中的纵向操纵特性

对单位过载的杆位移、杆力的符号和数值范围进行了要求,而且要求俯仰操纵效能能够保



证飞机产生规定范围的过载。

4. 飞行轨迹稳定性

如9.3.4节所述，飞行轨迹稳定性是指驾驶员不改变油门位置而只改变俯仰操纵面来保持轨迹倾斜角时，这一“闭环”过程飞机是否具有速度稳定的特性。对于着陆进场飞行，这一特性尤为重要，所以一般规范中都进行了要求，如用$(\Delta\gamma/\Delta V)_{ss}$参数进行描述。

5. 长周期模态特性

由于长周期运动中参数变化缓慢，因此运动即使是发散的，只要倍幅时间T_2较长，飞机还是可以飞行的，因为驾驶员有足够的时间来操纵飞机，以纠正飞机某些参数的发散趋势。所以对这一模态的基本要求是：不允许运动参数发散太快，即规定出倍幅时间T_2有一定大小。例如，有的规范规定飞机在有故障飞行时仍应保证T_2为55 s。显然，这种要求只是最低要求，因为飞机的模态特性若为发散运动，则驾驶员为了控制飞机运动，势必分散精力，对执行和完成其飞行任务有一定的影响。所以，上述规范中又规定正常情况下，长周期阻尼比$\zeta_p \geqslant 0.04$。

6. 短周期模态特性

在短周期运动中，由于运动参数变化很快，为了保证安全，它必须是收敛的。根据变稳定性飞机研究结果，短周期阻尼比ζ_{sp}和无阻尼自然频率$\omega_{n.sp}$的组合与驾驶员评价之间具有一定的规律性。但经过进一步的研究发现，用操纵期望参数(CAP)取代无阻尼自然频率参数后与驾驶员评价的相关性更好。所以一般对阻尼比和CAP提出了要求，如ζ_{sp}一般应在0.35～1.3之间。

7. 操纵期望参数

考虑到常规飞机的操纵特点，轨迹的操纵是通过姿态操纵实现的；因为飞机的初始角加速度最容易被驾驶员通过内耳感觉到，驾驶员一般根据最初的俯仰角加速度大小判断可能达到的过载稳态值(即改变轨迹的能力)，所以，用初始角加速度与稳态过载增量之比衡量驾驶员对操纵效果的推测(即期望)的准确程度，定义

$$\mathrm{CAP} = \frac{\Delta\ddot{\theta}(0)}{\Delta n_n(\infty)} \tag{9.69}$$

若CAP太小，驾驶员觉得飞机俯仰反应迟钝，因此将习惯地加大俯仰操纵直到有足够明显的感觉，结果造成过大的稳态过载；反之，若CAP太大，驾驶员感觉初始反应太突然、太灵敏，因而习惯性地减小俯仰操纵，结果造成实际所能达到的过载稳态值不足。因此为了保证飞机具有良好的动态操纵品质，必须要求CAP适中。

俯仰操纵后飞机的最初反应就是俯仰角加速度变化，其他参数尚未变化，即

$$\Delta\ddot{\theta}(0) = \overline{M}_{\delta_e}\Delta\delta_e$$

由式(9.43)、式(9.49)和式(9.52)可导出CAP的表达式

$$\mathrm{CAP} = \frac{g\omega_{n.sp}^2}{V_* Z_\alpha} = \frac{\omega_{n.sp}^2}{\partial n_n/\partial\alpha} = \frac{\omega_{n.sp}^2}{(V_*/g)(1/t_d)} \tag{9.70}$$

式中 $1/t_d$ 为短周期俯仰角传递函数的零点，t_d 反映轨迹倾角变化相应于俯仰角变化的延迟时间。

8. 带自动器飞机的飞行品质

飞机使用反馈控制后，飞行特性会有较大的变化。例如纵向模态除了长、短周期特性会改变之外，由于控制器的使用会引进新的模态。若按古典控制的主导极点法分析，实践表明往往导致较大的误差，甚至得出错误的结论，因为非主导极点的综合作用将会对飞机带来明显的影响，驾驶员也是能够感觉得到的。为此，对于飞行品质的评价，除了推广应用无自动器飞机的飞行品质指标外，还提出了许多新的评价指标。而且由于自动器的引入，特别是主动控制技术的应用，飞机飞行动力学表现特性多样化，导致飞行品质指标内容也大大丰富。

飞行品质规范要求的内容，需要针对飞行特性的变化进行适时修订，以满足飞机发展的需要。总之，对于有人驾驶的飞行器，飞行品质要求是飞行控制设计和飞行动力学特性评价的重要依据。

复习思考题

9.1 试说明飞机纵向动稳定性与静稳定性的区别与联系。

9.2 试说明飞机纵向扰动运动两种典型模态的特点、物理成因以及影响模态特性的主要气动导数。

9.3 对一架在重心处固定的飞机模型进行风洞试验。若其俯仰轴运动满足

$$\Delta\ddot{\theta} + 2\Delta\dot{\theta} + 5\Delta\theta = -5\delta_e$$

其中角度单位均为弧度。

① 将该方程重写为标准的状态空间表达形式，即形如 $\dot{x} = \boldsymbol{A}x + \boldsymbol{B}u$；

② 确定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征矢量；

③ 确定无阻尼自由振荡频率 ω_n 和阻尼比 ξ；

④ 确定对单位阶跃输入的响应，并作出时间历程曲线，假定初值为零。

9.4 已知某飞机有关几何、重量数据为

$$W = 88\ 260\ \text{N}, \bar{x}_{cg} = 0.316, S = 28\ \text{m}^2, c = 3.1\ \text{m}, I_y = 73\ 030\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

有关气动数据为

Ma	0.6	0.8	1.0	1.1
$C_{L\alpha}$	3.49	3.67	4.24	4.30
C_{mq}	−6.40	−6.70	−7.52	−8.04
$C_{m\dot{\alpha}}$	−2.20	−2.20	−1.80	−1.00
$\bar{x}_{ac}$	0.457	0.465	0.546	0.669



计算 $H=11\,000$ m 时飞机短周期运动特性 $N_{1/2}$，ξ，ω_n 和过载最大超调量 M_p 随 Ma 的变化。

9.5　如果飞机外形布局中焦点位于质心之前(纵向放宽静稳定性)，试考虑：

① 它对飞机的纵向平衡、稳定性和操纵性有何影响？

② 应选择哪些反馈参数来保证飞机具有良好的飞行品质？为什么？

9.6　关于高度稳定系统：

① 当飞机飞行速度位于第二平飞范围时，试设想合理的高度稳定反馈控制系统的结构方案，说明原因。

② 对于图 9.25 所示的高度稳定系统，试作出内回路随 K_q 变化的根轨迹。

③ 应用工具软件，根据根轨迹分析图 9.25 对应的示例如何选择出控制器 G_c 的零、极点？

第 10 章　飞机的横航向稳定性和操纵性

在第 9 章的基础上，本章讨论飞机横航向运动的稳定性，再讨论横航向操纵性；进一步结合现代带自动器飞机，介绍其中几种基本类型的横航向控制器及其对飞行动力学的影响；最后简单介绍飞机横航向飞行的品质要求。

10.1　飞机横航向运动稳定性

10.1.1　横航向扰动运动方程

线性化的横航向动力学方程式(6.88)重写为

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{p}\\ \dot{r}\\ \dot{\phi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Y}_\beta & \alpha_*+\overline{Y}_p & \overline{Y}_r-1 & g\cos\theta_*/V_*\\ \overline{L}_\beta & \overline{L}_p & \overline{L}_r & 0\\ \overline{N}_\beta & \overline{N}_p & \overline{N}_r & 0\\ 0 & 1 & \tan\theta_* & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ p\\ r\\ \phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \overline{Y}_{\delta_\mathrm{r}}\\ \overline{L}_{\delta_\mathrm{a}} & \overline{L}_{\delta_\mathrm{r}}\\ \overline{N}_{\delta_\mathrm{a}} & \overline{N}_{\delta_\mathrm{r}}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_\mathrm{a}\\ \delta_\mathrm{r}\end{bmatrix}\overset{\mathrm{def}}{=\!=}\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{Bu} \tag{10.1}$$

式中状态矢量 $\boldsymbol{x}=[\beta\quad p\quad r\quad \phi]^\mathrm{T}$；操纵矢量 $\boldsymbol{u}=[\delta_\mathrm{a}\quad \delta_\mathrm{r}]^\mathrm{T}$；$\delta_\mathrm{a}$ 和 δ_r 分别为气动副翼和方向舵偏角。

表 10.1 列出了横航向动力学导数用气动导数表示的关系式。

表 10.1　横航向气动导数

横航向气动导数	单　位	横航向气动导数	单　位	横航向气动导数	单　位
$\overline{Y}_\beta=\dfrac{C_{y\beta}q_*S}{mV_*}$	s^{-1}	$N_\beta=C_{n\beta}q_*Sb$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$	$L_\beta=C_{l\beta}q_*Sb$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$
$\overline{Y}_p=\dfrac{C_{yp}q_*S}{mV_*}\dfrac{b}{2V_*}$		$N_p=C_{np}q_*Sb\dfrac{b}{2V_*}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s}$	$L_p=C_{lp}q_*Sb\dfrac{b}{2V_*}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s}$
$\overline{Y}_r=\dfrac{C_{yr}q_*S}{mV_*}\dfrac{b}{2V_*}$		$N_r=C_{nr}q_*Sb\dfrac{b}{2V_*}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s}$	$L_r=C_{lr}q_*Sb\dfrac{b}{2V_*}$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s}$
$\overline{Y}_{\delta_\mathrm{a}}=\dfrac{C_{y\delta_\mathrm{a}}q_*S}{mV_*}$	s^{-1}	$N_{\delta_\mathrm{a}}=C_{n\delta_\mathrm{a}}q_*Sb$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$	$L_{\delta_\mathrm{a}}=C_{l\delta_\mathrm{a}}q_*Sb$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$
$\overline{Y}_{\delta_\mathrm{r}}=\dfrac{C_{y\delta_\mathrm{r}}q_*S}{mV_*}$	s^{-1}	$N_{\delta_\mathrm{r}}=C_{n\delta_\mathrm{r}}q_*Sb$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$	$L_{\delta_\mathrm{r}}=C_{l\delta_\mathrm{r}}q_*Sb$	$\mathrm{kg\cdot m^2/s^2}$
$\overline{L}_i=\dfrac{L_i+(I_{zx}/I_z)N_i}{I_x-I_{zx}^2/I_z},\overline{N}_i=\dfrac{N_i+(I_{zx}/I_x)L_i}{I_z-I_{zx}^2/I_x},i\in\{\beta,p,r,\delta_\mathrm{a},\delta_\mathrm{r}\}$					

注：这里的侧力系数是按机体轴系确定的。若按风轴系，则 $\overline{Y}_\beta$ 导数分子项应减去阻力 D_*。



类似于纵向运动分析，对于式(10.1)描述的运动形式，讨论稳定性问题时置操纵矢量 $\boldsymbol{u}=0$。此时，受扰后的稳定性取决于式(10.1)矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值和特征向量，其特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda-\bar{Y}_\beta & -(\alpha_*+\bar{Y}_p) & 1-\bar{Y}_r & -g\cos\theta_*/V_* \\ -\bar{L}_\beta & \lambda-\bar{L}_p & -\bar{L}_r & 0 \\ -\bar{N}_\beta & -\bar{N}_p & \lambda-\bar{N}_r & 0 \\ 0 & -1 & -\tan\theta_* & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4=0 \tag{10.2}$$

式中 b_1,b_2,b_3,b_4 为特征多项式展开后相应的各次项系数。同纵向一样，飞机横航向扰动运动也具有四阶特征。

对于操纵性问题，可以根据线性非齐次微分方程理论直接求解；或将微分方程模型进行拉氏变换，并用线性系统分析方法讨论。

分析中经常涉及的其他横航向运动参数的方程为

$$\left.\begin{aligned} \dot{\psi} &= \Delta r/\cos\theta_* \\ \dot{y}_g &= V_*(\cos r_*\Delta\chi) \\ \chi &= \psi-\frac{\beta-\sin\alpha_*\phi}{\cos r_*} \end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

10.1.2 典型的横航向运动模态

下面先看一例，了解常规布局飞机的横航向模态特性。

例： 某型通用航空飞机同9.1.3节的示例飞机，具有无后掠梯形翼，下单翼带上反。其基本参数如下：

重量 $W=12\ 224$ N；

惯性力矩 $I_x=1\ 420.9\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$I_y=4\ 067.5\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$I_z=4\ 786.0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$，$I_{zx}=0\ \mathrm{kg\cdot m^2}$；

机翼面积 $S=17.1\ \mathrm{m^2}$，平均气动弦长 $c=1.74$ m，展长 $b=10.18$ m；

飞机在海平面以 $Ma=0.158$ 飞行，$C_{L*}=0.41$，$C_{D*}=0.05$；

侧滑导数 $C_{y\beta}=-0.564$，$C_{l\beta}=-0.074$，$C_{n\beta}=0.071$；

动导数 $C_{yp}=C_{yr}=0$，$C_{lp}=-0.410$，$C_{np}=-0.057\ 5$，$C_{lr}=0.107$，$C_{nr}=-0.125$；

操纵导数 $C_{y\delta_a}=0$，$C_{l\delta_a}=-0.134$，$C_{n\delta_a}=-0.003\ 5$，$C_{y\delta_r}=0.157$，$C_{l\delta_r}=0.107$，$C_{n\delta_r}=-0.072$。上述与角度有关的单位均为 rad。

首先代入表10.1中的导数计算式，然后应用式(10.1)计算扰动运动相关矩阵。对于运动稳定性问题，仅需要其中的状态矩阵，得

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} -0.255 & 0.092 & -1 & 0.182 \\ -16.038 & -8.419 & 2.197 & 0 \\ 4.568 & -0.351 & -0.762 & 0 \\ 0 & 1 & 0.092 & 0 \end{bmatrix}$$



其特征根分布如图 10.1 所示，模态特性如表 10.2 所列。

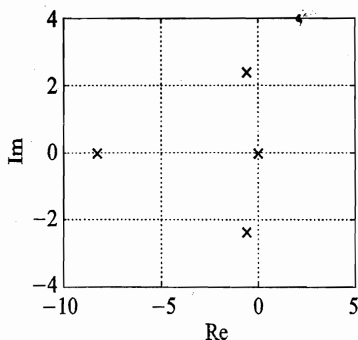


图 10.1 示例飞机横航向运动特征根分布

表 10.2 示例飞机模态特性

特征根	$t_{1/2}$/s	T/s	$N_{1/2}$/周	模态命名
−8.269	0.084	—	—	滚转收敛模态
−0.587±i2.364	1.18	2.66	0.44	荷兰滚模态
0.007 03	−98.56	—	—	螺旋模态

由此，示例飞机的横航向扰动运动具有三个模态，其中一个为衰减很快的单调模态，其半衰期很短，对应于大负值特征根，一般称为滚转收敛模态；另一个单调变化模态对应于离原点很近的特征根，这里表现为很缓慢的发散，称为螺旋模态；一对共轭复特征根对应于频率较快、中等阻尼的周期振荡运动，称为荷兰滚模态。

根据特征矢量，相应于滚转收敛模态各参数之比为

$$\beta : p : r : \phi = 0.022\,4 : (-8.232) : (-0.398) : 1$$

可见，侧滑角相对于滚转角以及偏航角速度相对于滚转角速度受滚转收敛模态的影响都明显小。

相应于螺旋模态，各参数之比为

$$\beta : p : r : \phi = 0.028\,5 : (-0.009) : 0.173 : 1$$

可见，螺旋模态为带滚转、几乎无侧滑的缓慢的偏航运动。

对于振荡的荷兰滚模态，相应其虚部为$+\mathrm{i}\omega$的特征根，其模态的特征结构为

$$\begin{aligned}\beta : p : r : \phi = &\\ &(0.160-\mathrm{i}1.206) : (-0.342+\mathrm{i}2.412) : (-2.647-\mathrm{i}0.557) : 1 = \\ &1.216\mathrm{e}^{-82.4^\circ\mathrm{i}} : 2.440\mathrm{e}^{98.1^\circ\mathrm{i}} : 2.705\mathrm{e}^{-168.1^\circ\mathrm{i}} : 1\end{aligned}$$

可见，对于这一频率较快的振荡模态，侧滑角和滚转角、偏航角速度和滚转角速度的表现几乎同量级。图 10.2 为相应的特征矢量图。

更进一步地，上述三种典型模态在示例飞机横航向扰动运动中的体现如图 10.3 所示。其中设置初始扰动量为 $\beta(0)=1^\circ$，$p(0)=1(^\circ)/\mathrm{s}$，$r(0)=1(^\circ)/\mathrm{s}$，$\phi(0)=1^\circ$。为了便于观察典型模态对扰动运动的影响，图中按三种时间尺度示出各个参数的扰动恢复时间历程。

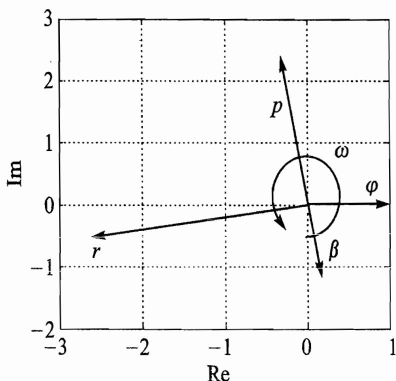
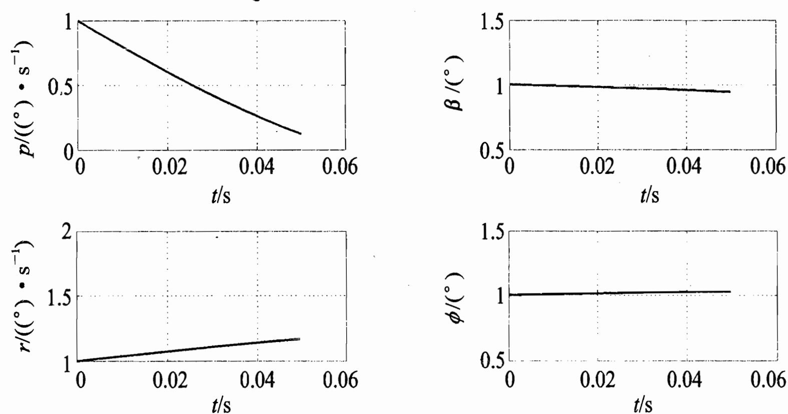
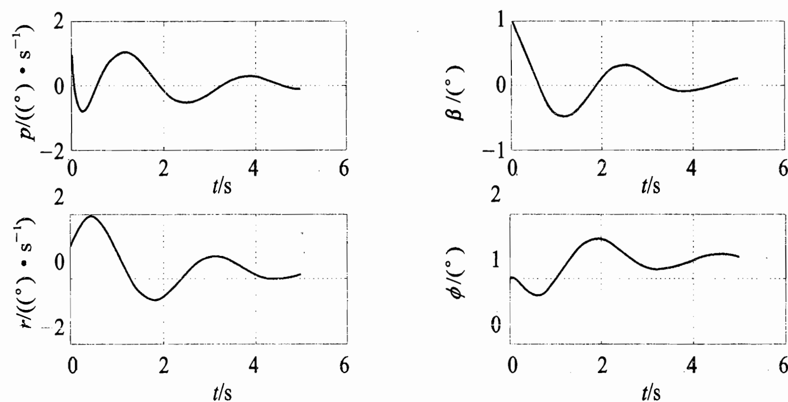


图 10.2 示例飞机荷兰滚模态特征矢量图

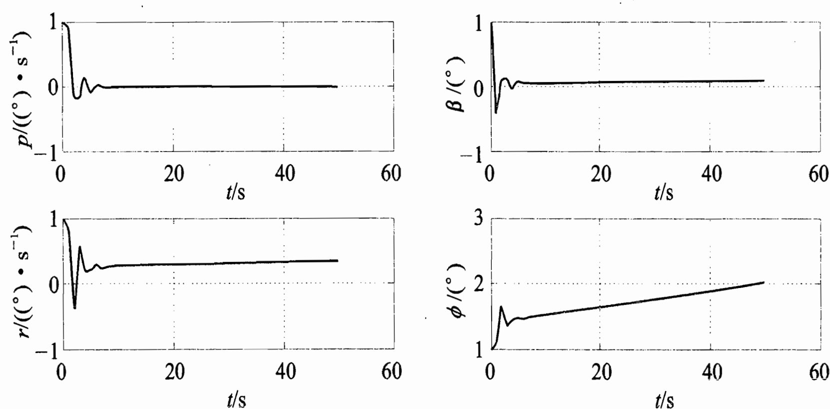




(a) 短时间尺度



(b) 中时间尺度



(c) 长时间尺度

图 10.3　示例飞机横航向扰动运动时间历程



总之，通常飞机的横航向扰动运动具有三个模态：

滚转收敛模态是衰减很快的单调模态，其半衰期很短，对应于大负值特征根。主要表现为扰动恢复初期滚转角速度的迅速衰减变化，而偏航角速度、侧滑角等变化很小，故得名，适宜在数秒甚至更短的时间尺度内观察，如图 10.3(a)所示。

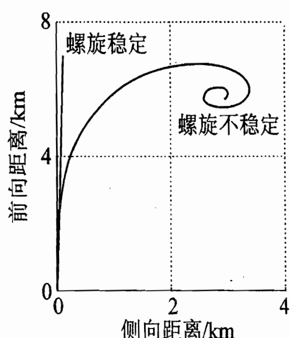


图 10.4　螺旋模态运动

螺旋模态是单调变化模态，对应于离原点很近的特征根，不论收敛或发散都很缓慢。主要表现为扰动运动后期滚转角(以及偏航角)的变化，即带滚转、几乎无侧滑的缓慢的偏航运动。若该模态发散(正如本节示例)，则飞行轨迹呈现为缓慢下降的近似螺旋线，故称为螺旋模态，如图 10.4 所示。该模态为"弱"模态，适宜在数十秒甚至更长的时间尺度内观察，如图 10.3(c)所示。

荷兰滚模态对应于横航向扰动运动特征根的一对共轭复根，为频率较快、中等阻尼的周期振荡运动。其周期和半衰期在数秒量级，频率为每秒几弧度，在扰动运动的中间时段此模态表现强烈。运动参数 β 与 ϕ 同量级，p 与 r 同量级，飞机来回滚转、左右偏航，并伴随着侧滑振荡，颇似花样滑冰中的"荷兰滚"动作，故得名。适宜在数秒的时间尺度内观察，如图 10.3(b)所示。

本节示例飞机的横航向运动模态特性具有典型性。下面进行进一步分析，以便了解其物理成因。

10.1.3　滚转收敛模态分析

根据 10.1.2 节的结果，滚转收敛模态主要表现在扰动恢复的初始阶段，且近似认为 $\Delta\beta=\Delta r=0$，则根据式(10.1)，得到反映滚转收敛模态特性的单自由度滚转近似方程

$$\dot{p}=\overline{L}_p p \tag{10.4}$$

近似略去交叉阻尼力矩及交叉惯性力矩的作用，则滚转模态特征根为

$$\lambda_r=\overline{L}_p\approx\frac{q_* Sb}{I_x}\frac{b}{2V_*}C_{lp} \tag{10.5}$$

可见，此模态特性取决于滚转阻尼与滚转惯性之比。一般飞机具有较小的滚转惯性力矩和相对大得多的偏航惯性力矩，并且滚转阻尼也较大，从而导致受扰动后具有较快的滚转运动，而且衰减很快。另外，由于低速大展弦比飞机相对于高速大后掠翼飞机具有更大的滚转阻尼惯性比，故由式(10.5)可知，低速飞机一般具有更快衰减的滚转收敛模态。

对于 10.1.2 节的示例飞机，若按照式(10.5)估计，$\lambda_r=\overline{L}_p=-8.419$，与按四阶方程得到的$-8.269$ 相比(见表 10.2)，二者误差不到 2 %。



对于飞行包线较大的超声速飞机，由式(10.5)，随着飞行高度的增加，飞机的气动与惯性之比下降，滚转模态根之值减小，其时间常数 $T_r=-1/\lambda_r$ 增加，模态收敛速度减慢。随飞行速度增加，一般亚声速滚转阻尼趋于增加，故 T_r 趋于减少；而超声速时随飞行速度增加滚转阻尼趋于下降，故 T_r 减少比亚声速慢，甚至可能趋于增加。图 10.5 示出了一架超声速战斗机的滚转收敛模态特性。

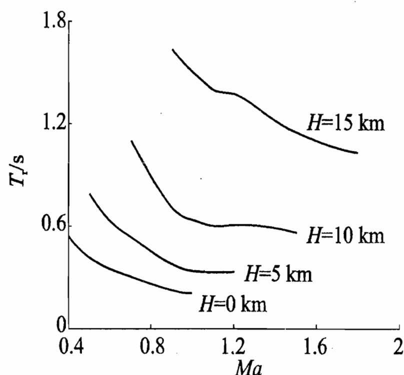


图 10.5 某战斗机滚转收敛模态特性

10.1.4 螺旋模态分析

螺旋模态主要表现为滚转角 ϕ 和偏航角 ψ 的缓慢变化，但是不能简单地略去侧滑角，因为气动力并不取决于 ϕ 和 ψ，而是取决于侧滑角 β、滚转角速度 p 和偏航角速度 r；另外，重力的侧向分量也是产生偏航运动的基本原因。为此，忽略侧力导数，并认为侧向惯性力和重力侧向分量平衡，则由式(10.1)得到耦合的方程

$$\left.\begin{aligned} 0 &= -V_* r + g\phi \\ \dot{p} &= \bar{L}_\beta \beta + \bar{L}_p p + \bar{L}_r r \\ \dot{r} &= \bar{N}_\beta \beta + \bar{N}_p p + \bar{N}_r r \\ \dot{\phi} &= p \end{aligned}\right\} \tag{10.6}$$

其特征方程为

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -V_* & g \\ \bar{L}_\beta & \bar{L}_p - \lambda & \bar{L}_r & 0 \\ \bar{N}_\beta & \bar{N}_p & \bar{N}_r - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{10.7}$$

展开得到

$$\left.\begin{aligned} & C\lambda^2 + D\lambda + E = 0 \\ & C = V_* \bar{N}_\beta \\ & D = V_*(\bar{L}_\beta \bar{N}_p - \bar{L}_p \bar{N}_\beta) - g\bar{L}_\beta \\ & E = g(\bar{L}_\beta \bar{N}_r - \bar{L}_r \bar{N}_\beta) \end{aligned}\right\} \tag{10.8}$$

这是一个二阶系统，根据假设包括了滚转收敛模态和螺旋模态特性。由于螺旋模态特征根通常接近零点，故特征方程中仅保留线性项和常数项，而视二阶项为高阶小项，得到螺旋模态特征根近似估计式



$$\lambda_s = -\frac{E}{D} = -\frac{g(\bar{L}_\beta \bar{N}_r - \bar{L}_r \bar{N}_\beta)}{V_*(\bar{L}_\beta \bar{N}_p - \bar{L}_p \bar{N}_\beta) - g\bar{L}_\beta} \tag{10.9}$$

对于10.1.2节的示例飞机，按照上式估计得 $\lambda_s = -0.0085$，与按四阶方程得到的 -0.0082 相比(见表10.2)，二者误差足够小。

另外一种螺旋模态根估计方法，是根据螺旋模态特征根通常接近零点的特点，直接在四阶特征方程中略去二阶及其以上小项，而仅保留线性项和常数项，从而也可以估算出螺旋特征根。

对于一般具有横航向静稳定性和正常阻尼特性的飞机，根据式(10.9)，其分母一般大于零，故螺旋模态稳定的条件为

$$\bar{L}_\beta \bar{N}_r - \bar{L}_r \bar{N}_\beta > 0 \tag{10.10a}$$

或

$$\bar{L}_\beta / \bar{N}_\beta < \bar{L}_r / \bar{N}_r \tag{10.10b}$$

可见，螺旋模态稳定要求飞机具备足够的上反效应。

从物理特性上讲，设想若 $|\bar{N}_\beta| \gg |\bar{L}_\beta|$，当出现向右滚转的扰动 $\Delta\phi > 0$ 时，由于重力侧向分量的作用导致右侧滑 $\Delta\beta > 0$，相应出现左滚恢复力矩 $\bar{L}_\beta\Delta\beta(<0)$ 和机头右偏转力矩 $\bar{N}_\beta\Delta\beta(>0)$。若 Δr 较大，$\bar{L}_\beta\Delta\beta$ 不足以克服 $\bar{L}_r\Delta r(>0)$，则偏离不能恢复，飞机继续向右缓慢略带滚转盘旋，螺旋模态运动发散。所以，若希望其稳定，应适当增大上反效应。

随着飞行速度和高度的变化，影响螺旋模态的因素比较复杂。根据式(10.10)可知，一般 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 减小对螺旋模态有利，因而高空低速飞行螺旋模态将有较快的衰减特性，而高速飞行则该模态特性下降。图10.6示出了一架超声速战斗机的螺旋模态高度、速度特性。

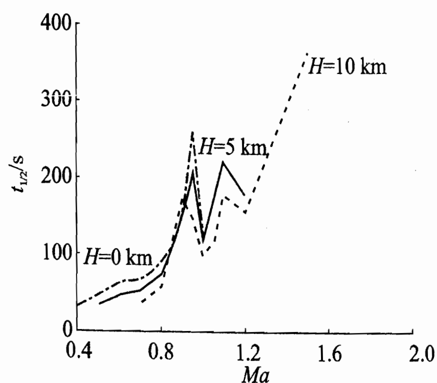


图10.6 某战斗机螺旋模态高度、速度特性

另外，式(10.8)保留了螺旋模态和滚转收敛模态的共同特性，亦可以用来得到滚转收敛模态的另一种近似。假设其中 $E \approx 0$，由式(10.8)并忽略其中的零根，得

$$\lambda_r = \bar{L}_p + \frac{\bar{L}_\beta}{\bar{N}_\beta}\left(\frac{g}{V} - \bar{N}_p\right)$$

上式右端第二项是相对于式(10.5)的修正项。

需要注意的是，高速飞机质量分布向机身轴线集中，且滚转阻尼下降，有些飞行条件下可能出现滚转收敛模态和螺旋模态耦合的低频、长周期横航向振荡模态。由式(10.8)可以近似分析滚转收敛模态和螺旋模态耦合的条件，即耦合时



$$D^2-4CE\approx(-V_*\bar{L}_p\bar{N}_\beta-g\bar{L}_\beta)^2-4V_*g\bar{N}_\beta\bar{L}_\beta\bar{N}_r<0 \tag{10.11}$$

可见,若滚转阻尼 $\bar{L}_p$ 下降、偏航阻尼 $\bar{N}_r$ 增加或者上反效应 $\bar{L}_\beta$ 下降等,都可能加剧滚转-螺旋耦合的趋势。

10.1.5 荷兰滚模态分析

荷兰滚模态运动中,虽然横向和航向运动明显耦合,但其首要特征仍然是偏航/侧滑振荡。这样在式(10.1)中略去滚转力矩方程得到

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Y}_\beta & \bar{Y}_r-1\\ \bar{N}_\beta & \bar{N}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\end{bmatrix} \tag{10.12}$$

特征方程为

$$\begin{vmatrix}\lambda-\bar{Y}_\beta & 1-\bar{Y}_r\\ -\bar{N}_\beta & \lambda-\bar{N}_r\end{vmatrix}=\lambda^2-(\bar{N}_r+\bar{Y}_\beta)\lambda+(\bar{N}_\beta-\bar{N}_\beta\bar{Y}_r+\bar{N}_r\bar{Y}_\beta)=0 \tag{10.13}$$

根据式(9.10),荷兰滚模态近似频率和阻尼比为

$$\left.\begin{aligned}\omega_{\text{n. dr}}&=\sqrt{\bar{N}_\beta-\bar{N}_\beta\bar{Y}_r+\bar{N}_r\bar{Y}_\beta}\\ \xi_{\text{dr}}&=-\frac{\bar{N}_r+\bar{Y}_\beta}{2\omega_{\text{n. dr}}}\end{aligned}\right\} \tag{10.14}$$

这里的简化方法略去了滚转自由度,有时可能导致明显的误差。尽管如此,式(10.14)仍能揭示影响荷兰滚的关键因素。另一种荷兰滚模态运动的简化分析方法是基于对滚转收敛模态和螺旋模态的近似分析,并由式(10.2),令

$$\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4=(\lambda-\lambda_s)(\lambda-\lambda_r)(\lambda^2+2\xi_{\text{dr}}\omega_{\text{n. dr}}\lambda+\omega^2_{\text{n. dr}})=0$$

展开上式,比较同此项系数(如三次方项和常数项),同样能够得到荷兰滚模态参数。该方法的准确度取决于对螺旋模态和滚转收敛模态根估计的准确度。

例: 飞机及其状态同 10.1.2 节。按照式(10.14),得到

$$\omega_{\text{n. dr}}=\sqrt{4.568(1-0/53.7)+(-0.762)(-13.691)/53.7}\ \text{rad/s}=2.182\ \text{rad/s}$$

$$\xi_{\text{dr}}=-\frac{(-0.762)+(-13.691)/53.7}{2\times 2.182}=0.233$$

$$\lambda_{\text{dr}}=-\xi_{\text{dr}}\omega_{\text{n. dr}}+\text{i}\omega_{\text{n. dr}}\sqrt{1-\xi^2_{\text{dr}}}=-0.508\pm\text{i}2.122$$

与按四阶方程得到的结果$-0.488\pm$i2.351 相比(见表 10.2),吻合较好。

由式(10.14)可见,对于具有正常横航向静稳定性的飞机,荷兰滚模态周期振荡型运动主要的恢复力矩源为 $\bar{N}_\beta>0$,其值的大小将首先影响振荡频率(注意这里偏航导数已除了偏航轴惯性矩 I_z);而 $\bar{N}_r<0$ 提供了受扰动后振荡型转动运动中的主要阻尼力矩源(能量衰减因素)。另外,左右偏航的同时,$\bar{L}_\beta\Delta\beta$ 导致左右滚转,$\bar{L}_p\Delta p$ 亦起阻尼作用;而 $\bar{N}_p\Delta p,\bar{L}_r\Delta r$ 可能起阻尼作用,亦可起激励作用。当 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 较小时,将加剧振荡。



不妨设当前具有右侧滑扰动 $\Delta\beta>0$，若 $|\bar{N}_\beta|\ll|\bar{L}_\beta|$，一方面 $\bar{N}_\beta\Delta\beta>0$ 趋于消除侧滑，另一方面过大的 $\bar{L}_\beta\Delta\beta<0$ 将激励 $\Delta\beta<0$，从而加剧振荡。

由式(10.14)和表 10.1 可知，随飞行速度及动压的增加，荷兰滚频率将增加；但由于偏航阻尼作用的减弱，则荷兰滚阻尼比趋于下降。而随着飞行高度的增加，荷兰滚频率和阻尼比将下降。特别地，高空超声速飞行由于飞机气动惯性比的下降，经常出现荷兰滚动态特性变差的问题。图 10.7 示出了一架超声速战斗机的荷兰滚模态频率和阻尼比特性。对于高空超声速飞行荷兰滚阻尼比不足的倾向，其解决方法可以通过总体气动途径或使用反馈控制器。

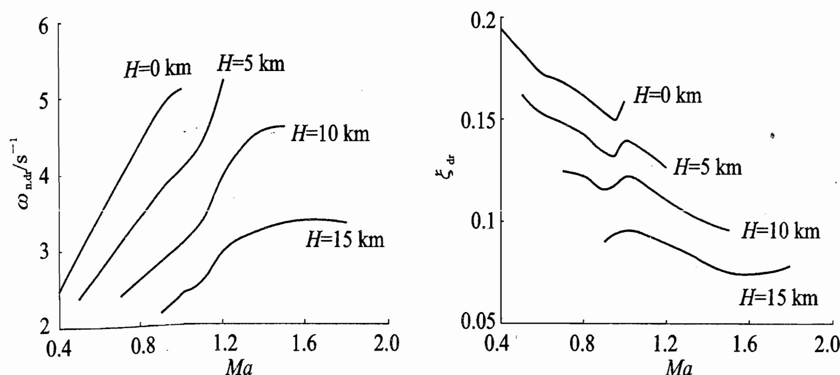


图 10.7　某战斗机荷兰滚模态高度、速度特性

10.1.6　横航向静稳定性和动稳定性的关系

荷兰滚模态和螺旋模态对横航向静稳定性相对大小具有不同的要求，因而需要进行合理折衷。

对于具有正常横航向静稳定性的飞机，当稳定性相对程度 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 过大时，飞机易产生螺旋不稳定；反之，当 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 过小时，则飞机易产生荷兰滚或飘摆不稳定。按照稳定性判别准则(见式(9.8))，螺旋不稳定对应于特征多项式常数项 $b_4<0$，而荷兰滚不稳定对应于判别式 $R<0$。因此，$b_4=0$，$R=0$ 便代表了中立稳定的情况。如果分别以 $|\bar{L}_\beta|$，$|\bar{N}_\beta|$ 为坐标轴，并假定其他参数为适当常值，将中立稳定条件画成曲线，其形状大致如图 10.8 所示。

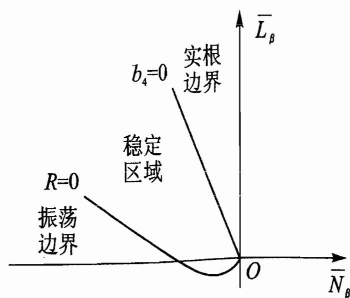


图 10.8　横航向稳定性边界图

图 10.8 中 $b_4=0$ 的曲线代表了实根(一般为螺旋模态根)稳定性的边界，$R=0$ 的曲线代表了振荡模态(常为荷兰滚模态)稳定性的边界。欲保证飞机同时具有螺旋与飘摆稳定性，必须使 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 保持适当的比值，使之处于两条边界线之间的稳定区域内。

如果其他参数变化，上述稳定边界曲线也随之变化。对于不同的飞行状态，常需要绘制不同的稳定边界图。双参数稳定边界图有时也作为气动布局时初步



选择机翼上反角和垂尾尺寸之用。

影响横向静稳定性的主要构造参数是机翼的后掠角和上反角，但是机翼的后掠角又是由保证飞机的基本性能(特别是 V_{max})所确定的，不能任意改变，所以改变 $|\bar{L}_\beta|$ 主要依靠改变上反角得到。对于采用大后掠角机翼的飞机，后掠角产生的 $|\bar{L}_\beta|$ 往往过大，为了避免引起荷兰滚不稳定，需要采用下反角。影响航向静稳定性的主要部件是垂尾。当尾臂长度确定后，航向静稳定性主要由垂尾面积决定。因此，为了获得良好的横航向动稳定性，必须合理地选择机翼的上反角和垂尾的构造参数。

横向与航向静稳定性的相对大小除了与飞机构造参数有关外，还与飞机的飞行状态有很密切的关系。对于具有大后掠翼的飞机，在低速或高空飞行时，C_L 大，而后掠角产生的横向静稳定性与 C_L 成正比，所以 C_L 增大，$|\bar{L}_\beta|$ 亦增大。另一方面，在大迎角下由于翼身对垂尾的遮蔽作用，航向静稳定性 $|\bar{N}_\beta|$ 随 C_L 增加而减小，结果比值 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 减小。所以在低速或高空飞行时，飞机容易产生飘摆不稳定。

对于超声速飞行情况，超声速飞机的机身一般细长，机身的航向静不稳定程度增加，且随 Ma 变化不大，飞机的航向静稳定性主要依靠垂尾来保证。垂尾对航向静稳定性的贡献与垂尾的升力线斜率成正比，而该斜率在超声速范围随 Ma 增加显著减小，所以在大 Ma 时，$|\bar{L}_\beta|$ 有明显下降。因为比值 $|\bar{N}_\beta|/|\bar{L}_\beta|$ 将减小，这对于飘摆稳定性同样是不利的。

由此可知，超声速飞机在高空或低速以大迎角飞行时，以及在超声速大 Ma 飞行时容易出现飘摆不稳定。因此，超声速飞机需要采用较大的垂尾，有的还同时增设背鳍、腹鳍，并配合使用适当的下反角，来保证在上述飞行状态下具有较好的飘摆稳定性。

但是，当采取上述构造措施后，可能导致飞机在飞行包线的中腹区域飞行时，航向静稳定性过大，从而使螺旋模态运动恶化，容易引起螺旋不稳定。但这种运动发展缓慢，驾驶员来得及纠正，不会对飞行安全带来重大危害。反之，由于荷兰滚模态是快变模态，需要首先保证其具有良好的特性。

对于飞行包线较宽广的超声速飞机，当仅靠气动、总体设计难以协调横航向动态特性的不同要求时，或者要以牺牲飞行性能为代价时(如由于不得不使用较大的尾面而增加阻力)，更灵活的解决方式是引入自动器。

10.1.7　现代飞机横航向模态特性

现代飞机横航向模态特性随飞行条件不同将有较大的变化，还可能出现滚转-螺旋耦合的低频振荡模态。

另外，为了减轻结构重量和气动阻力，特别是现代军用飞机，还需考虑隐身方面的需要，采用较小的垂尾是有利的。而由于飞行控制技术的发展，特别是全权限的电传操纵系统的广泛应用，为人工增稳提供了坚实的技术保障。这样，在垂尾的设计中，可以适当放宽对稳定性的考虑，而重点保障操纵效能，提供飞机抗侧滑、抗偏离的能力，或满足其他非对称飞行时的平衡

需要。当非气动操纵效能装置(如新一代推力矢量系统)更加成熟后,甚至可以舍弃垂尾。

随着飞机垂尾容积减小,将导致航向静稳定性和偏航阻尼的下降,从而使荷兰滚模态明显恶化。

图 10.9 为一架现代高性能战斗机低速飞行时随气动参数变化的横航向模态根轨迹。图 10.9 (a)为随横向静稳定性 $C_{l\beta}$的变化情况,中立 $C_{l\beta}=0$ 时,飞机具有常规的横航向模态特性,其中螺旋模态轻微不稳定(倍幅时 $T_2=59.8$ s);随着稳定性增加($C_{l\beta}$负向增大),螺旋模态根负向发展,而荷兰滚模态根则向右移动,$C_{l\beta}/C_{n\beta}\approx-1.45$ 时荷兰滚模态为临界的等幅振荡形式;若 $C_{l\beta}$继续负向增大,荷兰滚模态根进入正半平面。

图 10.9 (b)为随航向静稳定性 $C_{n\beta}$的变化情况。中立 $C_{n\beta}=0$ 时,飞机荷兰滚模态不稳定;随航向静稳定性增加,荷兰滚模态根穿过虚轴,进入稳定的左半平面;特别地,荷兰滚频率增加明显,而阻尼比改变则相对较小,正如式(10.14)所示。与此同时,随着 $C_{n\beta}$增大,螺旋模态根向不稳定方向发展。关于此问题,10.1.6 节已作了分析,其中特征方程常数项 $b_4=0$ 和判别式 $R=0$ 分别代表了螺旋模态和荷兰滚模态中立稳定的情况。

类似地,当偏航阻尼导数 $C_{nr}=0$ 时(见图 10.9(c)),荷兰滚模态和螺旋模态均不稳定(倍幅时分别为 28.3 s 和 67.0 s);随着偏航阻尼增加,荷兰滚模态和螺旋模态均逐渐稳定;对于荷兰滚模态,偏航阻尼增加,如式(10.13)所示,主要使特征根实部负向增大,从而模态衰减特性明显改善。

可见,现代飞机从提高飞行性能、减少雷达反射面积等角度,采用航向放宽静稳定性设计,其航向阻尼一般也较差,导致其横航向自然模态(特别是荷兰滚模态)不能满足需要,必须进行人工增稳。

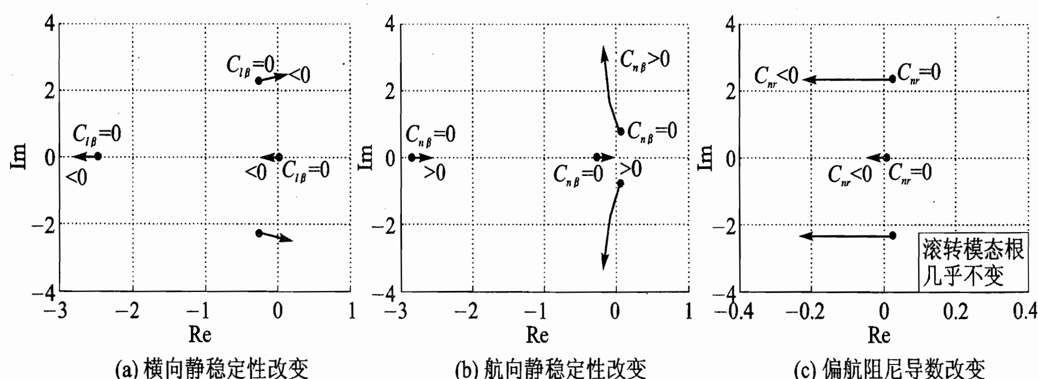


图 10.9　横航向模态根随参数的变化

10.2　飞机横航向动操纵性

飞机横向操纵一般通过驾驶杆(或驾驶盘)的侧偏(侧压)控制副翼偏角,进而控制滚转;而



航向操纵则一般通过脚蹬控制方向舵偏角，进而控制侧滑。常用的静操纵性指标包括在侧风、非对称装载、非对称推力等飞行条件下的平衡特性。

动操纵性则指驾驶员操纵驾驶杆后飞机响应的动态特性，如超调量、振荡情况和达到新的稳定状态所需时间等。对响应特性的评价指标可以在时域内要求，也可以在频域内提出。

类似于纵向，横航向操纵系统的形式也有不同种类。

本节按线性方法分析飞机对副翼和方向舵输入的响应规律。

10.2.1 对副翼的操纵反应

基本方程见式(10.1)。若按照单自由度滚转运动近似，则动力学方程如下：

$$\dot{p}=\bar{L}_p p+\bar{L}_{\delta_a}\delta_a \tag{10.15}$$

对于副翼阶跃输入，其解为

$$p(t)=-\frac{\bar{L}_{\delta_a}}{\bar{L}_p}(1-e^{\bar{L}_p t})\delta_a \tag{10.16}$$

响应的稳态值为(设飞机具有正常的滚转阻尼)

$$p(\infty)=-\frac{\bar{L}_{\delta_a}}{\bar{L}_p}\delta_a \tag{10.17}$$

可见，随着滚转阻尼增加，滚转响应速度加快，但稳态响应值下降，如图 10.10 所示。还应注意到，一定的副翼偏转角对应于一定的稳定滚转角速度(所谓副翼操纵是角速度操纵)，这一点不同于升降舵和方向舵操纵的角度操纵特点，其原因在于迎角和侧滑角是气动角，而滚转角不是。

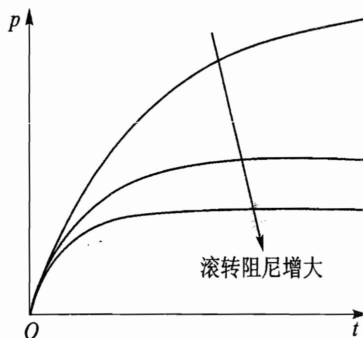


图 10.10 副翼阶跃偏转近似响应

对滚转角速度响应进行积分可得到滚转角响应。若按式(10.16)，得

$$\phi(t)=-\frac{\bar{L}_{\delta_a}}{\bar{L}_p}\left[t+\frac{1}{\bar{L}_p}(1-e^{\bar{L}_p t})\right]\delta_a \tag{10.18}$$

例：某型通用航空飞机，数据同 10.1.2 节。副翼偏转 1°(右副翼下偏)后，飞机的时域响应如图 10.11 所示。其中对比了按式(10.1)的四阶模型和本节的单自由度滚转近似模型得到的滚转角和滚转角速度响应结果。可见，单自由度滚转近似模型刻画了滚转响应的主要特性，具有较高的精度。

进一步的滚转角速度与副翼操纵频率响应对比如图 10.12 所示。在大部分频率范围内，近似模型都具有较高的精度，但在低频和荷兰滚频率附近，近似模型忽略了一些细节。

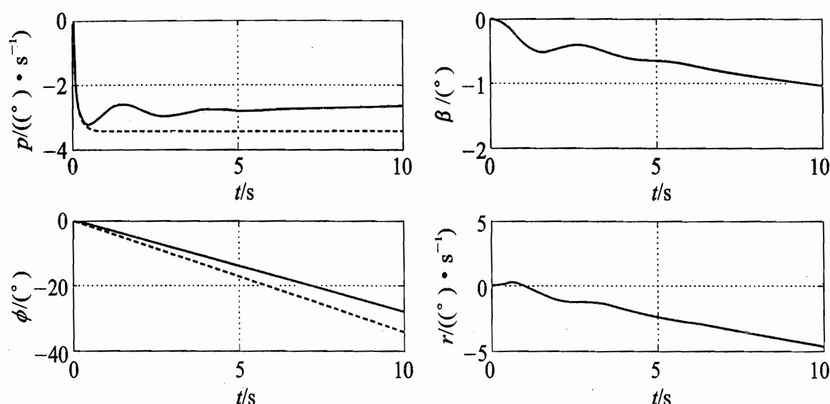


图 10.11　示例飞机副翼操纵时域响应(实线:四阶模型;虚线:单自由度近似模型;$\delta_a=1°$)

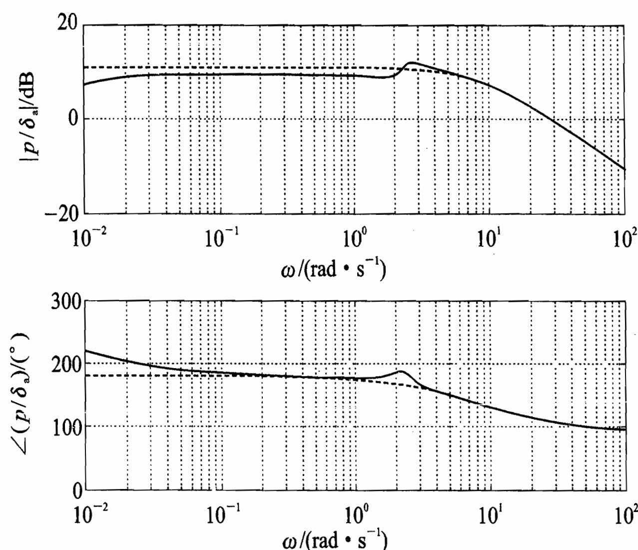


图 10.12　示例飞机副翼操纵频域响应(实线:四阶模型;虚线:单自由度近似模型)

10.2.2　对方向舵的操纵反应

基本方程仍见式(10.1)。若按照荷兰滚运动近似,则动力学方程如下:

$$\begin{bmatrix}\dot{\beta}\\ \dot{r}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Y}_\beta & \overline{Y}_r-1\\ \overline{N}_\beta & \overline{N}_r\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\ r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\overline{Y}_{\delta_r}\\ \overline{N}_{\delta_r}\end{bmatrix}\delta_r \tag{10.19}$$

例: 某型通用航空飞机,数据同 10.1.2 节。方向舵偏转 1°后(后缘左偏),飞机的时域响应如图 10.13 所示。其中对比了按式(10.1)的四阶模型和按式(10.19)的荷兰滚近似模型得到的侧滑角和偏航角速度响应结果。可见,荷兰滚近似模型能够反映侧滑角和偏航角速度响应的主要特性,具有较高的精度。



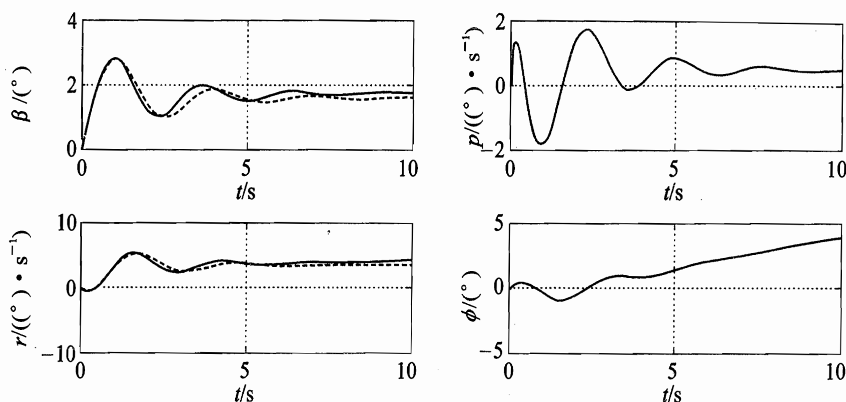


图 10.13　示例飞机方向舵操纵时域响应(实线:四阶模型;虚线:荷兰滚近似模型;$\Delta\delta_r=1°$)

更进一步的对比为对方向舵输入的频率响应,如图 10.14 所示。在大部分频率范围内(特别是高频范围),荷兰滚近似,都具有较高的精度;但对于低频特性,近似模型将导致一定的误差。

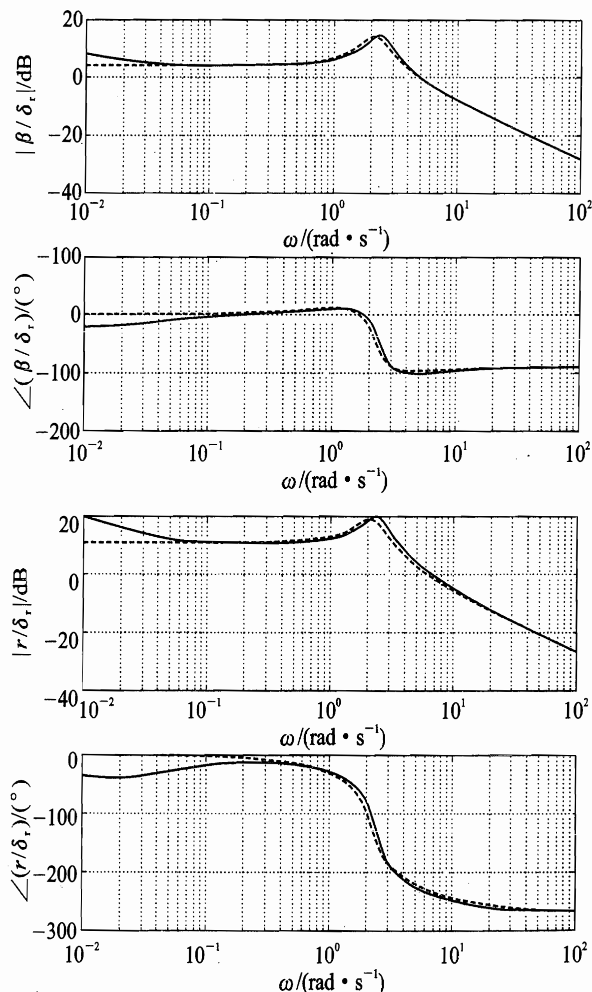


图 10.14　示例飞机方向舵操纵频域响应(实线:四阶模型;虚线:荷兰滚近似模型)

按荷兰滚近似式(10.19),可进行操纵响应的解析分析。此时传递函数分别为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\beta(s)}{\delta_{\mathrm{r}}(s)}&=\frac{N_{\beta}(s)}{\Delta(s)}=\frac{\overline{Y}_{\delta_{\mathrm{r}}}s-[\overline{Y}_{\delta_{\mathrm{r}}}\overline{N}_{r}+\overline{N}_{\delta_{\mathrm{r}}}(1-\overline{Y}_{r})]}{s^{2}-(\overline{N}_{r}+\overline{Y}_{\beta})s+(\overline{N}_{\beta}-\overline{N}_{\beta}\overline{Y}_{r}+\overline{N}_{r}\overline{Y}_{\beta})}\\\frac{r(s)}{\delta_{\mathrm{r}}(s)}&=\frac{N_{r}(s)}{\Delta(s)}=\frac{\overline{N}_{\delta_{\mathrm{r}}}s+(\overline{Y}_{\delta_{\mathrm{r}}}\overline{N}_{\beta}-\overline{N}_{\delta_{\mathrm{r}}}\overline{Y}_{\beta})}{s^{2}-(\overline{N}_{r}+\overline{Y}_{\beta})s+(\overline{N}_{\beta}-\overline{N}_{\beta}\overline{Y}_{r}+\overline{N}_{r}\overline{Y}_{\beta})}\end{aligned}\right\}\tag{10.20}$$

其中分母多项式

$$\Delta(s)=s^{2}-(\overline{N}_{r}+\overline{Y}_{\beta})s+(\overline{N}_{\beta}-\overline{N}_{\beta}\overline{Y}_{r}+\overline{N}_{r}\overline{Y}_{\beta})=s^{2}+2\xi_{\mathrm{dr}}\omega_{\mathrm{n.dr}}s+\omega_{\mathrm{n.dr}}^{2}\tag{10.21}$$

可见,当荷兰滚模态稳定时,阶跃操纵响应的稳态值取决于分子常数项。一般方向舵后缘左偏转产生稳定的右侧滑;但偏航角速度的方向则不一定,当侧力操纵导数 $Y_{\delta_{\mathrm{r}}}$ 相对较小时,方向舵后缘左偏转产生稳定的左偏转角运动,反之,则是右偏转角运动。本节示例是后者情形。

最后需要强调的是,迄今的分析主要应用了小扰动线性化模型,实际提供了横航向操纵响应“如何开始”的信息。事实上,随着响应的发展,运动将偏离“小扰动”的适用范围,例如滚转角远远超出近似对称的运动范围,这时应该考虑其他非线性因素。关于这方面的问题,请参阅其他更深入的书籍。

10.3 带自动器飞机的横航向操纵性和稳定性特性

本节介绍常用横航向自动器对飞机操纵性和稳定性特性的影响。

10.3.1 滚转阻尼器

飞机使用滚转阻尼器是为了改善滚转阻尼特性。图 10.15 为此类自动器的工作原理图。其中角速度传感器感受到滚转角速度信号后,经过放大作为舵机移动信号,并通过助力器带动舵面朝着阻止飞机转动的方向偏转,其效果相当于加大了滚转阻尼力矩。

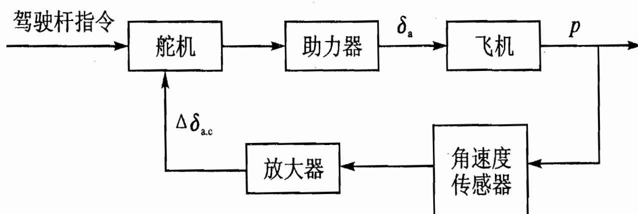


图 10.15 滚转阻尼器结构图

如果按照理想控制器分析,即不考虑阻尼器中舵机、助力器等元件本身动态特性的影响,可得副翼偏角与滚转角速度之间的关系(即控制方程)如下:

$$\Delta\delta_{\mathrm{a}}=K_{p}p\tag{10.22}$$

式中 K_p 为滚转角速度对副翼偏度的反馈增益,$K_p>0$。附加气动阻尼导数增量为



$$\Delta L_p = K_p L_{\delta_a}, \qquad \Delta N_p = K_p N_{\delta_a} \tag{10.23}$$

由此，滚转阻尼器的作用在于增加滚转阻尼导数和偏航交叉阻尼导数，一般情况下，$|L_{\delta_a}| \gg |N_{\delta_a}|$，故增加滚转阻尼是主要的。由式(10.5)、式(10.16)和式(10.17)可知，这将减少滚转模态时间常数和横向操纵的调节时间，这是精确滚转操纵所希望的；但它同时降低了滚转响应的稳态值，从而降低了滚转性能。因此，反馈增益 K_p 的大小应根据具体飞机的构形、飞行状态和飞行任务等因素综合考虑确定。类似于纵向情况，一般对于飞行包线较大的飞机，反馈增益亦应该随飞行状态调节。

10.3.2 滚转角控制系统

滚转角控制的目的是使飞机按指令的滚转姿态飞行，如在巡航中保持水平姿态，或者实现需要的协调转弯。对于后者，还需要其他通道或者其他回路的控制器共同工作，完成需要的控制任务。就滚转姿态控制而言，其基本任务是消除滚转角误差 $(\phi-\phi_c)\to 0$，显然最有效的控制是通过调节副翼偏角，如图 10.16 所示。

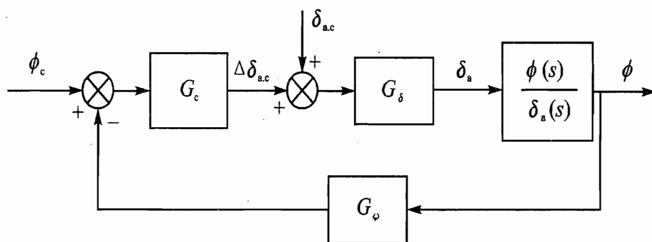


图 10.16 滚转角控制系统

忽略传感器和助力器动力学时，控制方程为

$$\Delta\delta_a = G_c(\phi_c - \phi) \tag{10.24}$$

式中 G_c 为控制器的传递函数。

若按照理想控制器和飞机单自由度滚转模型进行原理性分析，则飞机运动的传递函数简化为

$$G_{\phi\delta_a}(s) = \frac{\phi(s)}{\delta_a(s)} = \frac{\bar{L}_{\delta_a}}{s(s-\bar{L}_p)} \overset{\text{def}}{=\!=} \frac{A_\phi}{s(s+\lambda_r)} \tag{10.25}$$

其中当荷兰滚极点与分子零点充分接近时，上式较准确。并取简单比例控制器，即

$$G_c(s) = -K_\phi \tag{10.26}$$

则系统闭环传递函数为

$$G_{\phi\phi_c} = \frac{\phi(s)}{\phi_c(s)} = \frac{-K_\phi \bar{L}_{\delta_a}}{s^2 - \bar{L}_p s - K_\phi \bar{L}_{\delta_a}} \tag{10.27}$$

根据稳定性判别准则，当 $K_\phi>0$ 时，闭环系统稳定。在横向单位阶跃操纵下，稳态响应为

$$\phi_{ss} = \lim_{t\to\infty}\phi(t) = 1 \tag{10.28}$$

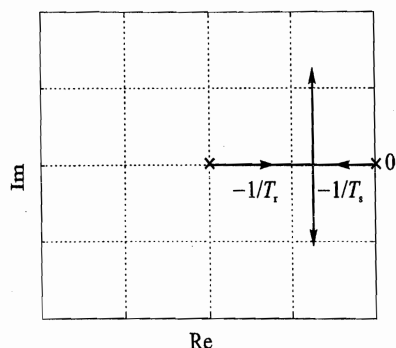


图 10.17 简化的滚转角反馈系统根轨迹（单自由度滚转模型）

飞机将稳定在相应的倾斜位置，改变了原来横向操纵属于“角速度操纵”的特性。

另一方面，从动态特性而言，随着反馈增益 K_ϕ 值的增加，螺旋模态和滚转收敛模态根逐渐靠拢，并逐渐耦合成共轭复根，如图 10.17 所示。特别当飞机本身滚转阻尼较小时，更易耦合成衰减较慢、周期较长的振荡运动，这常常是不希望的。为了消除或减轻不利影响，可以在引入滚转角反馈的同时，还引入滚转角速度反馈。此外，如果要求指令响应无静差，可引入误差积分信号，并形成典型的 PID 反馈结构如下：

$$\Delta\delta_a = K_c(\phi-\phi_c)+K_p p+K_I\int(\phi-\phi_c)\mathrm{d}t \qquad (K_c>0,\quad K_p>0,\quad K_I>0) \tag{10.29}$$

其中，反馈增益的具体值可按古典控制方法分回路逐一选取，并进行校正；或者通过现代控制理论迭代求解。需要注意的是，设计仍应该根据四阶横航向动力学模型，并应考虑助力器、传感器等动力学特性的影响。

10.3.3 偏航阻尼器

为了改善荷兰滚模态阻尼特性，需要增加等效偏航阻尼 $\overline{N}_r$，从反馈控制的角度，最有效的方法是在方向舵通道中引入偏航角速度反馈信号，即形成偏航阻尼器。类似于俯仰阻尼器，控制方程为

$$\Delta\delta_r = K_r G_f(s) r \qquad (K_r>0) \tag{10.30}$$

当取 $G_f(s)=1$ 时，等效的气动导数增量为

$$\Delta N_r = K_r N_{\delta_r},\qquad \Delta L_r = K_r L_{\delta_r} \tag{10.31}$$

$|N_{\delta_r}|\gg|L_{\delta_r}|$，故增加偏航阻尼是主要的。

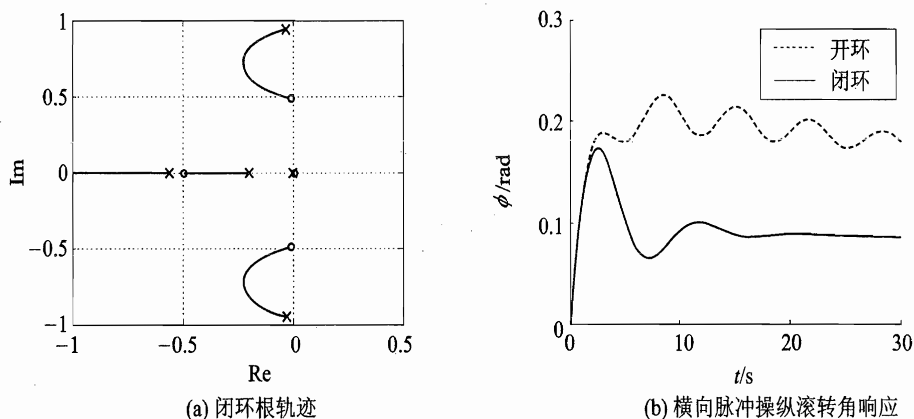
需要注意的是，尽管偏航阻尼器能改善横航向动态特性，但当有常值偏航角速度时，阻尼器将使方向舵有一稳态偏角，这容易给驾驶员操纵带来麻烦。例如，飞机向右定常盘旋时，$r=$常值>0，偏航阻尼器将使方向舵后缘左偏，$\Delta\delta_r>0$，而事实上向右定常盘旋（无侧滑）需要方向舵后缘右偏，$\Delta\delta_r<0$，显然这将使驾驶员操纵困难。为此，可在偏航阻尼器中增加清洗网络，其高通滤波器的作用，即控制器总的形式为

$$G_c(s) = K_r G_f(s) = K_r\frac{\tau s}{\tau s+1} \tag{10.32}$$

式中 τ 和 K_r 的选取视具体的横航向动力学而定，$\tau\to\infty$ 即是无清洗网络的情况。根据系统的具体要求，K_r 也可以随飞行状态调节。



例：某型旅客机，巡航状态为高度 12 000 m，Ma 为 0.8。其自然(开环)荷兰滚模态阻尼比为 0.035，无阻尼自振频率为 0.95 rad/s，显然阻尼比太低，动态特性中将呈现持续、不易衰减的荷兰滚振荡运动。为此设计偏航阻尼器，其控制方程如式(10.30)、式(10.32)。根据偏航角速度对方向舵输入的开环零、极点分布，选择清洗网络时间常数 $\tau=5$ s，随增益 K_r 变化的根轨迹如图 10.18(a)所示，其中阻尼器能使荷兰滚模态阻尼比最大提高到 0.305，相应的增益 $K_r=2.07\ (°)/((°)\cdot s^{-1})$，此时飞机横向脉冲操纵响应与使用阻尼器(开环)对比如图 10.18(b)所示，显然闭环飞机的动态特性得到明显改善，同时清洗网络的引入使飞机稳定飞行特性与开环时一致。



(a) 闭环根轨迹　　(b) 横向脉冲操纵滚转角响应

图 10.18　偏航阻尼器

10.3.4　偏航增稳系统

当飞机航向静稳定性相对于横向静稳定性偏低时，将导致不利的荷兰滚模态特性。为了解决飞行范围大的高速飞机的航向静稳定性要求不易通过总体、气动设计全面协调的问题，可以在方向舵通道中引入侧滑角或侧向过载反馈信号，一般还同时引入偏航角速度反馈改善偏航阻尼特性，形成所谓偏航增稳系统。

如果按照理想控制器分析，并且暂时忽略清洗网络(高通滤波器)的作用，可得控制方程如下：

$$\Delta\delta_r = K_r r + K_\beta \beta \tag{10.33}$$

式中 K_r，K_β为偏航角速度和侧滑角对方向舵偏度的反馈增益。附加的气动导数增量为

$$\Delta N_r = K_r N_{\delta_r}, \qquad \Delta N_\beta = K_\beta N_{\delta_r} \tag{10.34}$$

从力学的观点，通过反馈的作用将部分操纵效能转换成了相应的偏航阻尼力矩和静稳定力矩，从而改善了飞行模态特性。

可是在控制实现时，往往由于侧滑角信号不易精确测量，故常用侧向加速度反馈信号代替。但应注意，侧向加速度计的安装位置对闭环特性影响较大；若安装在飞机重心前面某距离

x_a处，则侧向加速度计感受到的实际值为

$$n_y \approx \frac{V_*}{g}(\overline{Y}_\beta \beta + \overline{Y}_{\delta_r}\delta_r) + \frac{x_a \dot{r}}{g} \tag{10.35}$$

所以，适当选择 x_a，可以得到

$$n_y \approx \frac{V_*}{g}\overline{Y}_\beta \beta \tag{10.36}$$

从而，侧向过载信号反馈等效于侧滑角反馈。

例：某电传操纵战斗机横航向控制通道的简化框图如图 10.19 所示。其横向通道有滚转阻尼器，并实现滚转角速度指令控制。航向通道通过侧向过载反馈增加等效航向静稳定性，同时使用经过高通滤波器的信号（$r-p\alpha$）反馈增加风轴系偏航阻尼。其中风轴系偏航角速度为

$$r_w = r\cos\alpha - p\sin\alpha \approx r - p\alpha$$

还要特别注意，横向通道和航向通道有耦合连接（增益为 K_{ARI}），即所谓副翼-方向舵交联。这将在 10.3.5 节讨论。通过适当的选参，得到了全包线内操纵稳定特性良好、驾驶员满意的闭环系统。图 10.19 还示出了传感器、助力器等实际系统元件的动力学模型，对于控制系统更细致的分析、验证必须考虑这些环节。

图 10.19 典型电传操纵飞机横航向控制框图



10.3.5 副翼-方向舵交联

目前机动飞机的使用迎角越来越大，甚至还有超过失速迎角的可控机动飞行。当大迎角机动时，若仅绕机体轴滚转，则存在迎角和侧滑角交替变化的趋势。但明显的侧滑一般是不希望的，故需要保持飞机近似绕速度矢量滚转。实现途径有多种，其中之一是使方向舵偏角随副翼偏角自动调节，即所谓副翼-方向舵交联。这除了对于保证无侧滑滚转机动有效外，对于协调转弯也是有利的。通过副翼-方向舵交联的适当设计，再配合良好的风轴系偏航阻尼器，可在直到失速迎角前较大的飞行范围内机动近似无侧滑。

副翼-方向舵交联装置的调节规律为

$$\Delta\delta_r = K_{ARI}\Delta\delta_a \tag{10.37}$$

根据侧向动力学关系，忽略侧力影响，得

$$\dot{\beta} = r\cos\alpha - p\sin\alpha \tag{10.38}$$

欲保持 $\dot{\beta}\to 0$，则

$$r/p = \tan\alpha \tag{10.39}$$

若近似认为角速度正比于自动器操纵面偏转引起的加速度，则

$$\frac{\overline{N}_{\delta_a}\Delta\delta_a + \overline{N}_{\delta_r}K_{ARI}\Delta\delta_a}{\overline{L}_{\delta_a}\Delta\delta_a + \overline{L}_{\delta_r}K_{ARI}\Delta\delta_a} = \tan\alpha \tag{10.40}$$

由此确定增益

$$K_{ARI} = -\frac{\overline{N}_{\delta_a} - \overline{L}_{\delta_a}\tan\alpha}{\overline{N}_{\delta_r} - \overline{L}_{\delta_r}\tan\alpha} \tag{10.41}$$

可见，交联增益与迎角有关，所以必须随迎角调参，如图10.19所示。

10.3.6 飞行航线稳定系统

飞行航线是预定的飞行轨迹在地球上的投影。通常是由局部弧线组成的折线，即由预定航路起始点、中间点(航路点)和终点组成的大圆弧线。在大圆坐标系中局部弧线变为直线，如图10.20所示。

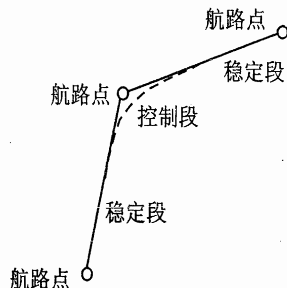


图10.20　航线飞行示意图

预定航线的中间点坐标，由飞机导航综合系统的机载计算机根据沿线地面导航站资源确定。导航系统还确定出偏离预定航线的侧向偏差。根据此偏差，生成滚转角控制系统的指令信号 ϕ_c，通过跟踪信号，飞机获得适当的倾斜姿态并转到期望的航线，最终保证按预定航线飞行。另外，最大允许的指令信号应根据实际飞机的机动性确定，即 $|\phi_c|\leqslant\phi_{max}$，这也就决定了对实际偏差的最大修正能力。

根据控制要求，航线的自动飞行控制可分为两类，其一是预定航线的稳定，通常是为了保持直线飞行；另一类是航线的控制，需要在航线中间点附近实现飞行方向的变换。

航线稳定的任务是消除侧向偏离 Δy，此时相应的输入指令 $\Delta y_c=0$。对于预定航线的稳定，其飞机倾斜操纵是不大的。通过在方向舵通道中引入侧向过载 n_y 反馈，以保持零侧滑飞行。在预定的任务中倾斜和偏航运动可认为是解耦的。所以在研究航线操纵动态特性时可采用如图 10.21 所示的结构图。倾斜运动和侧向偏离运动之间的关系在 $n_n=1$ 条件下可用近似传递函数表示为

$$G_{y\phi}(s)=\frac{g}{s^2} \tag{10.42}$$

滚转角控制回路传递函数为

$$G_{\phi\phi_c}(s)=\frac{1}{\left(\dfrac{1}{-A_\phi K_\phi}\right)s^2+\left(\dfrac{\lambda_r-A_\phi K_p}{-A_\phi K_\phi}\right)s+1}\overset{\text{def}}{=\!=}\frac{1}{T_\phi^2s^2+2T_\phi\xi_\phi s+1} \tag{10.43}$$

所以航线稳定系统的开环传递函数为

$$G_{\text{sys}}(s)=\frac{g}{s^2(T_\phi^2s^2+2T_\phi\xi_\phi s+1)}G_c(s) \tag{10.44}$$

可见，为了使系统稳定，控制器必须引入侧向偏离导数信号(侧移速度)

$$G_c(s)=K_y(1+T_ys) \tag{10.45}$$

具体的参数将根据稳定性余量、截至频率等要求确定。

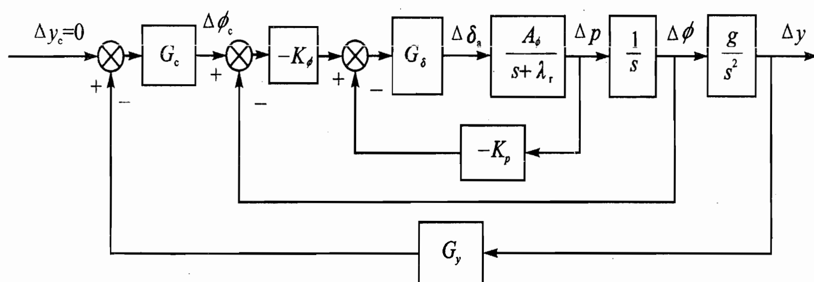


图 10.21 航线稳定系统

10.4 飞机横航向飞行品质

对于有人驾驶飞行器，飞行品质要求是飞行控制设计的重要依据。因为横航向运动涉及两个轴，横向和航向运动耦合，飞行品质要求比纵向更为复杂。本节介绍一些基本的横航向飞行品质要求内容。

1. 滚转模态特性

滚转横态特性通常以滚转模态时间常数 $T_r=-1/\lambda_r$ 来要求。时间常数越小，扰动运动衰



减越快，飞机对副翼操纵的滚转反应便越迅速、精确，驾驶员的评价越高。对于战斗机机动飞行时，要获得较好的飞行品质评价，要求 T_r 不大于 1 s。

2. 螺旋模态特性

螺旋模态根很小，扰动运动发展缓慢，驾驶员有足够的时间加以纠正。因此，一般并不严格要求这一模态是稳定的，而只要求发散不要太快，通常以倍幅时 t_2 来表示，如有些飞机飞行品质规范规定 $t_2>20$ s 即可满足要求。

3. 荷兰滚模态特性

对于振荡的荷兰滚模态，决定模态特性的因素为阻尼 $\xi_d\omega_d$、阻尼比 ξ_d 和无阻尼自然频率 ω_d 等。一般来说，荷兰滚阻尼越大、频率越高，荷兰滚衰减就越迅速，驾驶员的评价就越好。有些飞行品质规范要求满意的荷兰滚特性为 $\xi_d\omega_d\geqslant 0.35$ rad/s，$\xi_d\geqslant 0.19$，$\omega_d\geqslant 1$ rad/s，等等。

4. 滚转操纵性能

横向操纵的目的一般是使飞机倾斜，改变升力平面，从而改变飞机航向。要求操纵后尽快产生要求的滚转角速度和滚转角。例如，有些规范规定，对于战斗机空战飞行阶段，要求横向操纵应有能力使飞机在操纵后第 1 s 内至少滚转过 90°，2.8 s 内应能滚转 360°。

需要注意的是，滚转性能主要要求飞机"滚得快"。近来对于战斗机，还要求具有能迅速达到并保持在某一特定滚转角的能力，即所谓敏捷性的要求，这除了包含对滚转性能(副翼操纵效能)的要求外，还要求飞机具有精确操纵的能力。

5. 横向操纵引起的滚转角速度振荡

横向操纵飞机后，滚转角速度一般并不严格呈现一阶系统反应形式，荷兰滚模态将有影响，这是驾驶员所不希望的，通常要求对滚转角速度和滚转角的振荡加以限制。例如，有些规范规定，横航向操纵输入引起的滚转角速度的第一个极大值 p_1(峰值)与第一个极小值 p_2(谷值)应具有相同的符号(如图 10.22 所示)，并且滚转角速度方向与横向操纵的方向应一致；在战斗和起落阶段，p_2/p_1 应不小于 60 %。

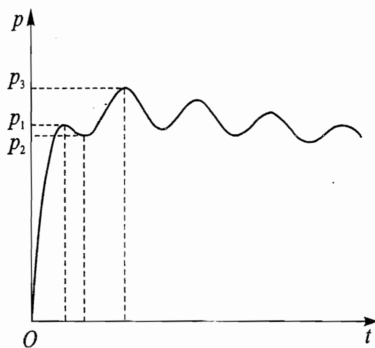


图 10.22 滚转角速度响应振荡

6. 横向操纵引起的侧滑幅值要求

横向操纵飞机后，不仅引起飞机的横向运动，同时还产生航向和侧滑运动，其中侧滑运动是不希望有的，所以品质规范提出了对侧滑幅值的限制。

7. 非对称飞行时的横航向静操纵要求

非对称飞行包括非对称装载、非对称推力、侧风和其他带侧滑条件下的飞行。一般要求飞机足以平衡设定的非对称参数条件，脚蹬力适中，操纵方向协调。以侧滑飞行为例，要求右侧滑飞行时，希望用向右倾斜的姿态、右滚转力和左偏航操纵力使飞机平衡，并且脚蹬力不要过大。

8. 带自动器飞机的飞行品质

飞机使用反馈控制后，除了飞机的固有模态特性会改变之外，由于控制器的使用会引进新的模态。同纵向一样，对于飞行品质的评价，除了推广应用无自动器飞机的飞行品质指标外，还提出了许多新的评价指标。

而且由于自动器的引入，特别是主动控制技术的应用，飞机飞行动力学表现特性多样化，导致飞行品质指标内容也大大丰富。

关于这部分内容，超出了本书的范围，读者可参考其他资料。

复习思考题

10.1　试说明飞机横航向动稳定性与静稳定性的区别与联系。

10.2　试说明飞机横航向扰动运动典型模态的特点、物理成因以及影响模态特性的主要气动导数。

10.3　如何由图 10.11 估算飞机的滚转阻尼 $\overline{L}_p$ 和滚转操纵效能 $\overline{L}_{\delta_a}$？

10.4　若飞机的横航向特征方程为

$$\lambda^4 + 5.8\lambda^3 + 11.8\lambda^2 + 72.6\lambda + E = 0$$

试求振荡模态为中立稳定时 E 的值，并近似确定螺旋模态的特征根。

10.5　已知某飞机有关几何数据为

$$W = 58\ 840\ \text{N}, S = 23\ \text{m}^2, b = 7.15\ \text{m}, I_x = 3\ 217\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_z = 46\ 780\ \text{kg}\cdot\text{m}^2, I_{xz} = 0$$

有关气动数据为

$$C_L = 0.0937,\quad \alpha = 0.051\ 2\ \text{rad}$$

$$C_{y\beta} = -0.894,\quad C_{n\beta} = 0.101,\quad C_{l\beta} = -0.054\ 4$$

$$C_{lr} = 0.056,\quad C_{lp} = -0.18,\quad C_{nr} = -0.5,\quad C_{np} = 0.094$$

已知此时飞机飞行在 H=15 000 m，Ma=1.8。试分别用四阶方程和近似方法计算典型模态特性。

10.6　为了改变飞机横航向运动的三个模态特性，分别在哪些通道中选择哪些运动参数作为反馈参数最为有效？

第 11 章　飞机空间运动稳定性和操纵性

一般情况下，飞机的扰动运动或操纵运动都是空间的，其中纵向运动参数（迎角、俯仰角和俯仰角速度等）和横航向运动参数（侧滑角、滚转角、滚转角速度和偏航角速度等）均同时发生变化。当飞机运动参数变化的幅度小时，描述纵向和横航向运动的方程可近似地进行分离。当运动参数变化的幅度大时，分离的方程将导致很大的误差，此时必须应用描述一般空间运动的全量方程组。

飞机在基本飞行包线内广泛进行绕纵轴滚转的机动，例如当进入/改出盘旋、战斗转弯、平飞和进入俯冲时的半滚、变转弯方向的盘旋（“8”字形特技）等。因此在飞行动力学中需要着重应用完整的全量方程组对其进行分析。

图 11.1 给出了在飞机空间运动的基本特征参数——迎角 α 和旋转角速度 ω 平面内，划分具有不同运动特性的区域。不论对于机动或非机动类飞机，从飞行安全性要求考虑，偏离、尾旋和惯性旋转等所谓的临界飞行状态，都是需要尽量回避，或者一旦不经意进入后能够尽快改出的，所以这类运动的特性是飞机空间运动问题中的又一重要部分。其中，临界状态一般是指飞行中失去稳定性，或是某一操纵面（如横向操纵）失效。

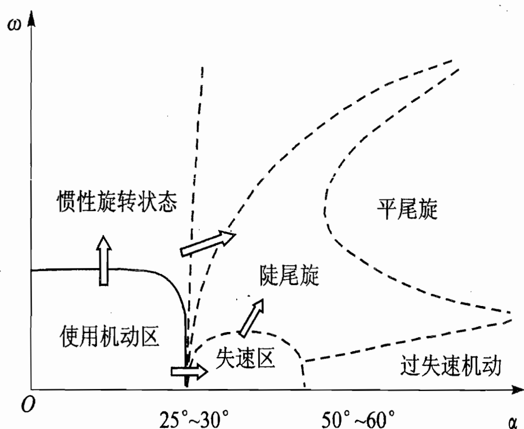


图 11.1　飞机空间运动的典型区域划分

还要注意到，为了提高空战效能，现代飞机（战斗机）的机动范围超出了常规的飞行包线，也就是其使用包线范围覆盖了一部分稳定性和操纵性变坏的区域（有偏离倾向的区域），甚至允许进行能返回基本飞行状态的过失速机动。因此，飞机空间运动的新问题之一就是关于过失速机动特性问题。

在上述问题中，当然还涉及当飞行员同时使用纵向和横向操纵，而在许多情况下也使用航向操纵时飞机的操纵运动特性。由此可知，飞机空间运动问题实际上涉及了最一般情况下飞机的运动及其稳定性和操纵性。

从飞行动力学的角度，空间机动运动的明显特点是出现各种程度的纵、横交感，如气动力、运动学、惯性和陀螺交感等。

研究飞机空间机动运动的动力学特性，首先可通过简化的动力学数学模型，认识其运动机

理，导出某些稳定性判据作为飞机设计准则，以防止飞机进入临界飞行范围；随后设计自动器控制律，改善飞机处于临界飞行状态的稳定性，或者限制飞机进入可能的临界状态区，或者让飞机退出临界飞行状态；再取完整的动力学数学模型，应用微分方程定性、定量理论，结合仿真对飞机进行全面分析，显然模拟仿真时要研究大量的方案（计算状态），得出较真实的响应；最后将从模拟得到的结果与试飞结果相比较，进行相关性分析。近年来，由定性分析方法和半实物模拟相结合得到了大量有意义的空间运动动力学结果。

研究空间运动动力学时，应注意现代机动类飞机在布局上的一系列特点，如常使用展弦比不大的细长翼，质量分布主要集中在机身，从而导致飞机绕 Ox 轴惯性矩 I_x 小，而 I_y，I_z 较大。这些质量分布的变化和其他的布局特点，可能成为不利于飞机空间运动稳定性和操纵性的因素。

另外，随着主动控制技术的广泛使用，现代飞机空间机动飞行的特点和模式趋于多样化。了解这些发展和变化是十分必要的。

本章首先介绍空间机动中出现各类运动耦合的力学机理；其次分析急滚、偏离和尾旋的动力学特点；然后讨论如何限制飞机进入失稳区域，或偶然进入后能自动改出的控制系统特点；最后介绍放宽静稳定性、直接力控制和过失速飞行，以反映现代飞机空间飞行动力学的新特点、新趋势。

11.1 纵横向运动耦合机理

引起纵横向运动耦合的因素，主要有运动、惯性、陀螺和气动力耦合等几种类型。下面分别介绍其耦合机理。

11.1.1 运动耦合

运动耦合存在于飞机滚转角速度非零时。如果纵、航向是中立静稳定的（$C_{m\alpha}=0$，$C_{n\beta}=0$），则偏转副翼飞机将绕纵轴 Ox 旋转，在初始迎角 $\alpha_0\neq0$、速度 $V=$常值时，迎角和侧滑角之间有周期性的变化，其频率等于滚转角速度 p，如图 11.2 所示。如果飞机是静稳定的（$C_{m\alpha}<0$，$C_{n\beta}>0$），则俯仰和偏航方向的恢复力矩（$M_\alpha\alpha$，$N_\beta\beta$）使旋转轴偏离纵轴 Ox。

为了进一步认识飞机绕 Ox 轴的滚转运动，取两种极端的情况讨论。其一，假定静裕度足够大（相应于俯仰和偏航无阻尼自振频率 $\omega_{n,sp}$，$\omega_{n,dr}$ 较大）而滚转角速度小的情形，即 $|p|\ll\min(\omega_{n,sp},\omega_{n,dr})$。在俯仰和偏航静稳定力矩的作用下，飞机最终将以不变的迎角和侧滑角绕速度矢旋转。其二，如果滚转角速度超过飞机的无阻尼自振频率，即 $|p|\gg\max(\omega_{n,sp},\omega_{n,dr})$，则运动将有本质的变化。此时飞机由于滚转角速度很大，气动恢复力矩对运动影响又很小，迎角和侧滑角来不及有显著的周期变化，飞机基本上绕其纵轴旋转。当 $|p|\to\infty$ 时，飞机将像陀螺一样飞行。



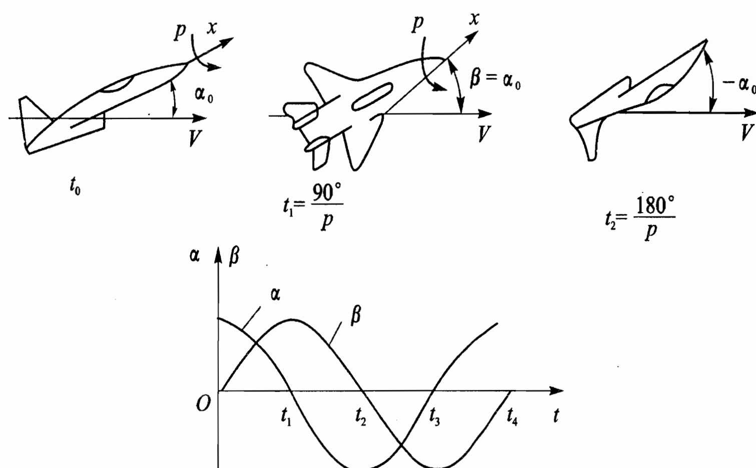


图 11.2 运动学耦合机理图

11.1.2 惯性耦合

当飞机不绕其某一惯性主轴旋转时，将会产生俯仰和偏航惯性力矩。下面以俯仰运动为例来分析惯性耦合的物理现象。

将飞机的质量分布简化成集中在二互相垂直的轴 Ox 和 Oz 上，且绕 $O\xi$ 轴以角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 旋转，如图 11.3 所示。取 Ox 轴上单位质量为 $\mathrm{d}m$ 的 A 点，其离重心距离为 x，则旋转运动引起的惯性力（离心力）大小为

$$\mathrm{d}F^A = \omega^2 x \sin(\alpha - \alpha_\omega)\mathrm{d}m$$

式中 α_ω 为旋转轴 $O\xi$ 与飞行速度矢量 $\boldsymbol{V}$ 之间的夹角。此力形成绕 Oy 轴的惯性俯仰力矩

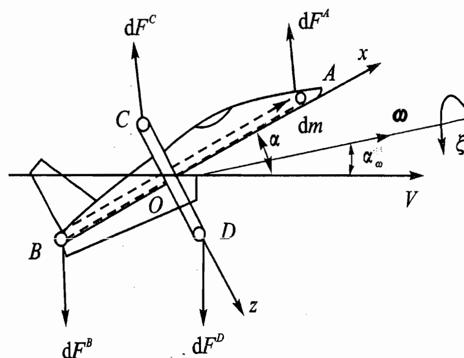


图 11.3 惯性耦合机理图

$$\mathrm{d}M_{\mathrm{ic}}^A = x\cos(\alpha - \alpha_\omega)\mathrm{d}F^A = \frac{1}{2}\omega^2 \sin 2(\alpha - \alpha_\omega) x^2 \mathrm{d}m$$

沿 Ox 轴的所有质量元产生的俯仰惯性力矩可由积分得到，即

$$M_{\mathrm{ic}}^{Ox} = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha - \alpha_\omega)\omega^2 \int x^2 \mathrm{d}m = \frac{1}{2}\sin 2(\alpha - \alpha_\omega)\omega^2 I_z$$

考虑到旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$ 在 Ox 轴和 Oz 轴中的分量

$$\omega_x \overset{\mathrm{def}}{=\!=} p = \omega\cos(\alpha - \alpha_\omega), \qquad \omega_z \overset{\mathrm{def}}{=\!=} r = \omega\sin(\alpha - \alpha_\omega)$$

则上式可写成常见形式

$$M_{\mathrm{ic}}^{Ox} = I_z r p$$

对于 Oz 轴上的质量元也可写出类似表达式

$$M_{\mathrm{ic}}^{Oz} = -\frac{1}{2}\sin 2(\alpha - \alpha_\omega)\omega^2 I_x = -I_x r p$$

因此飞机总的俯仰惯性力矩为

$$M_{ic}=M_{ic}^{Ox}+M_{ic}^{Oz}=(I_z-I_x)rp \tag{11.1}$$

用类似方法可写出偏航惯性力矩

$$N_{ic}=\frac{1}{2}(I_x-I_y)\sin 2(\beta-\beta_\omega)\omega^2=(I_x-I_y)pq \tag{11.2}$$

实际上,式(11.1)、式(11.2)的结果,在飞机刚体转动动力学方程式(6.14)中也直接得到表现。现代高速飞机构形的特点是 $I_y \gg I_x, I_z \gg I_x$,因此惯性耦合将对飞机空间机动动力学有很大的影响。另外,由公式可见,随旋转角速度 ω 大小的增加,或者转轴对惯性主轴的偏离程度增加等变化,都将使惯性耦合增强。

11.1.3　陀螺耦合

当飞机旋转轴与发动机转子转轴不重合时,像任何一种陀螺一样,为了回应外力矩,飞机开始沿正交的方向运动,或者说形成陀螺力矩 $\boldsymbol{M}_{陀}=I_p\boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{\omega}$,其中 $\boldsymbol{\omega}$ 为飞机旋转角速度,$I_p\boldsymbol{\omega}_p$ 为发动机转子动量矩(如米格—21 飞机发动机在自转状态下为 2 550 N・m)。

对于右旋的发动机($\omega_p>0$),陀螺力矩在体轴上的投影为

$$L_{陀}=0,\qquad M_{陀}=-I_p\omega_p r,\qquad N_{陀}=I_p\omega_p q \tag{11.3}$$

由于发动机陀螺力矩的影响使得当飞机绕俯仰方向作机动飞行时($\omega\neq0$)出现侧滑角,而当绕偏航方向旋转时迎角发生变化,如图 11.4 所示。

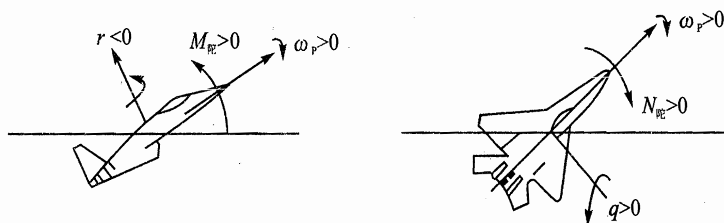


图 11.4　陀螺耦合机理图

11.1.4　气动耦合

纵向和横航向的气动耦合,首先表现为迎角对横航向气动力和力矩的影响。一般除阻力外,侧滑角对纵向气动力和力矩影响相对较小。

图 11.5 为某现代高机动飞机的主要横航向气动特性。可见在小迎角时($\alpha<15°$),除了 $C_{l\beta}$,C_{lr} 和 C_{np} 外,其余横航向气动力系数几乎与 α 无关。对于与迎角有关的气动力系数,有时可近似采用线性化模型,如 $C_{l\beta}=C_{l\beta,0}+(\partial C_{l\beta}/\partial\alpha)_0\cdot\alpha$ 的形式。在大迎角($\alpha>15°$)后,几乎所有气动力系数都具有鲜明的非线性特征。



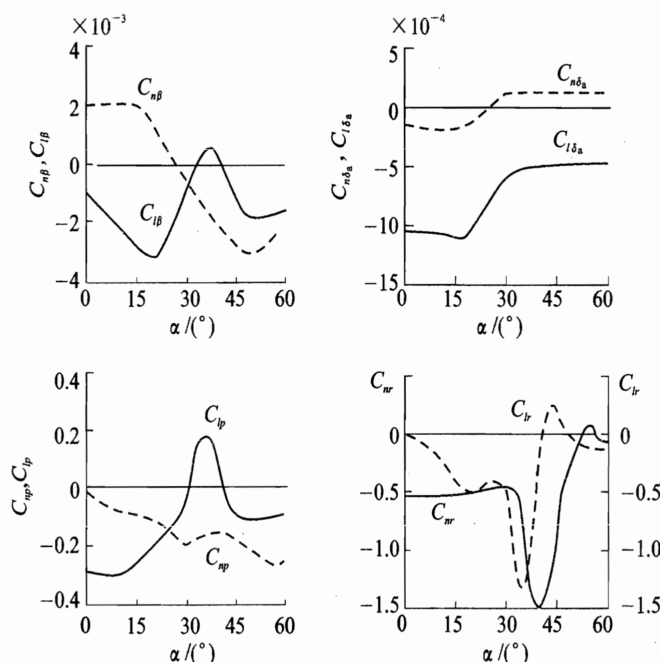


图 11.5 横航向主要气动导数随迎角变化

11.2 急滚动力学

现代超声速飞机由于其惯性矩分布像拉长的椭球体(即 $I_x \ll I_y, I_x \ll I_z$)，而且具有较大的横向静稳定性(上反效应)，故在急滚机动飞行时可能会丧失运动稳定性和可操纵性。其首要原因是惯性耦合的作用。因此，飞机完成带有急滚的空间机动的能力会受到限制。实际应用中，常会在飞行员驾驶守则内，加入一系列的限制要求以避免出现危险。下面具体分析急滚时的稳定性特点。

假设飞机基准飞行是绕水平直线的定常滚转，其滚转角速度保持很大的常值 p_*，飞行速度 V 保持不变，且 $q_* = r_* = \alpha_* = \beta_* = 0$；迎角 α 和侧滑角 β 变化不大，气动系数可以用线性表达式；对于急滚运动 $p_* \gg g/V$，则重力和气动力作用下的轨迹弯曲对旋转运动的影响很小；为了简化，还假设不计交叉力矩和交叉惯积 I_{xz}。在这些假设条件下，可以忽略滚转和速度动力学方程，得到急滚扰动运动的近似线性化方程组如下：

$$\left.\begin{aligned}
\Delta\dot{\alpha} &= \Delta q - p_0\Delta\beta - Z_\alpha\Delta\alpha - Z_{\delta_e}\Delta\delta_e \approx \Delta q - p_*\Delta\beta \\
\Delta\dot{\beta} &= p_*\Delta\alpha - \Delta r + \overline{Y}_\beta\beta + \overline{Y}_{\delta_r}\delta_r \approx p_*\Delta\alpha - \Delta r \\
\Delta\dot{q} &= Ap_*\Delta r + \overline{M}_\alpha\Delta\alpha + \overline{M}_q\Delta q + \overline{M}_{\delta_e}\Delta\delta_e \\
\Delta\dot{r} &= -Bp_*\Delta q + \overline{N}_\beta\Delta\beta + \overline{N}_r\Delta r + \overline{N}_{\delta_a}\Delta\delta_a + \overline{N}_{\delta_r}\Delta\delta_r
\end{aligned}\right\} \tag{11.4}$$



式中

$$A=(I_z-I_x)/I_y,\qquad B=(I_y-I_x)/I_z$$

对于急滚运动的稳定性问题,式(11.4)相应的特征方程为

$$\begin{vmatrix} \lambda & p_* & -1 & 0 \\ -p_* & \lambda & 0 & 1 \\ -\overline{M}_\alpha & 0 & \lambda-\overline{M}_q & -Ap_* \\ 0 & -\overline{N}_\beta & Bp_* & \lambda-\overline{N}_r \end{vmatrix}=0 \tag{11.5}$$

展开后为关于 λ 的四阶方程,形如

$$\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4=0$$

左端项各次系数取决于飞机的惯性和气动特性,以及滚转运动本身的参数。若不计阻尼 $\overline{M}_q$,$\overline{N}_r$,则特征方程为

$$\lambda^4+b_2\lambda^2+b_4=\lambda^4+[\overline{N}_\beta-\overline{M}_\alpha+(AB+1)p_*^2]\lambda^2+(Ap_*^2+\overline{M}_\alpha)(Bp_*^2-\overline{N}_\beta)=0 \tag{11.6}$$

对于大多数常规飞机,一般情况 $\overline{N}_\beta>0$,$\overline{M}_\alpha<0$,特征方程式系数 $b_2>0$,飞机能够实现定常滚转的必要条件为

$$b_4=(Ap_*^2+\overline{M}_\alpha)(Bp_*^2-\overline{N}_\beta)>0 \tag{11.7}$$

若定义

$$\begin{aligned}\omega_\alpha &\overset{\text{def}}{=\!=}\sqrt{-\overline{M}_\alpha/A}=\sqrt{-M_\alpha/(I_z-I_x)}\\ \omega_\beta &\overset{\text{def}}{=\!=}\sqrt{\overline{N}_\beta/B}=\sqrt{N_\beta/(I_y-I_x)}\end{aligned} \tag{11.8}$$

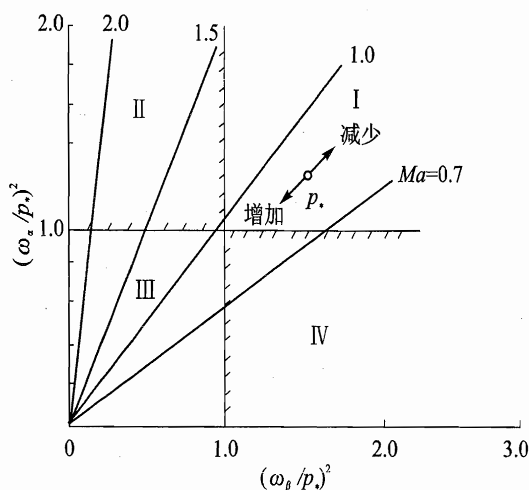


图 11.6 飞机急滚稳定边界(不计阻尼)

则条件式(11.7)等效于

$$\left.\begin{aligned}\omega_\alpha^2/p_*^2<1\\ \omega_\beta^2/p_*^2<1\end{aligned}\right\}\quad\text{或}\quad\left.\begin{aligned}\omega_\alpha^2/p_*^2>1\\ \omega_\beta^2/p_*^2>1\end{aligned}\right\}$$

下面以 ω_α^2/p_*^2 和 ω_β^2/p_*^2 为坐标,作出定常滚转运动稳定边界图,如图 11.6 所示。由图可见,边界线将整个区分成四个区域,其中Ⅰ区和Ⅲ区为稳定区域,Ⅱ区为偏航发散区,Ⅳ区为俯仰发散区。其物理解释如下。

Ⅰ区是稳定区。该区俯仰和偏航静稳定性均较大,飞机在滚转运动中俯仰和偏航恢复力矩有保持原有迎角和侧滑角的趋势;而 p_* 相对较小,$|p_*|<\omega_\alpha$,$|p_*|<\omega_\beta$。如果要使迎角和侧滑角增大的惯性耦合力矩 $(I_z-I_x)p_*\Delta r$ 和 $(I_x-I_y)p_*\Delta q$ 的作用相对较小,即



$$(I_z - I_x)p_*^2\Delta r < -M_\alpha\Delta\alpha$$

$$-(I_y - I_x)p_*^2\Delta q < N_\beta\Delta\beta$$

则滚转运动将是稳定的，迎角、侧滑角基本保持原状态，如图 11.7 所示。

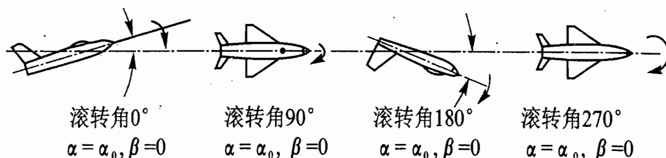


图 11.7 Ⅰ区内飞机的滚转运动状态(p_*较小，α和β几乎不变)

Ⅲ区也是稳定区。该区俯仰和偏航静稳定性较小，相应的俯仰、偏航恢复力矩很小；而 p_* 相对较大，$|p_*|>\omega_\alpha$，$|p_*|>\omega_\beta$，惯性耦合力矩相对于恢复力矩极大，飞机在滚转运动中较小的恢复力矩尚来不及发挥作用，因此飞机近似绕主惯性轴旋转，迎角和侧滑角发生周期性交替变化。此时滚转运动类似于陀螺稳定，运动的典型特点如图 11.8 所示。

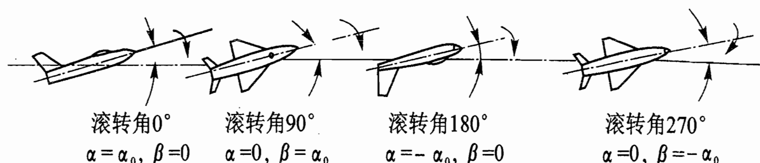


图 11.8 Ⅲ区内飞机的滚转运动状态(p_*很小，α和β交替变化，类似陀螺转动)

Ⅱ区是偏航发散区。该区 $\omega_\beta<p_*<\omega_\alpha$，飞机在滚转运动中，俯仰恢复力矩较大，产生较大的俯仰角速度 Δq，使偏航惯性耦合力矩 $(I_x-I_y)p_*\Delta q$ 随之增加，而偏航恢复力矩较小，不足以平衡，故飞机将出现偏航发散。

Ⅳ区是俯仰发散区。该区 $\omega_\beta>p_*>\omega_\alpha$，结果与Ⅱ区刚好相反。飞机在滚转运动中产生的俯仰惯性耦合力矩 $(I_z-I_x)p_*\Delta r$ 较大，俯仰恢复力矩无法予以平衡，故飞机出现俯仰发散。

如图 11.6 所示，对于给定飞机，在某基准飞行状态(例如 $Ma=0.7$)，以不同滚转角速度飞行时，其稳定性情况在稳定边界图上，可用一条过原点的直线表示。直线的斜率为

$$\frac{\omega_\alpha^2}{\omega_\beta^2} = -\frac{C_{m\alpha}c(I_y - I_x)}{C_{n\beta}b(I_z - I_x)}$$

可见，随着 p_* 增加，稳定性特征点沿直线向原点移动。当 $p_*=\omega_\alpha$ 时飞机进入俯仰发散区，或 $p_*=\omega_\beta$ 时飞机进入偏航发散区。

不同飞行状态下，仅仅导数 $C_{m\alpha}$ 和 $C_{n\beta}$ 随 Ma 而变。一般情况下，如图 11.6 中实例，随 Ma 增加，$|C_{m\alpha}|/|C_{n\beta}|$ 趋于增加，故直线斜率随之增加。飞机将由俯仰不稳逐渐变到偏航不稳。这正是现代高速飞机急滚运动的特点。由直线与稳定边界线的交点，可以找出每个飞行状态下的不稳定滚转速度范围(ω_α,ω_β)。亚声速飞行状态 $\omega_\alpha<\omega_\beta$；而超声速飞行状态 $\omega_\alpha\geqslant\omega_\beta$。

在真实有旋转阻尼的情况下，特征方程为



$$\lambda^4+b_1\lambda^3+b_2\lambda^2+b_3\lambda+b_4=$$
$$\lambda^4+(-\overline{M}_q-\overline{N}_r)\lambda^3+[\overline{N}_\beta-\overline{M}_\alpha+(AB+1)p_0^2+\overline{M}_q\overline{N}_r]\lambda^2+$$
$$[\overline{M}_\alpha\overline{N}_r-\overline{N}_\beta\overline{M}_q-(\overline{M}_q+\overline{N}_r)p_0^2]\lambda+[(Ap_0^2+\overline{M}_\alpha)(Bp_0^2-\overline{N}_\beta)+\overline{M}_q\overline{N}_rp_0^2]=0 \quad (11.9)$$

定义

$$\left.\begin{aligned}\xi_\alpha &\overset{\text{def}}{=\!=}-\frac{\overline{M}_q}{2\omega_\alpha A}=-\frac{M_q}{2\sqrt{-(I_z-I_x)M_\alpha}}\\ \xi_\beta &\overset{\text{def}}{=\!=}-\frac{\overline{N}_r}{2\omega_\beta B}=-\frac{N_r}{2\sqrt{(I_y-I_x)N_\beta}}\end{aligned}\right\} \quad (11.10)$$

根据特征方程常数项 $b_4\geqslant 0$ 条件，得出的急滚稳定的必要条件为

$$\left(\frac{\omega_\alpha^2}{p_*^2}-1\right)\left(\frac{\omega_\beta^2}{p_*^2}-1\right)+4\xi_\alpha\xi_\beta\frac{\omega_\alpha}{p_*}\frac{\omega_\beta}{p_*}\geqslant 0 \quad (11.11)$$

某超声速飞机急滚稳定边界图如图 11.9 所示。可见，在阻尼的作用下，飞机急滚的稳定范围扩大。图中还画出了同一 Ma、不同飞行高度下的稳定边界，随高度下降阻尼力矩增加，从而使得稳定区进一步增大。

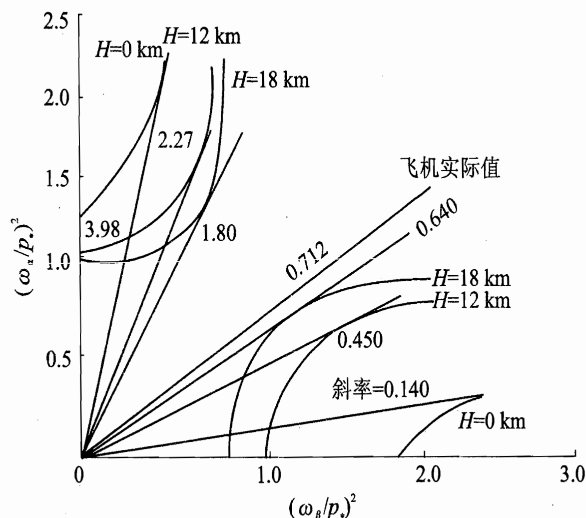


图 11.9　飞机急滚稳定边界(计及阻尼)

11.3　偏离动力学

现代飞机设计，常应用各种技术和手段提高最大升力系数。例如现代战斗机广泛采用近距耦合鸭翼-三角翼布局，或者具有前缘边条，以利用涡升力提高最大升力系数 $C_{L\max}$。然而在达到 $C_{L\max}$ 前，由于大迎角下气流分离区的发展，气动力矩特性出现 $C_{m\alpha}>0$，$C_{n\beta}<0$ 等失稳变化，结果会造成飞机偏离或者失控，亦即预示着飞机失速。常见的失速现象如下。



纵向偏离(上仰):是一种非指令的、突然的迎角增大现象;

机头侧偏:是一种非指令的、偏航方向发散现象;

机翼摇晃;是一种非指令的、主要是滚转方向的频率较高的振荡现象。

无论何种偏离,通常均为失控运动的初始阶段,发展下去成为更深度而且稳定的失控运动,如深失速、尾旋等。其中进入稳定的尾旋飞行时,迎角大于失速迎角,绕三个轴旋转,同时航迹线为小半径的螺旋线,飞行高度迅速下降;深失速是一种超过失速迎角,而旋转角速度很小、下降率较高的失控状态。

除了失稳,飞机的操纵性一般也急剧下降,甚至出现反操纵。为了避免或者改善这类不良飞行特性,首先要进行精心的气动设计,如在飞机头部安装涡流发生器、吹气装置等各种涡系控制装置,改善气流的分离特性;现代先进战斗机还使用推力矢量系统等。

当操纵面(装置)有足够效能时,自动控制增稳系统可以明显地减小或延缓大迎角不良现象,甚至完全消除飞机发生偏离的可能性。根据飞机的用途,应提供迎角限制,或者在不限制机动飞行范围的情况下,直接消除飞机动态特性的危险征候。

研究和掌握偏离区内飞行动力学特点,无论对提高机动性能,还是对保障大迎角下的飞行安全,都有重大意义。

11.3.1　纵向偏离

纵向俯仰运动偏离通常与俯仰力矩随迎角变化的非线性有关。如图 11.10 所示的典型俯仰力矩特性中,曲线开始上翘意味着开始出现非指令的自动上仰趋势。而若飞机同时进行滚转等机动,惯性耦合将加重上仰趋势。

当低头下俯力矩不足时,将导致俯仰发散。为了避免纵向偏离,对飞机的气动布局的要求之一,就是必须在大迎角全偏平尾时,产生不低于某一量级,如 $\Delta C_m = -0.05$ 的下俯力矩。对任何飞机构形,若应用推力矢量力矩,实际上完全可能解决这个问题。

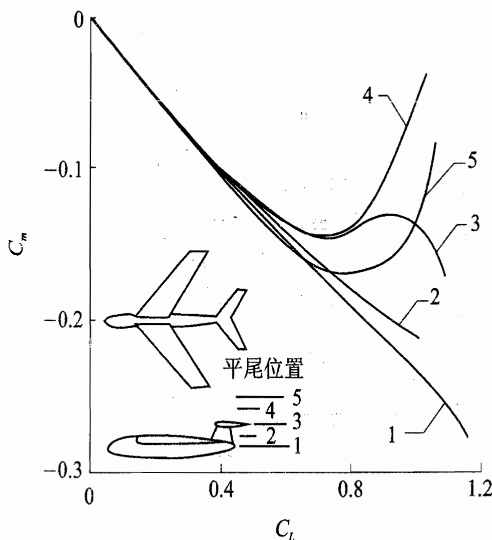


图 11.10　不同平尾位置时的俯仰力矩特

11.3.2　横航向偏离

大迎角出现横航向运动偏离是现代机动飞机最典型的特点。这时因为气动力矩系数随迎角、侧滑角和旋转角速度的关系通常变成非线性的,飞机可能丧失静稳定性,$C_{n\beta}<0$,$C_{l\beta}>0$,

或丧失滚转气动阻尼，$C_{l_p}>0$ 等；无侧滑情况下可能产生明显的不对称侧力和滚转、偏航气动力矩；此外，非定常气动力如导数 $C_{l\dot{\beta}}$，$C_{n\dot{\beta}}$ 作用也很强。气动参数和迎角有很大关系，在很窄的迎角变化范围内，其数值就可能有很大变化。这样的气动特性导致在飞行员不干预的情况下会产生自发、强烈的运动，出现各种形式的失稳，表现为机头侧偏、机翼下沉和自振运动等。

为了延缓或者消除偏离现象发生，可以对气动布局进行精心设计和修形。图 11.11(a)示出了改善飞机大迎角气动特性的一些典型措施，其气动效果如图 11.11(b)所示，可见，非对称侧偏特性得到显著消除，最大升力区的俯仰力矩非线性明显减弱。

(a) 改善装置

---原始构型；—— 加入改善装置，增加垂尾展长

(b) 力矩特性对比

图 11.11 大迎角气动力矩特性的改善



11.3.3　偏离预测判据

为了延缓或避免偏离现象发生，在飞机设计过程中需要一些简化的预测偏离出现的工程判据。这些判据通常是按照各种偏离的运动机理，对飞行动力学方程进行线性化，并根据飞机设计实践进行提炼和修正得到。

在飞机设计初始阶段，一般仅有静态风洞试验数据，因而与之相适应的判据称为静态判据，因为其原始数据来源有限，其预测结果一般仅提供初步参考。有了动态风洞试验数据后，可以通过全局稳定性分析等方法得出判据，谓之动态判据。对于偏离运动的进一步发展趋势，线性方法已不可能预测，而必须分析大迎角下空间运动方程的非线性特性。

对于不用自动控制系统增稳、而且失稳区域限于最大升力区以前的飞机，常用的半经验的稳定性工程判据通常如下。

1. 静态判据

(1) 偏航发散参数 $C_{n\beta}(\alpha,\beta)$

高速飞机出现偏离，而后进入尾旋的一个主要因素是，大迎角下失去航向静稳定性，造成绕立轴的自转，故可将 $C_{n\beta}(\alpha,\beta)=0$ 作为最简单的偏离边界。下面以某机为例，用 α 表示纵坐标，β 表示横坐标，按偏离边界 $C_{n\beta}(\alpha,\beta)=0$ 绘成的曲线如图 11.12 所示。

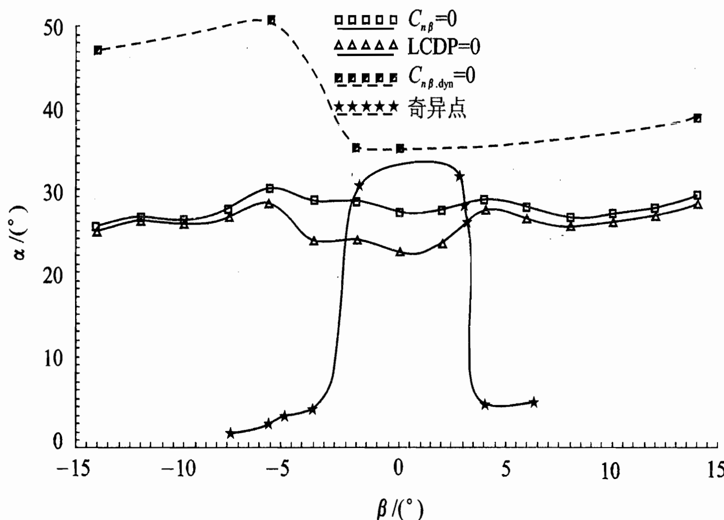


图 11.12　偏离敏感边界图

由图可见，在 $\beta=\pm15°$ 范围内，只要 $\alpha<30°$，飞机具有航向静稳定性，不易出现偏离现象。

(2) 偏航动态发散参数 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$

偏航动态发散参数又称为侧滑偏离参数，目前作为飞机偏离敏感性常用的判据之一。其定义为

$$C_{n\beta.\mathrm{dyn}}(\alpha,\beta)=C_{n\beta}(\alpha,\beta)\cdot\cos\alpha-\frac{I_z}{I_x}C_{l\beta}(\alpha,\beta)\cdot\sin\alpha \tag{11.12}$$

认为 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}>0$ 将不会产生偏航方向发散。

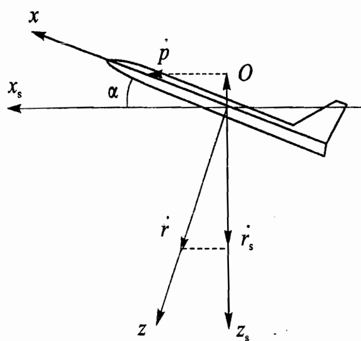


图 11.13　稳定轴系航向静稳定性

由侧滑角产生的滚转、偏航角加速度在稳定轴系的 Oz_s 上投影(见图 11.13)，即得侧滑角加速度表示式

$$\ddot{\beta}=-\dot{r}_s\approx-\left(\frac{C_{n\beta}}{I_z}\cos\alpha-\frac{C_{l\beta}}{I_x}\sin\alpha\right)\beta q_* Sb=-C_{n\beta.\mathrm{dyn}}\frac{q_* Sb}{I_z}\beta$$

可见偏航动态发散参数即是稳定轴系航向静稳定性参数。显然，当 $C_{n\beta.\mathrm{dny}}>0$，正侧滑产生的 $\ddot{\beta}<0$，即无侧滑偏离发散的趋势。

示例飞机按边界条件 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}(\alpha,\beta)=0$ 所得曲线形状如图 11.12 所示。与按边界条件 $C_{n\beta}(\alpha,\beta)=0$ 相比，预测出现偏航发散的迎角有所增大。

另外，为了预防偏航发散，通常还应对侧偏力矩进行限制，一般设计要求为直到最大升力迎角，保证

$$|C_n|_{\beta=0}<0.01 \tag{11.13}$$

(3) 横向操纵偏航发散参数 LCDP

该参数是飞机偏离敏感性常用判据之一，主要预测进行横向操纵时，当不利偏航力矩超越偏航静稳定力矩而引起的偏航发散的现象。对于仅操纵副翼时，也称为副翼操纵偏航发散参数 AADP，定义为

$$\mathrm{AADP}=C_{n\beta}(\alpha,\beta)-C_{l\beta}(\alpha,\beta)\frac{C_{n\delta_a}(\alpha,\beta)}{C_{l\delta_a}(\alpha,\beta)} \tag{11.14}$$

在飞机存在侧滑的条件下，若为了保持姿态水平不倾斜，则副翼操纵偏角可按横向静平衡条件求得

$$\delta_a=-\frac{C_{l\beta}(\alpha,\beta)}{C_{l\delta_a}(\alpha,\beta)}\cdot\beta$$

这一操纵量在存在偏航交叉操纵影响时，构成带侧滑飞行中对偏航静稳定性的修正，如式(11.14)所示。当 AADP>0 时，则有自动消除侧滑趋势，飞机偏航方向稳定。

示例飞机按 AADP=0(也是此飞机的 LCDP=0)条件，得到的边界曲线如图 11.12 所示，可见，最低的发散迎角降到 $\alpha=25°$以下，不利偏航的影响还比较可观。

现代飞机为提高机动性而使用较大的飞行迎角，为了减小运动学耦合导致的较大侧滑角，常采用副翼-方向舵交联系统，基本控制方程可写为

$$\delta_r=K(\alpha)\delta_a$$



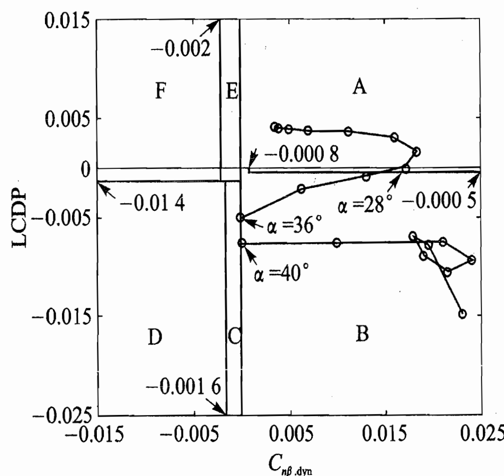
此时的横向操纵偏离参数可写成

$$\mathrm{LCDP} = C_{n\beta}(\alpha,\beta) - C_{l\beta}(\alpha,\beta)\left[\frac{C_{n\delta_a}(\alpha,\beta)+K(\alpha)C_{n\delta_r}(\alpha,\beta)}{C_{l\delta_a}(\alpha,\beta)+K(\alpha)C_{l\delta_r}(\alpha,\beta)}\right] \tag{11.15}$$

当 LCDP >0 时，则横向操纵时飞机偏航方向稳定。

(4) Weissman 组合偏离判据

这是由 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$ 和 LCDP 组合成的偏离判据。根据大量飞行试验和飞行模拟结果，可在由 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$ 和 LCDP 坐标平面上，划分出不同偏离特性区域，如图 11.14 所示。使用时，以迎角作为参变量，作出实际飞机的偏离特性曲线，从而判断其失速以及尾旋敏感程度。图 11.14 示出了一架飞机偏离预测的情况，其中 $\beta=0°$。可以判断，该飞机迎角在 28°时进入轻度偏离区，并随迎角增大一直保持在轻度偏离区，尽管迎角 36°～40°时接近中度偏离区。另外，不同侧滑角，曲线形状有所不同，偏离迎角会有所差别，一般随侧滑值加大，临界迎角减小。



A 区—无偏离区；
B 区—轻度偏离区，横向操纵将有偏航发散趋势；
C 区—中度偏离区，有轻微偏航发散趋势，而一旦同时有横向操纵，则偏航发散明显；
D 区—强烈偏离区；
E 区—中度偏航发散区，如果进行横向操纵，则发散趋势有所抑制；
F 区—强烈偏航发散区，发散将非常迅速，尽管进行横向操纵时发散趋势可能会受到抑制

图 11.14　Weissman 组合偏离判据

(5) $\beta+\delta$ 轴稳定性判据

这是由 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$ 和 LCDP 组合成的另一种偏离判据，用来预测偏离迎角。定义两个角度

$$\left.\begin{aligned}\alpha_{-\beta} &= \alpha - \arctan\left(\frac{C_{n\beta}I_x}{C_{l\beta}I_z}\right)\\ \alpha_{\delta} &= \alpha - \arctan\left(\frac{C_{n\delta}I_x}{C_{l\delta}I_z}\right)\end{aligned}\right\} \tag{11.16}$$

飞机运动将出现不稳定趋势，当

$$\alpha_{-\beta} < 0 \qquad 或者 \qquad \alpha_{\delta} > \alpha_{-\beta} \tag{11.17}$$

实际上，$\alpha_{-\beta}=0$ 对应于 $C_{n\beta.\mathrm{dyn}}=0$，而 $\alpha_{\delta}=\alpha_{-\beta}$ 对应于 LCDP$=0$，解释如下。

由图 11.15 可见，侧滑引起的飞机瞬态反应，应由 $L_{\beta}\beta$ 引起的 $\dot{p}$ 和 $N_{\beta}\beta$ 引起的 $\dot{r}$ 综合确定，其合成方向称 β 轴。按图示几何关系，$\alpha_{-\beta}$ 即为 β 轴与 Ox_s 轴之间的夹角。



显然，当 $\alpha_{-\beta}$，或

$$\alpha-\arctan\left(\frac{C_{n\beta}I_x}{C_{l\beta}I_z}\right)<0$$

因为通常飞机具有横航向静稳定性，$C_{l\beta}<0$ 和 $C_{n\beta}>0$，于是上式可改写成

$$C_{n\beta}\cos\alpha-\frac{I_z}{I_x}C_{l\beta}\sin\alpha=C_{n\beta.\,\mathrm{dyn}}<0$$

可见不稳定边界 $\alpha_{-\beta}<0$ 对应着偏航动态发散参数 $C_{n\beta.\,\mathrm{dyn}}<0$。

α_δ 的含义类似 $\alpha_{-\beta}$。由图 11.15(b)可见，舵偏角 δ(包含 δ_a 和 δ_r)产生的飞机瞬态反应，将由 $L_\delta\delta$ 和 $N_\delta\delta$ 力矩确定，合成角加速度方向称 δ 轴。α_δ 即为 δ 轴与 Ox_s轴之间的夹角。

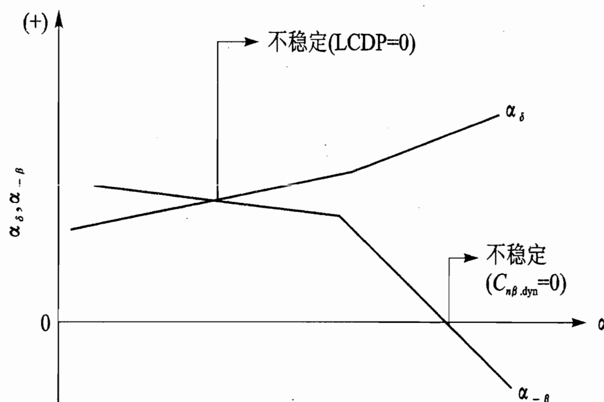
于是

$$\alpha_\delta-\alpha_{-\beta}=\arctan\left(\frac{C_{n\beta}I_x}{C_{l\beta}I_z}\right)-\arctan\left(\frac{C_{n\delta}I_x}{C_{l\delta}I_z}\right)>0$$

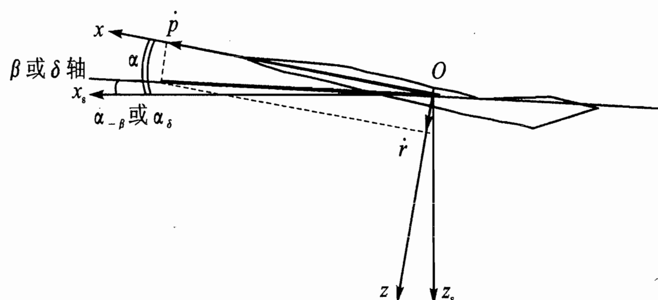
通常飞机具有横航向静稳定性，$C_{l\beta}<0$ 和 $C_{n\beta}>0$；操纵导数 $C_{l\delta}<0$ 和 $C_{n\delta}<0$。上式改写成

$$C_{n\beta}-C_{l\beta}\frac{C_{n\delta}}{C_{l\delta}}=\mathrm{LCDP}<0$$

这表明不稳定边界 $\alpha_\delta-\alpha_{-\beta}>0$ 对应着横向操纵偏航发散参数 LCDP<0。



(a) 判据图



(b) β轴与δ轴定义

图 11.15　β+δ 轴偏离判据



最后再举一例，对某架飞机根据上述判据进行大迎角稳定性判断结果如下：

判据	失稳迎角范围(限于 $\alpha<40°$)
$C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$	27.6°～35.5°
AADP	>23°
$\beta+\delta$ 轴偏离判据	>23°
$C_{m\alpha}$	16°～23°

根据模拟结果，迎角范围在16°～23°和28°以上，无操纵时飞行失稳，而且迎角16°～23°时运动的发散是在纵向，$C_{m\alpha}$判据预测了这一发散；$C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$大致预测出偏航发散迎角区，所以作为航向稳定性判据它是成功的。AADP表明在迎角为23°以上副翼操纵(修正倾斜姿态)导致偏航发散，模拟结果表明迎角约24°时，副翼操纵后首先横向、随之纵向运动发散，与AADP判断的偏离趋势吻合。至于$\beta+\delta$轴偏离判据，所得结果与AADP或$C_{n\beta.\mathrm{dyn}}$相当。

2. 动态判据

在取得飞机的动态风洞试验结果后，应用微分方程定性理论，进行全局稳定性分析，得出所谓的偏离预测动态判据。

将机体-机体系飞机的非线性运动方程组写成一般形式如下：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta}) \tag{11.18}$$

在忽略速度大小和重力对运动影响的情况下，方程常为五阶非线性微分方程。状态变量$\boldsymbol{x}=[\alpha,\beta,p,q,r]^{\mathrm{T}}$。对于常规飞机，操纵变量$\delta=[\delta_{\mathrm{a}},\delta_{\mathrm{r}},\delta_{\mathrm{e}}]^{\mathrm{T}}$。

首先求出平衡状态，令

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\delta})=\boldsymbol{0} \tag{11.19}$$

显然平衡状态将是5×3维空间曲线。在具体实用计算时，将轮换固定操纵变量δ中的两个，平衡状态仅随一个操纵变量变化，于是得到平衡曲线

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{g}(\delta_i)$$

式中δ_i可以是δ_{a}，δ_{r}，δ_{e}中的任何一个。

然后，判别各平衡状态的稳定性。按微分方程定性理论可以定义雅可比矩阵为

$$F=\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{\mathrm{e}}\qquad(i,j=1,2,\cdots,5) \tag{11.20}$$

式中下标e指某一满足式(11.19)的平衡状态。当雅可比矩阵出现奇异时，该平衡状态称为分歧点。其分歧点特性与雅可比矩阵的秩R有关。当出现$(n-R)=1$时，式中n为方程阶次(这里为五阶)，表示雅可比矩阵$\boldsymbol{F}$的特征值存在零值，则平衡状态出现“S”型的突然变化，称为突跃，即飞机将会突然出现偏离现象。由此可以提炼出偏离判据。

通过大量实例计算分析表明，动态偏离判据常可以用不同的方向舵偏角δ_{r}和升降舵偏角δ_{e}，求得雅可比矩阵出现零特征值的平衡状态，以此作为偏离状态。示例飞机按此分析求得的

偏离状态参数表示在图 11.12 上。可见在侧滑角 $\beta\pm3°$内，当迎角 $\alpha<32°$时，飞机不会出现偏离现象；而侧滑增大后，偏离出现的迎角明显减小。与其他偏离判据相比，对于侧滑角影响的预测更加明显、准确。

当然，仅考虑 δ_r和 δ_e操纵下的突跃偏离状态也有一定的局限性。故在实际使用中，还需要根据具体机型进一步扩充分析范围，并通过飞行模拟予以验证。

11.3.4 机翼摇晃

机翼摇晃是一种以绕机身轴滚转为主的不衰减的自激振荡运动，属于极限环振荡。飞行员的感受主要为滚转振荡，同时也有俯仰振荡和偏航振荡，但振幅较小，所以称为机翼摇晃。这种极限环振荡在各种飞机构形中都出现过，如美国的 F—15，F—16，X—29 和 X—31 等。机翼摇晃的主要能源是机翼本身。对于薄翼、小展弦比和大后掠翼的飞机在大迎角时是容易产生机翼摇晃的。然而，对于不是大后掠翼的飞机构型，但机身细长、前机身呈锥形时，也显示出机翼摇晃运动趋势，称为机身诱导的机翼摇晃。还有薄翼、展弦比很小(通常小于 0.5)的锐缘矩形翼，由于侧缘涡的运动亦可能导致出现机翼摇晃，但这类布局目前不常用。

图 11.16 示出了大迎角下发生机翼摇晃的飞机的动态特性。

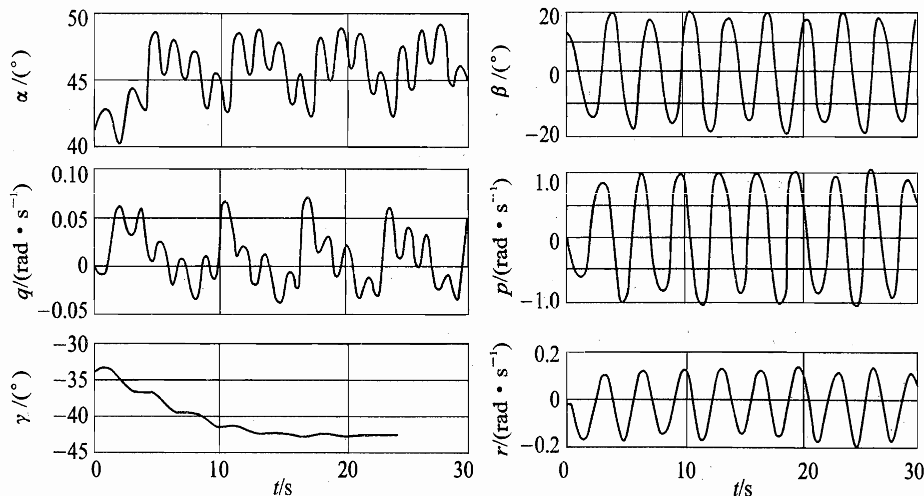


图 11.16 飞机大迎角自振运动——机翼摇晃

机翼摇晃产生的原因，与大迎角范围内机翼表面旋涡破碎导致滚转阻尼丧失有关，但这不足以产生持续的自振。另外的原因一般有：横侧向气动特性与侧滑角呈非线性关系，在大侧滑角下，横向稳定性可能重新恢复；滚转阻尼的非线性变化，如小侧滑角/滚转角时出现负阻尼，大侧滑角/滚转角时出现正阻尼；滚转力矩随侧滑角/滚转角变化的迟滞效应等。由此，平衡状态的振荡不稳定性与侧滑下形成的横向恢复力矩相互作用，引起持续自振。

如图 11.17 所示，两架飞机的前机身类似，而机翼平面形状有根本的不同，在机翼表面旋



涡特性变化显著的大迎角区无侧滑时滚转阻尼都丧失了。

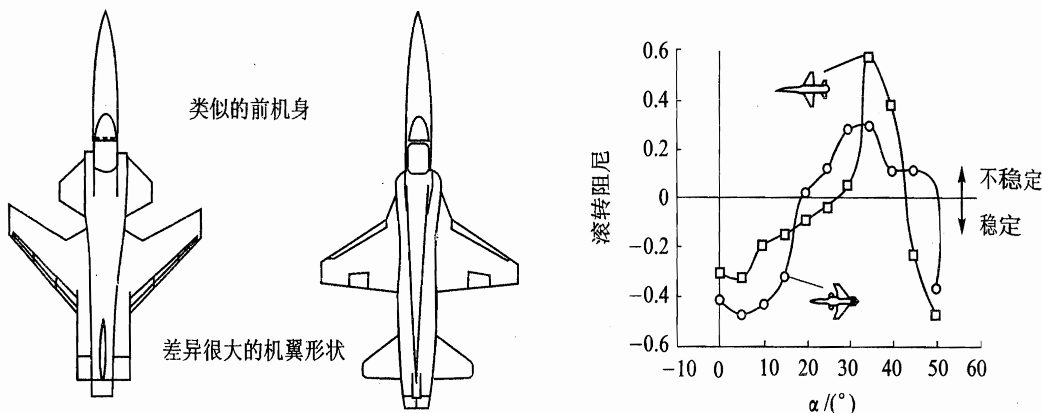


图 11.17　大迎角下滚转阻尼变化($\beta=0°$)

气动力滞迟是由于流动的时间延迟引起的。例如第 7 章中所介绍的洗流时差，会产生起俯仰阻尼作用的附加力矩。如图 11.18 示出了对于大后掠三角翼一种可能的滚转力矩滞迟现象，其流动机理是由于旋涡强度、旋涡位置和旋涡破碎点位置变化的时间延迟，具体还取决于振荡运动的频率和幅值。当时间延迟效应比较强时，不能用准定常气动模型来预测机翼摇晃，因为准定常方法认为飞机在动态过程中作用在其上的气动力和力矩，只与运动的瞬态参数有关。若需详细了解机翼摇晃时的非线性和迟滞气动力特性，以及其动态过程的分析求解，可参阅有关资料。

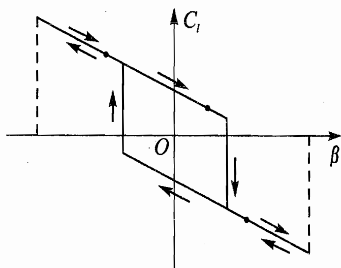


图 11.18　滚转气动力矩滞迟示意图

11.4　尾旋动力学

飞机飞行超过临界迎角后，经常出现偏离、自转，并逐渐发展成尾旋。尾旋乃是飞机最危险的失控运动之一，历史上曾由此导致了大量的飞行事故。进入稳定尾旋后，飞机迎角大于临界迎角，绕三个轴旋转，并沿很小半径的很陡的垂直螺旋线轨迹急剧下降，因而尾旋也称为“螺旋”。其中由于纵横向惯性耦合效应及运动学、气动力和陀螺力矩耦合效应的显著影响，导致很大的偏航和滚转角速度。

现代飞机尾旋状态有多种形式，可按不同原则来分类，例如：

- 按驾驶员相对地面姿态(头向上还是向下)，分为正尾旋($\alpha>0$)和倒飞尾旋($\alpha<0$)；
- 按旋转方向分为左尾旋和右尾旋；
- 按飞机俯仰姿态和迎角可分为非常陡的尾旋($\theta<-50°$，$\alpha<40°$)、陡尾旋($-50°\leqslant\theta\leqslant$



$-20°, 40° \leqslant \alpha \leqslant 70°$）和平尾旋（$\theta > -20°, \alpha > 70°$）；

- 按旋转角速度分为缓慢的、快速的和非常迅速的尾旋；
- 按偏航角速度等尾旋参数是否呈现持续周期振荡，分为均匀的、轻度振荡的、振荡的、显著振荡的或剧烈振荡的尾旋。

尾旋运动是一种非常危险的飞行状态，故在飞机设计时就应考虑如何防止其进入、进入后的特性及其改出措施。尾旋研究的手段有多种，如风洞中的模型飞机天平测量试验和动态试验、大比例尺度遥控模型飞行试验以及真实飞机的试飞。研究尾旋时，还广泛使用计算法以及在飞机模拟器上对这类运动状态进行半物理仿真。

尾旋发展的过程可以划分为进入阶段和定常稳态阶段。形成稳态后，可能表现为等速旋转的稳态尾旋，或为有规律的振荡尾旋，且均沿小半径垂直螺旋线轨迹下降。对于尾旋的改出，必须了解形成尾旋的物理成因，制定合理的改出方案，并经过模拟和试飞验证。

11.4.1 进入尾旋

自转是飞机进入尾旋的根本原因。

在无侧滑的情况下，飞机自转通常是由机翼引起的。对于大多数低速飞机而言，当飞行迎角大于临界迎角时，若扰流不对称或不慎操纵引起正的滚转角速度 $p>0$，右翼迎角将大于左翼，但其升力反而小于左翼，如图 11.19 所示。这一结果产生的横向力矩将加速飞机滚转，即滚转阻尼导数 C_{l_p} 变为正值，这种现象称为机翼自转。从图上可看到，这种机翼自转开始随着转速增加，左右翼升力差值变大，自转力矩增大。但当转速继续增加时，由于左翼回到临界迎角以内，升力系数逐渐变小，故自转力矩也逐渐减少。直到某一转速时，自转力矩降低到零。因此，对某一平均迎角，有一稳定的自转角速度。

机翼自转的同时，由于左右两迎角的不同，也会引起阻力的显著差别，形成颇大的偏航力矩，$N_p>0$。当右滚转 $p>0$ 时，产生机头右偏的正偏航角速度 r，二者合成的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 将趋于沿着相对风方向，即飞行速度方向。此时的俯仰惯性交感力矩 $(I_z-I_x)pr$ 力图使迎角进一步增大，而俯仰恢复力矩 $M_\alpha \alpha$ 不足，超过临界迎角后升力 L 随迎角增加而减小，飞机下沉。最后飞机达到平衡，进入等速稳定旋转状态，即进入定常尾旋阶段。

如在进入尾旋过程中存在侧滑，则会对自转角速度产生一定影响。如图 11.20 所示，假定机翼向左自转（$p<0$），如此时出现右侧滑（$\beta>0$），处于失速状态的左翼有效后掠角增加，展向分速增大，有可能使附面层堆积加厚和分离严重，造成升力更为减少，自转加快。反之，如造成左侧滑（$\beta<0$），则自转有可能趋于缓和。对于右滚转（$p>0$）的情况刚好相反。进入尾旋后，向适当的方向侧滑，是改出尾旋的一项关键性措施。

现代高速飞机的气动布局特点，通常使得超过临界迎角后，升力随迎角增加而下降的趋势缓慢，这样左右机翼的升力差不能形成足够的自转力矩。但是，当飞机失速后，由于丧失航向静稳定性（$C_{n\beta}<0$），将出现绕立轴的自转现象。如有左侧滑（$\beta<0$），会加速形成右偏航旋转



($r>0$)。与此同时,左右翼相对气流速度的差异导致滚转力矩,即 $L_r r>0$。其产生的正的滚转角速度 p 与偏航自转角速度 r 合成的角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}$ 沿着飞行速度方向;产生的俯仰惯性交感力矩 $(I_z-I_x)pr$ 使迎角进一步增大,最终也将进入定常尾旋阶段。

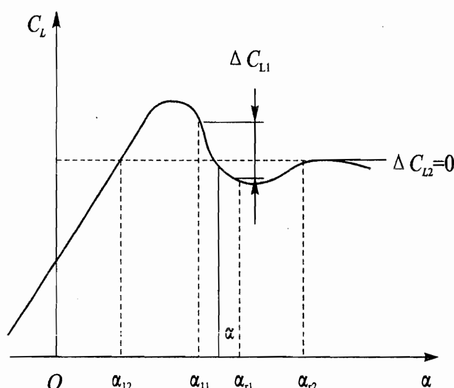


图 11.19 失速后产生机翼自转的机理

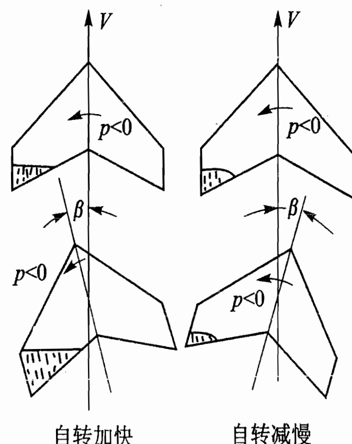


图 11.20 侧滑角对自转的影响图

11.4.2 定常阶段

飞机进入无振荡的定常尾旋阶段后,其飞行速度 $\boldsymbol{V}$、旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$、迎角 α 和侧滑角 β 均为常值。简化受力情况如图 11.21 所示,其中假设尾旋半径足够小,飞行速度垂直向下。这样可以得到计算飞机等速定常尾旋基本参数的近似方程。

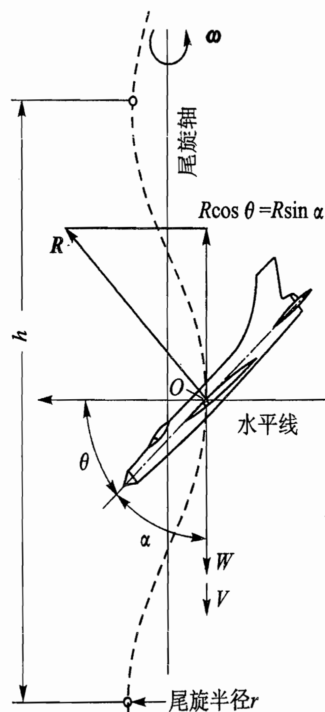


图 11.21 等速尾旋受力

在气流分离的情况下气动力合力 $\boldsymbol{R}$ 与翼弦垂直。由力平衡条件得 $\boldsymbol{R}$ 的垂直分量与重力平衡,水平分量与惯性力平衡,即

$$\left.\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}\rho V^2 SC_R \sin\alpha \\ \frac{W}{g} r\omega^2 &= \frac{1}{2}\rho V^2 SC_R \cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{11.21}$$

式中 r 为尾旋半径。

从方程可求得尾旋速度

$$V=\sqrt{\frac{2W}{\rho SC_R \sin\alpha}} \tag{11.22}$$

式中 $C_R=K_R C_{L\max}$。对于平直翼取 $K_R=1$,对于三角翼



取 $K_R=1.2\sim1.3$。

尾旋半径

$$r=\frac{g\cot\alpha}{\omega^2}=\frac{g\cot\alpha}{\overline{\omega}^2}\left(\frac{b}{2V}\right)^2 \tag{11.23}$$

式中量纲为 1 的角速度 $\overline{\omega}=\dfrac{\omega b}{2V}$。

尾旋每周的时间和高度损失分别为

$$\left.\begin{aligned} T&=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{\pi b}{\overline{\omega}V}\\ h&=Vt=\frac{\pi b}{\overline{\omega}}\end{aligned}\right\} \tag{11.24}$$

例如，一架飞机 $W/S=2\ 500\ \mathrm{N/m^2}$，尾旋时 $H=5\ 000\ \mathrm{m}$，姿态角 $\theta=-60°$，取 $C_R=1.2$，由式(11.22)计算得

$$V=101\ \mathrm{m/s}$$

观察到每周约 2 s，按式(11.24)、式(11.23)，得

$$r=1.73\ \mathrm{m}$$

可见，尾旋时飞机的下降速度是非常快的，即高度损失很快，同时尾旋半径很小。因此，尾旋是一种危险的飞行状态。设计规范一般规定，飞机必须在进入尾旋 2～3 周后能退出尾旋。

11.4.3 改出尾旋

改出尾旋的关键在于制止自转，并将迎角降低到临界迎角以下。从直观上看，在改出尾旋时，首先想到的是推杆来减少迎角。但实践表明，这一操纵可能是无效的，甚至是有害的。这是因为尾旋时水平尾翼上的气流已经分离，升降舵操纵效能不足以产生使飞机迎角减至临界迎角以下的俯仰力矩。

那么如何制止飞机自转？通常采用两种操纵方法，即反蹬舵和顺压杆以改出尾旋。

反蹬舵是向尾旋运动相反的方向蹬舵。假设飞机处于右尾旋状态($p>0,r>0$)，应左蹬舵($\delta_r>0$)，偏航操纵力矩 $N_{\delta_r}\delta_r<0$，使偏航角速度减小，起到制偏作用；同时还产生对改出尾旋有利的右侧滑，使自转减慢。当飞机转速减至相当程度时，上仰惯性耦合力矩$(I_z-I_x)pr$大大降低，再猛推杆，让飞机低头进入俯冲，再拉杆改出尾旋，转入正常飞行状态。

顺压杆操纵是顺着尾旋方向压杆，右尾旋时应右压杆($\delta_a<0$)。首先，飞机在横向操纵力矩 $M_x^{\delta_x}\delta_x>0$ 作用下加速滚转，造成偏航惯性交感力矩$(I_x-I_y)pq<0$之值增加，以制止飞机向右偏转，减小了偏航角速度；其次，直接从气动作用看，大迎角下一般 $N_{\delta_r}>0$，右压杆时 $\delta_a<0$，$\Delta N=N_{\delta_r}\delta_r<0$，产生期望的左偏航力矩；另外，形成的右侧滑有利于使自转减慢。同样当飞机转速减到某程度时，上仰惯性耦合力矩作用大大减小，驾驶员再猛推杆，飞机也可以改出尾旋。



当然，如反蹬舵和顺压杆同时操纵，则尾旋改出的效果有可能更迅速。

事实上，目前还没有出现任何情况下都不进入尾旋的飞机。用于改出偏离和尾旋的典型驾驶方法，是通过理论和试验并最终由专门试飞验证制定出的。具体的改出方法和程序取决于飞机机型、尾旋强弱和模式，而且对于迎角很大的平尾旋的改出通常较难。

研究经验还表明，对于现代机动飞机，传统的改出尾旋方法并不总是有效。很多情况下，它与大迎角下气动操纵面效率不足、俯仰方向没有足够的下俯力矩余量和出现大的不对称偏航力矩等有关。为了在大迎角下进行有效的操纵，可通过控制增稳系统接通其他操纵的手段，例如平尾差动偏转、利用平尾来激起摇摆、采用发动机推力差，或者增设反尾旋伞、反尾旋火箭等方式，制止自转，减小迎角，并改出尾旋。对于装有发动机推力转向喷管的飞机，用所提供的推力矢量操纵力矩来终止尾旋且由尾旋中改出，可能是最有效的解决办法。

11.4.4　尾旋运动的模拟和试验

对于尾旋的分析，首先要将初步的近似或定性方法与数值模拟相结合。近似或定性方法有助于更有效地进行数值模拟，如选择更危险的状态、选择操纵面偏度和初始运动条件等。而进行大迎角下飞行动力学的数值模拟，可以大大充实由近似分析和定性分析得到的结果。

进一步地，在试飞员的参预下进行尾旋状态下飞行动力学的半物理模拟。在有球形视景的飞行模拟器上模拟偏离和尾旋状态有非常高的可信度。但必须有相应的大迎角气动力和力矩数学模型。通过飞行动力学半物理模拟，对于设计防止进入尾旋和改出尾旋的自动控制系统也是有效的方法。由于尾旋问题非常复杂，实际上尚没有成熟统一的控制律综合方法，带控制系统的飞行动力学半物理模拟，是修正控制律和选择其参数的惟一方法。

通过风洞实验研究，也能够很好地预测尾旋特性，并制定出驾驶技术方面的建议，这些在进行飞行动力学的半物理模拟时极其有益。在准备进行大迎角专门试飞阶段，进行半物理模拟是最合适的。这样的综合研究可大大提高进行飞机尾旋试飞的安全性。

对于尾旋的研究过程，试飞是终结阶段。它们是最复杂和最危险的试验形式。因此，试验机通常装备有保证试飞安全的专用技术设施，如各型反尾旋固体燃料火箭和反尾旋伞。试飞的主要目的是评价飞机抗偏离特性、研究尾旋状态并制定出改出尾旋方法。

图 11.22 为某机进入、形成和改出尾旋的整个时域过程。为了使飞机进入右尾旋，先拉杆到底，再右蹬舵($\delta_r<0$)、左压杆到底($\delta_a>0$)。从图上可见，拉杆操纵在第 10～17 s 内完成，约在第 17 s 同时右蹬舵和左压杆，过 5～6 s，飞机形成较大的迎角和偏航角速度，约在第 25 s 时飞机形成右尾旋，两圈内发展成定常尾旋，其迎角在 50°～52°，偏航角速度约为 110 (°)/s。在尾旋旋转 6 圈后进行改出操纵，采用反蹬舵、前推杆、副翼中立的方案，飞机很快从尾旋中改出而进入正常飞行状态，所需时间为 5～10 s。

图 11.22　某机尾旋的时域响应



11.5 空间运动的自动控制

现代控制技术和电子技术不断发展,尤其是电传操纵系统的出现和推力矢量控制技术的应用,使得飞机进行机动运动的能力大增,具有良好的空间运动稳定性和操纵性,空间活动范围也更大,甚至可以在过失速区进行机动,运动特性也有不少变化。

从工作的迎角区域划分,空间运动的自动飞行控制系统大致分成三类:第一类主要在失速前的正常迎角区域工作,应能够增强飞机的机动性,或提供新型的空间飞行模式,如放宽静稳定、直接力控制等系统;第二类主要在于增强机动飞行的安全性,如在临近失速迎角或其他机动参数边界时进行自动限制和告警提示的各类边界限制系统,或一旦进入危险偏离、尾旋等飞行状态能够自动改出的偏离/尾旋自动防止系统;第三类是新近发展的功能和系统,主要用于战斗机实现过失速机动飞行,增强机动性和敏捷性,实现空战效能的提高。此时飞机已进入临界飞行范围,运动呈强非线性状态,飞控系统采用了诸如机体涡控制、推力矢量控制等新技术,以保证飞机能顺利完成超机动飞行。这类飞控系统目前还在发展中,但已取得了相当好的效果。

下面仅从原理上简单介绍这些飞控系统。

11.5.1 飞行边界限制系统

利用各种旋涡和附面层控制的气动设计方法可以延迟偏离至大的迎角,然而不能阻止偏离、尾旋等失稳飞行的发生。从提高飞行安全性的角度,希望临近飞行包线边界时,给驾驶员提供明显的信号提示,如有节奏地抖动驾驶杆或脚蹬、用音响和照明信号警示等,警告驾驶员临近偏离状态,以采取适当的操纵措施。

更全面的考虑则是在飞控系统中设置飞行边界限制功能,防止飞机进入实用边界以外的运动区域(由迎角、过载、侧滑角、倾斜角、马赫数等参数定义),并通过限制座舱中的杆位移或有效驾驶员操纵指令等,限制操纵面控制执行机构的运动,以自动防止飞机操纵超出设计或使用范围。此功能在战斗机空战格斗时更为重要,因为动作猛烈,驾驶员有时会把过载拉到极限,生理难以承受,或可能会使机体产生过应力,导致机体损坏;也可能迎角过大,导致飞机失速失控;也可能随着飞机迎角接近限制值,飞机抖动越来越严重,对准目标十分困难,也十分危险。为避免这些问题,飞控系统中包括一组专门的控制律,在飞行包线边界附近犹如出现围墙,阻止飞机超出规定性能。

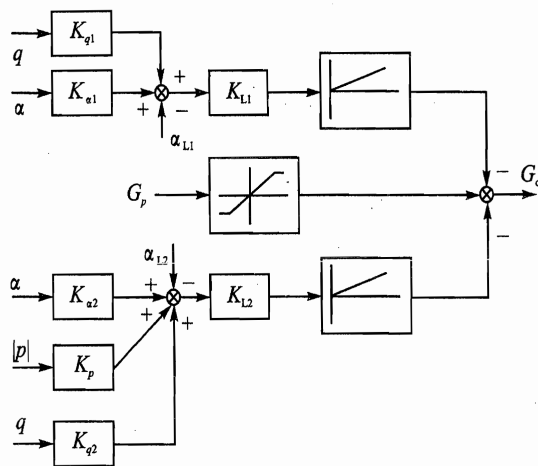
现代飞机高速飞行时,迎角虽然不大,但可能引起较大的过载。驾驶员的操纵一旦有疏忽,就会使飞机产生过大的过载,危及飞行安全,必须加以限制。在低速飞行时,驾驶员操纵疏忽所引起的过载不大,但迎角可能很大,甚至达到失速迎角,也会引起危险,故也必须限制迎角。典型迎角/过载限制器结构如图 11.23(a)所示。下面分析其结构及有关参数的确定。

图 11.23(a)是在机动飞机常用的纵向过载指令式控制增稳系统的驾驶员操纵指令端进

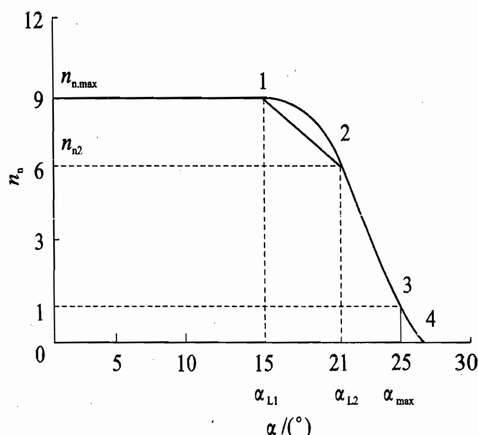


行指令限制。由图可知，过载的限制很直接，在杆力传感器后接入一个非对称限幅电路，过大的杆指令信号 G_p 将被直接限制在某个范围之内，从而限制了飞机最大过载。一般最大正过载值大于最大负过载值。

实际工作的指令 G_c 还根据当前迎角等信息进一步削弱。迎角限制部分分上、下两通道，分别在当量迎角大于启动门限 α_{L1}，α_{L2} 后开始工作，目的在于实现图 11.23(b)所示的允许过载与迎角关系。



(a) 方框图



(b) 允许过载与迎角关系

图 11.23 迎角/过载限制器

允许过载与迎角的关系为曲线，它的建立取决于允许过载和失速情况。如过载上限值根据飞机结构强度和驾驶员能承受的法向过载大小而定，机动飞机一般取 $n_{n.max(+)}=7\sim8$；如果飞机上有可倾斜的坐椅，则 $n_{n.max(+)}$ 可取 8～9。其下限值主要按驾驶员能承受的负向过载大小而定，一般 $n_{n.max(-)}=-2$，否则，大量血液涌向头部会使驾驶员难以承受。迎角限制取决于飞机抖振和失速偏离特性。以图 11.23(b)为例，其 $\alpha_{L1}=15°$ 为飞机明显感受抖振的迎角值，作为能进行最大法向过载 $n_{n.max(+)}$ 飞行的迎角上限；而 $\alpha_{max}=25°$ 为允许使用迎角，此时仅允许飞机进行过载为 $1g$ 的平飞。曲线的过渡段必须精心设计，以免对飞行限制过多、过于保守，或者是不够安全。

为便于实现，实际用折线逼近曲线，如采用三段折线时可得到两个限制值 α_{L1} 和 α_{L2}。为使折线尽量逼近曲线，可令点 2 与曲线间距最小，并由此确定第二限制门限值 α_{L2}。

确定 α_{L1} 和 α_{L2} 后，通过两通道实现期望的限制规律。当 $\alpha<\alpha_{L1}$ 时，驾驶员正常操纵飞机，迎角过载限制器未起作用。当 $\alpha_{L1}<\alpha<\alpha_{L2}$ 时，限制器削弱驾驶员的操纵输入信号，实现第一级限制。当 $\alpha>\alpha_{L2}$ 时，实现第二级限制，限制器大幅度减弱驾驶员因疏忽而过猛的操纵输入信号，以保证飞机安全飞行。

限制通道的增益同样根据图 11.23(b)确定，为



$$\left.\begin{aligned} K_{L1} &= \frac{n_{n.\max(+)} - n_{n2}}{\alpha_{L2} - \alpha_{L1}} \\ K_{L2} &= \frac{n_{n2} - 1}{\alpha_{\max} - \alpha_{L2}} \end{aligned}\right\} \tag{11.25}$$

当量迎角首先综合考虑当前迎角和俯仰动态引起的迎角变化；在第二级限制，还考虑急滚运动惯性上仰的影响，如图 11.23(a)所示，即

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{\Sigma1} &= K_{\alpha1}\alpha + K_{q1}q \\ \alpha_{\Sigma2} &= K_{\alpha2}\alpha + K_{q2}q + K_p|p| \end{aligned}\right\} \tag{11.26}$$

为更好地保证飞行安全，使驾驶员无顾虑飞行，目前还有其他限制方式。所有这些限制器统称为飞行边界限制器(系统)。

但应注意，这类系统难免导致对飞机机动性的限制，所以设计中应精心折衷。同时，限制系统也不能保证所有飞行条件下都完全避免偏离发散的出现和尾旋等危险运动的不慎进入。因而，完整的安全保障还应考虑其他措施。

11.5.2　尾旋自动防止系统

偏离/尾旋自动防止系统是为保证飞机一旦出现偏离时能够终止偏离的发展，或发生尾旋时能有效改出尾旋的。

由自动控制系统来完成尾旋防止任务，与由人控制相比具有以下优点：① 迅速并准确地判断初始尾旋，包括其姿态和方向；② 施加改出操纵的时间短；③ 保证了操纵的正确性；④ 消除了反尾旋的倾向。

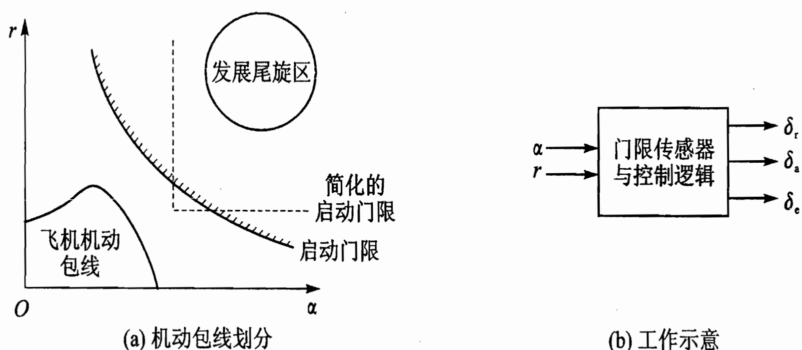
图 11.24 为尾旋自动防止系统原理图。其中图 11.24(a)中首先在偏航角速度 r 和迎角 α 平面上划分出正常机动包线(较低的 α 和 r 值)和发展尾旋区(较高的 α 和 r 值)。二者之间的区域表征偏离和初始尾旋。尾旋自动防止系统(见图 11.24(b))的启动门限设在偏离和初始尾旋区。一般总是希望在实际可能的情况下，将门限尽可能设置在远离形成尾旋区，以便能有效迅速地把飞机恢复到可控飞行状态。另一方面，门限过分接近机动边界会妨碍飞行员的正常机动飞行操纵。因此，针对具体飞机的失速/尾旋特性确定恰当的启动门限值，是尾旋自动防止系统设计成功的关键因素之一。如某高性能战斗机的简化启动门限值为 30 (°)/s 和 57.3 (°)/s，而其允许使用迎角为 25°。

实际尾旋防止系统可分为两个子系统，如图 11.25 典型示例的逻辑框图所示。

首先主系统识别初始尾旋的方向和姿态，然后指令改出操纵。对于重量相对集中于机身的现代高速飞机，典型操纵动作是顺尾旋方向的最大滚转操纵、反尾旋方向的最大方向舵操纵和上仰操纵，目的在于制止飞机自动偏转，并且储备下俯操纵力矩，即令

$$\delta_r = \delta_{r.\max}\operatorname{sign} r, \qquad \delta_a = -\delta_{a.\max}\operatorname{sign} r, \qquad \delta_e = \delta_{e.\max(-)} \tag{11.27}$$

上述操纵动作一直保持到飞机的偏航角速度变号。在主系统改出操纵之后，可以将操纵



(a) 机动包线划分　　(b) 工作示意

图 11.24　尾旋自动防止系统原理

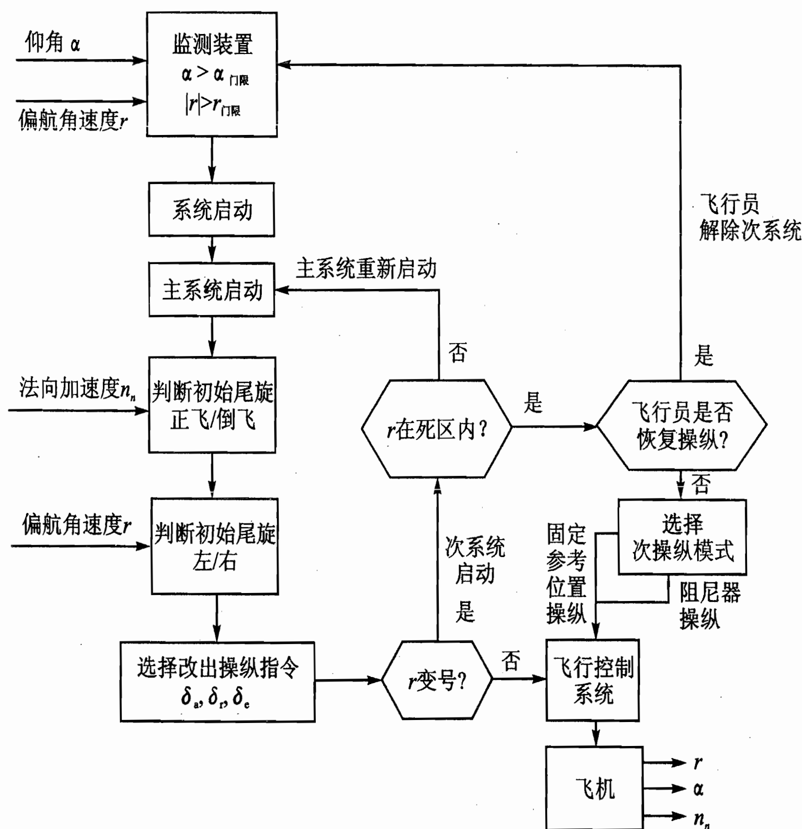


图 11.25　某机的尾旋自动防止系统逻辑框图

权限交回飞行员，但飞行员由于混乱往往不能马上恢复对飞机的操纵，飞机可能进入反方向的尾旋。所以自动防止尾旋系统仍然需对飞机进行控制，防止反向尾旋的倾向，直到飞行员恢复对飞机的操纵。此时转入次系统控制，典型的操纵动作是舵、杆回中，使方向舵、副翼回零，同时升降舵向下偏转到预定的配平位置，以使飞机既退出大迎角，又不过度下俯进入负迎角，即

$$\delta_r = 0, \qquad \delta_a = 0, \qquad \delta_e = \delta_{e*} \tag{11.28}$$



随后，三个舵面的位置固定（固定参考位置操纵模式），或启动常规的旋转角速度阻尼器（阻尼器操纵模式）。系统中还设置偏航角速度死区，如果次系统或飞行员的操纵不能保证飞机的偏航角速度位于该死区之内，那么改出操纵的主系统重新启动。

很明显，上述系统的尾旋改出操纵规律，与第 11.4 节中的机理分析结果完全一致。

对于可能进入平尾旋的飞机，上述操纵改出法可能不能保证中止旋转，并将飞机从平尾旋状态改出。在这类情况下，尾旋的自动改出可以考虑用平尾激励俯仰摇摆运动的办法。特别还应注意分析出飞机滞留在大迎角而未旋转的所谓深失速的飞行情况，如 F—16 飞机曾多次进入这种飞行。改出这些飞行状态用俯仰摇摆方法比较有效。一般需要朝着增加摇摆运动的动能方向激励运动，破坏危险状态的平衡稳定性，才可能恢复至小迎角状态区。

图 11.26 给出平尾旋动态自动改出过程的数值模拟算例。开始上偏平尾、蹬舵、压杆进入左平尾旋。此后，为了试图改出，反蹬舵（$\delta_r=-20°$）、压顺杆（$\delta_a=20°$）、前推杆（$\delta_e=0°$），但未能制止旋转、减小迎角（$t=60\sim75$ s）。随即接通自动尾旋改出系统（$t=75$ s），应用摇摆运动动态改出的方法，在 5 s时间内飞机从尾旋中改出。在操纵面效率不足的条件下，综合使用摇摆法和其他方法可大大缩短改出尾旋的时间。

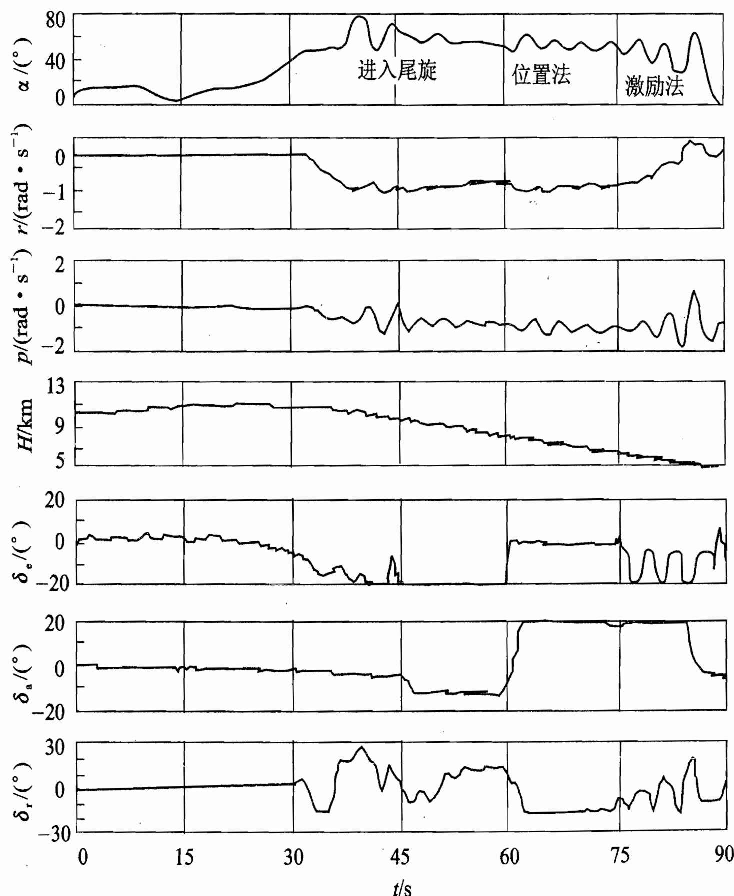
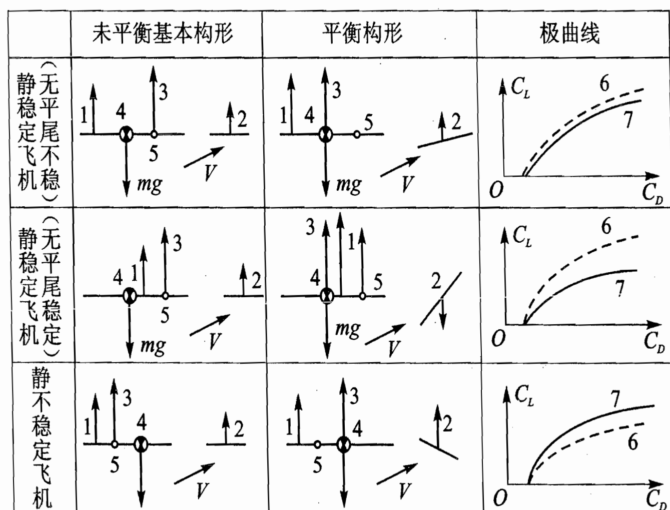


图 11.26 平尾旋自动改出的模拟结果

11.5.3 放宽静稳定系统

飞机的机动性取决于两个基本指标：最大过载 $n_{n.\max}$ 和单位剩余功率 SEP。为了提高飞机的机动性，目前常用两种方法，即采用放宽静稳定性技术和机动载荷控制技术，其目的在于提高全机升力，减小配平阻力。这里介绍采用放宽静稳定技术的效果。

对于常规飞机，其平尾容积和质心位置的确定必须满足飞行包线内的飞行平衡条件，以及合适的稳定性和操纵性要求，飞机必须具有一定量的静稳定裕度，即飞机焦点和机动点都位于质心后面。飞行过程中，为保持飞机在正迎角下的俯仰力矩平衡，升降舵（或全动平尾）应向上偏转，产生的抬头力矩（$M_{\delta_e}\delta_e>0$）平衡迎角引起的静稳定力矩（$M_\alpha\alpha<0$）。此时平尾升力减少或者改变方向，舵面偏转产生的升力 $L(\delta_e)$ 与迎角产生的升力 $L(\alpha)$ 刚好相反，飞机的总升力将是两者之差 $L(\alpha)-L(\delta_e)$，如图 11.27 所示。为了达到某一期望的全机升力系数，飞机迎角比不考虑俯仰力矩平衡条件时大，因而诱导阻力增加，平衡极曲线将位于飞机基本构形极曲线的下面，如图 11.27 最后一栏所示。



1—翼身组合体升力；2—平尾升力；3—总升力；

4—质心；5—焦点；6—基本构形极曲线；7—平衡构形极曲线

图 11.27 飞机的平衡图

放宽静稳定性技术是指对飞机静稳定裕度的限制放宽，焦点可以很靠近质心、与质心重合甚至移至质心的前面（$C_{m\alpha}\geqslant 0$），此时飞机的静稳定裕度变得很小或静不稳定。具有这种特性的飞机称放宽静稳定性飞机。当减少飞机的静稳定裕度后，飞行性能可以得到改善。由图 11.27可见，当飞机的焦点位于质心之前时，飞机在正迎角下平衡，升降舵应下偏，产生的低头力矩（$M_{\delta_e}\delta_e<0$）平衡迎角引起的静不稳定力矩（$M_\alpha\alpha>0$）。舵面偏转产生的升力 $L(\delta_e)$ 与迎角产生的升力 $L(\alpha)$ 同向，飞机的总升力将是两者之和 $L(\alpha)+L(\delta_e)$。为了达到某一期望的全机升力系数，飞机迎角比不考虑俯仰力矩平衡条件时要小，平衡极曲线将位于飞机基本构形极



曲线的上面。

另外，如在同样迎角 α 条件下，显然静不稳定飞机的总升力大于静稳定性飞机的总升力，为此机动性可以提高。此时平尾容积只要满足飞机平衡、起飞时前轮抬起等操纵效能方面的要求，则飞机的稳定性要求将由飞行控制系统来保证。这样设计的平尾面积将可减少，飞机结构重量减轻。这些都反映出对飞机飞行性能的改善。因此放宽静稳定性技术不仅在军用机中得到广泛采用，而且在民用机中也已开始采用。

对于现代飞机，质心位置究竟应后移多少？如按常规飞机设计方法，质心必须在焦点之前。如图 11.28 所示，飞机在亚声速飞行时动态特性可能很满意，但进入超声速飞行后，焦点后移造成静稳定过大，机动性就变差。因此，一般来说在亚声速区飞机设计成静不稳定或中立静稳定的，而在超声速区飞机设计成静稳定的。当然飞机质心位置的最后确定，还要考虑飞机的其他性能。综合各种因素表明，对于运输机和民用机，质心位置位于焦点附近最好，其静稳定裕度为 1 %～2 %。

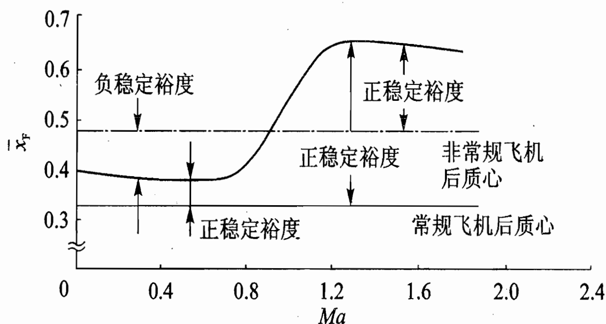


图 11.28 飞机稳定性变化

除了通过减少平尾容积，静稳定裕度的减少还可以通过质心后移或使用前翼等措施来达到。静稳定性减少，甚至出现 $C_{m\alpha}\geqslant 0$，将引起纵向模态特性变差，这一问题可以通过引入增稳系统来解决。实际应用中，一般亚声速是静不稳定的；而超声速飞行时，由于全机焦点后移，恢复静稳定性，但静稳定度较常规飞机大为减少，如图 11.28 所示。

11.5.4 直接力操纵系统

飞机在飞行过程中改变飞行轨迹的常规操纵方法是：改变发动机推力或使用阻力装置改变轴向过载 n_x；操纵俯仰力矩，改变迎角，从而改变对称面内的法向过载 n_z；操纵滚转力矩，改变飞机的倾斜姿态 ϕ，从而改变法向过载在空间的方向；操纵偏航力矩，改变侧滑角，从而改变侧向过载 n_y。事实上，主要还是操纵两个过载 n_x，n_z 和倾斜角 ϕ，而改变侧向过载的方向舵操纵只是辅助的。

这种通过力矩操纵来控制飞机的方法有着明显的缺点。首先，由于飞机的惯性，过载不能瞬时达到预期的改变量，只是随着迎角、侧滑角和倾斜角的逐渐改变而形成，有明显的时间滞



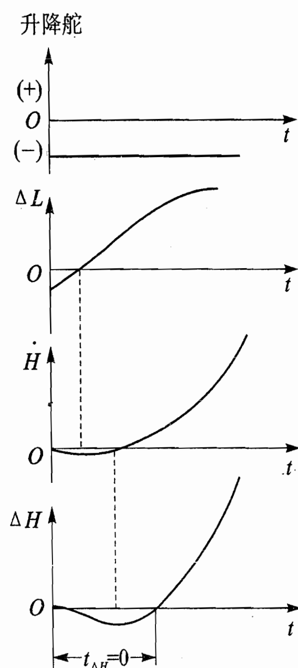


图 11.29　尾翼式飞机常规高度控制的时间滞后

后，而且升降舵、方向舵上产生的气动力作用通常与所需运动的方向相反，更加大了时间滞后量。随着飞机重量和尺寸的增加，对于完成精确机动飞行（着陆、空中加油等）时，过载反应的快速性显得不够。图 11.29 示出了尾翼式飞机在常规操纵方式下高度改变的时间滞后。

常规操纵的第二个缺点是飞机机动过程中的动力学特性复杂，飞机的精确操纵要求驾驶员具备很高的专业训练水平，但也难以始终保持精确驾驶。飞机动力学特性的复杂性实质上是由于当用力矩操纵飞机时，会引起飞机所有的自由度运动。以着陆飞行为例，飞机倾斜改变航向，将导致驾驶员视野中目视定位发生复杂变动，难以及时采取措施修正轨迹；如果在 $\phi=\psi=0$ 条件下，飞机能进行期望的侧向移动，情况就会明显简化。对于固定翼飞行器，实现这类运动模式需要使用直接力控制系统。

直接力控制的飞机在空中能快速、精确地操纵飞机，从而极大地提高了空间运动机动性和敏捷性。其最大特点是，飞机的姿态控制和轨迹控制可以分开进行，即飞机的移动和转动运动可以分开控制。可以在飞行轨迹不变的条件下仅对飞机的单个姿态控制；亦可以在飞机姿态不变的条件下仅控制飞行轨迹。下面分别介绍纵向和横侧向直接力控制的情况。

1. 纵向直接力控制

图 11.30 示出了通过直接升力控制系统可以实现的三种新的纵向运动模式：直接升力或迎角不变的垂直运动模式、航迹不变的俯仰姿态变化和俯仰姿态不变的垂直平移。

直接升力模式。在迎角不变的条件下，改变飞行垂直轨迹。这种方式适用于投射空-地武器后的快速拉起，或在空战中进行不大迎角下的快速拉起。此时，迎角不变（$\alpha=\text{const}$），飞机姿态角随轨迹倾角同时改变（$\theta=\gamma$）。

俯仰指向模式。在飞行轨迹不变的条件下，改变飞机机头俯仰指向。这种方式适用于空战中飞机迅速指向目标，构成优先攻击条件。此时飞机轨迹倾角不变（$\gamma=\text{const}$），迎角随俯仰角同时变化（$\alpha=\theta$）。

垂直平移模式。在俯仰角不变的条件下，改变飞行垂直轨迹。这种方式适用于空战中快速占据有利高度位置。此时的控制类同直接升力控制方式，但俯仰自动驾驶仪必须打开，以保证 $\theta=\theta_c$。于是迎角随轨迹倾角同时改变（$\alpha=\gamma$）。

为了实现直接升力的变化，飞机必须装有特殊适宜的操纵面（装置），并满足下列要求：

● 操纵面（装置）必须能引起正的和负的升力变化；



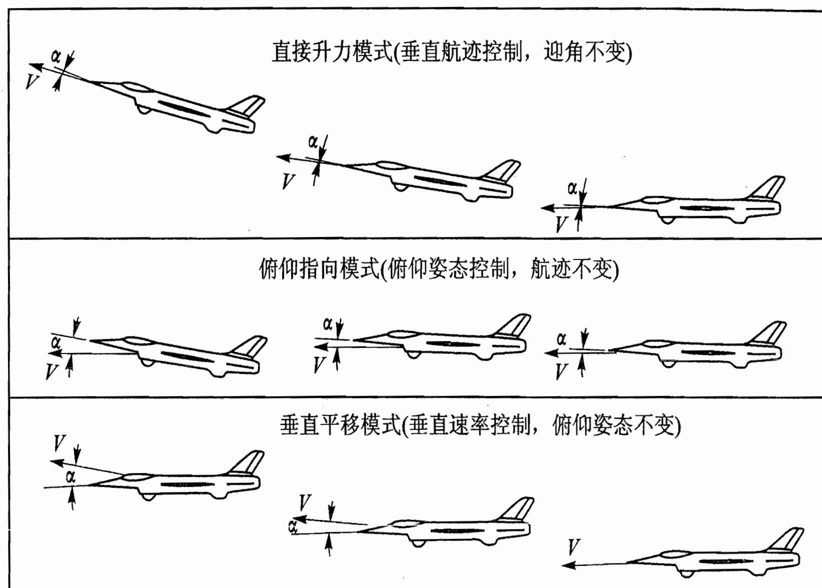


图 11.30　直接升力控制系统的运动模式

- 合成的直接升力变化的作用点必须在重心附近；
- 操纵面(装置)必须是快速连续可调的。

产生直接升力变化的途径有前缘和后缘襟翼、扰流片、吹气、推力矢量转向和机头操纵面(如水平鸭翼)等，如图 11.31 所示。在这些特殊力和力矩操纵面(装置)的基础上，为了实现所需的运动模式，操纵面应协调偏转。这需要多余度的电传操纵系统来具体实现，目前信号传输介质正向光传操纵系统发展。

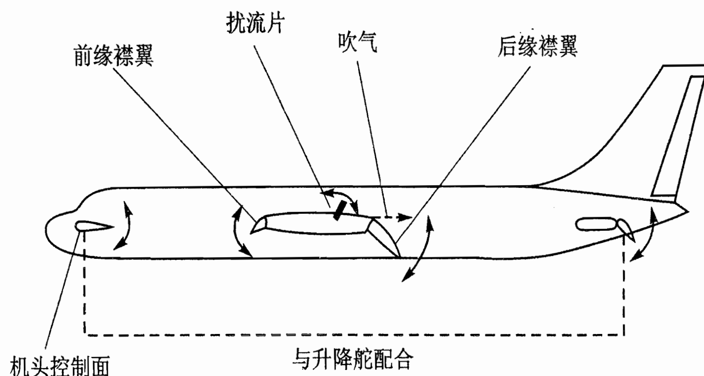


图 11.31　产生直接升力变化的常见途径

图 11.32 示出了采用襟副翼与平尾进行直接力控制的原理图。襟翼下偏产生的升力，其力矩由升降舵上偏的力矩来平衡，于是只剩下升力控制飞机的移动。如用升降舵控制飞机俯仰姿态，舵偏产生的升力变化由襟翼相应偏转给予平衡，故只有转动运动操纵。二者的不同配



合,还可导致其他运动模式。

图 11.33 对比了某大型超声速飞机按常规方式和直接升力方式操纵时的高度响应。直接升力方式避免了响应的滞后。这在着陆进场、轰炸等精确任务中将带来很大的收益。

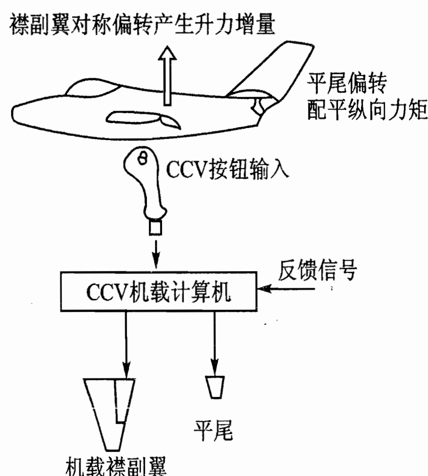


图 11.32　直接升力控制原理图

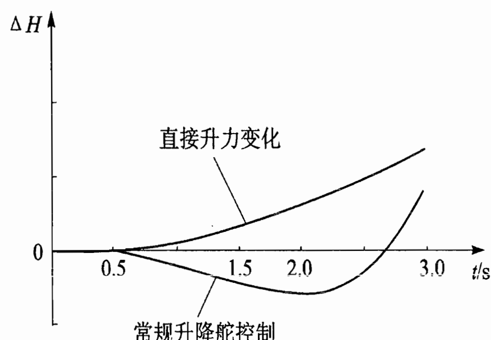


图 11.33　直接升力变化对航迹响应的影响

2. 侧向直接力控制

类似纵向,通过侧向直接力控制可以实现新的侧向运动模式:无侧滑和滚转的侧向运动(直接侧力)、航迹不变的偏航姿态变化(偏航指向)以及姿态不变的侧向平移,如图 11.34 所示。

直接侧力模式。在无侧滑、无倾斜条件下,改变飞机航向,即“平转弯”。这种方式适用于空战中后期瞄准修正,以消除瞄准摆动效应。此时侧滑角为零($\beta=0$);飞机偏航角随轨迹偏角同时改变($\psi=\chi$)。

偏航指向模式。在轨迹不变的条件下,改变飞机机头偏航指向。这种模式类同俯仰指向模式,适用于空战中飞机快速指向目标,构成抢先攻击目标的条件。此时飞机轨迹偏角不变($\chi=\text{const}$),侧滑角随偏航角同时变化($\beta=\psi$)。

侧向平移模式。在偏航角不变的条件下,改变飞行航向。这种模式适用于在空间侧向位移快速移动。此时的控制、航向和横向自动驾驶仪应自动接通,以保证偏航角 ψ 和倾斜角 γ 不变。侧滑角将随轨迹偏角同时改变($\beta=\chi$)。

产生直接侧力变化的途径有气动侧力操纵面(如机头垂直鸭翼)、非对称的阻力操纵面和方向舵侧力操纵面的配合以及推力矢量转向等,如图 11.35 所示。同样,这些操纵面(装置)应在飞控系统的驱动下协调偏转,实现期望的侧向运动模式。

3. 解耦控制原理

实现上述的各种运动模式,关键是设计这些操纵机构之间适当的交联关系。下面以侧向



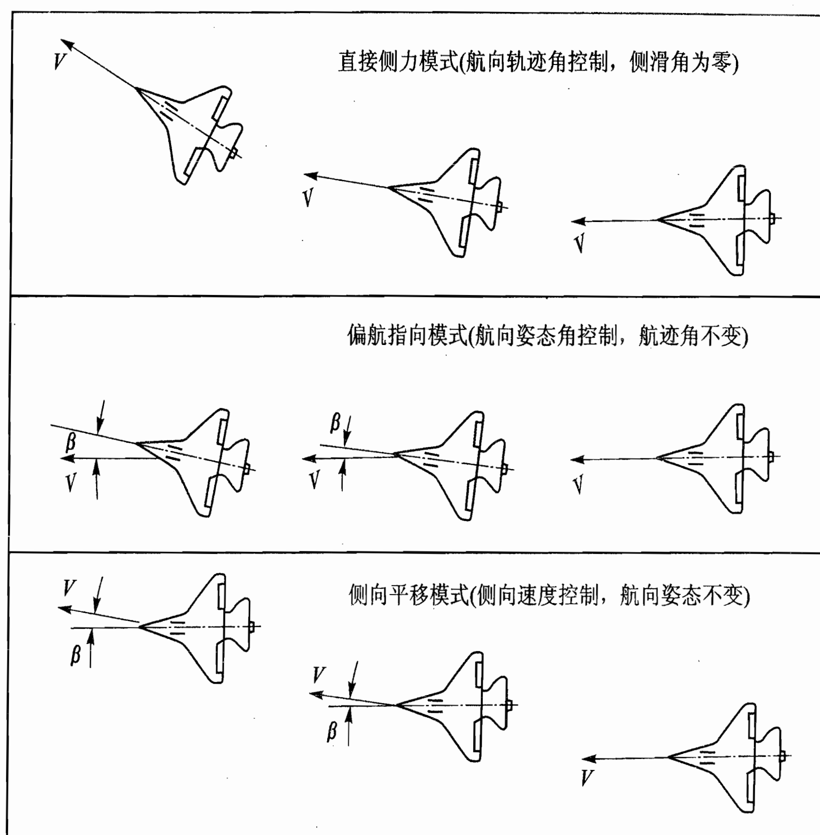


图 11.34 直接侧力控制系统的运动模式

直接力控制为例加以说明。

若飞机实现侧向直接力控制的操纵面为副翼 δ_a、方向舵 δ_r 和垂直鸭翼 δ_c 来操纵，则相应的操纵作用可用矢量表示为

$$\begin{bmatrix}\Delta\bar{L}\\ \Delta\bar{N}\\ \Delta\bar{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{L}_{\delta_a} & \bar{L}_{\delta_r} & \bar{L}_{\delta_c}\\ \bar{N}_{\delta_a} & \bar{N}_{\delta_r} & \bar{N}_{\delta_c}\\ \bar{Y}_{\delta_a} & \bar{Y}_{\delta_r} & \bar{Y}_{\delta_c}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_a\\ \delta_r\\ \delta_c\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{B}\begin{bmatrix}\delta_a\\ \delta_r\\ \delta_c\end{bmatrix} \tag{11.29}$$

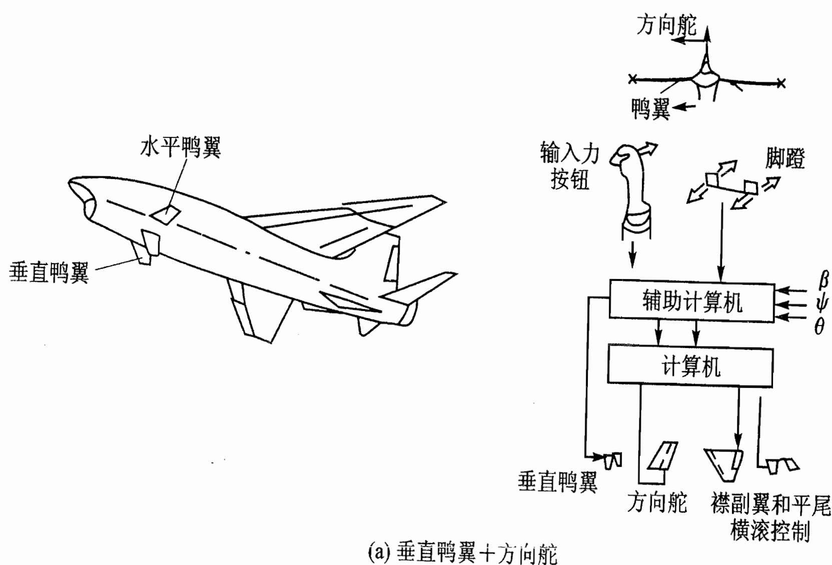
式中操纵导数符号的定义同 10.1 节，而 $\boldsymbol{B}$ 为操纵效能矩阵。

为了使运动解耦，定义副翼 δ_a、方向舵 δ_r 和垂直鸭翼 δ_c 偏角的组合关系，满足

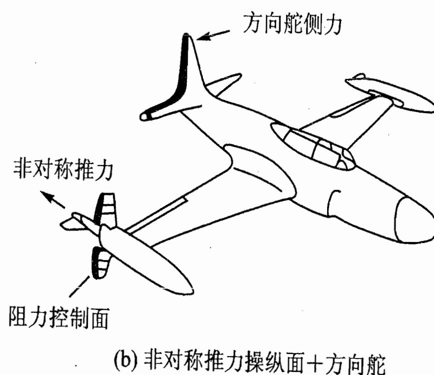
$$\begin{bmatrix}\Delta\bar{L}\\ \Delta\bar{N}\\ \Delta\bar{Y}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{L}_{\delta_{a.c}} & 0 & 0\\ 0 & \bar{N}_{\delta_{r.c}} & 0\\ 0 & 0 & \bar{Y}_{\delta_{c.c}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_{a.c}\\ \delta_{r.c}\\ \delta_{c.c}\end{bmatrix}\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{B}_c\begin{bmatrix}\delta_{a.c}\\ \delta_{r.c}\\ \delta_{c.c}\end{bmatrix} \tag{11.30}$$

式中等效操纵效能矩阵 $\boldsymbol{B}_c$ 为对角阵，可见 $\delta_{a.c}$，$\delta_{r.c}$，$\delta_{c.c}$ 对应于滚转、偏航和侧滑的单独无耦合的指令信号，其与实际操纵面的关系可由式(11.29)、式(11.30)得出，为





(a) 垂直鸭翼+方向舵



(b) 非对称推力操纵面+方向舵

图 11.35　直接侧力操纵

$$[\delta_a \quad \delta_r \quad \delta_c]^T = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}_c[\delta_{a.c} \quad \delta_{r.c} \quad \delta_{c.c}]^T \tag{11.31}$$

由式(10.1)、式(10.3)，飞机的横航向运动方程为

$$\begin{bmatrix} s-\bar{Y}_\beta & 0 & 1 & -g/V_* & 0 \\ -\bar{L}_\beta & s-\bar{L}_p & -\bar{L}_r & 0 & 0 \\ -\bar{N}_\beta & -\bar{N}_p & s-\bar{N}_r & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \bar{Y}_{\delta_{c.c}} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{L}_{\delta_{a.c}} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{N}_{\delta_{r.c}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_{c.c} \\ \Delta\delta_{a.c} \\ \Delta\delta_{r.c} \end{bmatrix} = 0 \tag{11.32}$$

对于某一具体的模式，如侧向平移，可将式(11.32)整理成关于 $\Delta\delta_{c.c}$，$\Delta\phi$，$\Delta\psi$ 的形式：



$$\begin{bmatrix} s-\bar{Y}_\beta & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\bar{L}_\beta & s-\bar{L}_p & -\bar{L}_r & -\bar{L}_{\delta_{a.c}} & 0 \\ -\bar{N}_\beta & -\bar{N}_p & s-\bar{N}_r & 0 & -\bar{N}_{\delta_{r.c}} \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta r \\ \Delta\delta_{a.c} \\ \Delta\delta_{r.c} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\bar{Y}_{\delta_{c.c}} & -g/V_* & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\delta_{c.c} \\ \Delta\phi \\ \Delta\psi \end{bmatrix} \tag{11.33}$$

令 $\Delta\psi=\Delta\phi=0$，得

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p = \Delta r = 0 \\ &\frac{\Delta\beta}{\Delta\delta_{c.c}} = \frac{1}{s-\bar{Y}_\beta} \\ &\frac{\Delta\delta_{a.c}}{\Delta\delta_{c.c}} = -\frac{\bar{L}_\beta/\bar{L}_{\delta_{a.c}}}{s-\bar{Y}_\beta} \\ &\frac{\Delta\delta_{r.c}}{\Delta\delta_{c.c}} = -\frac{\bar{N}_\beta/\bar{N}_{\delta_{r.c}}}{s-\bar{Y}_\beta} \end{aligned}\right\} \tag{11.34}$$

式中 $\Delta\delta_{a.c}/\Delta\delta_{c.c}$，$\Delta\delta_{r.c}/\Delta\delta_{c.c}$反映了输入端指令的交联关系，并经式(11.31)转换成最终的舵偏转关系；而 $\Delta\beta/\Delta\delta_{c.c}$则描述了在该模式下飞机的动力学特性。为了使直接力控制下飞机动态特性满足要求，可以在三个通道(δ_a，δ_r，δ_c)内同时引入相应的反馈信号。

飞机空间机动运动的特性及其控制是相当复杂的，且涉及前沿科学较多。至今有些运动现象，其机理还不完全清楚，具体的控制方法也还没有实施，有待进一步研究。读者可以关注这方面的发展情况。

复习思考题

11.1　何谓急滚惯性耦合？并分析现代高速飞机急滚稳定性变差的原因。

11.2　解释 Weissman 组合偏离判据的含义。

11.3　分析飞机进入尾旋的常见原因。改出尾旋的一般力学机理是什么？

11.4　说明迎角/过载限制器的工作原理。

11.5　说明尾旋改出系统的工作原理。

11.6　为什么现代飞机设计中常采用放宽静稳定性技术？放宽后如何保证飞机正常飞行？

11.7　说明采用直接力控制的飞机的飞行特点。

11.8　从飞行力学的角度，说明设计过失速机动飞行的飞机应首先解决的关键问题。

第 12 章 导弹的飞行控制

12.1 导弹飞行控制特点

导弹是一种无人驾驶的飞行器，显然导弹的飞行控制与飞机的不同，完全依靠自动控制来完成飞行任务，所以导弹的飞行控制问题是设计导弹的一个非常重要的环节。不同类型的导弹，其控制方式不完全相同。这里仅介绍具有轴对称外形的航空战术导弹的控制。导弹自动控制系统的作用是：确定导弹和目标的空间位置（或相对位置）；根据位置数据（或相对位置数据）形成操纵导弹在空间飞行的控制信号；将控制信号传送到稳定控制系统中，由稳定控制系统操纵导弹执行机构，使导弹准确飞向目标，最后通过战斗部爆炸击毁目标。

为便于分析，常把复杂的导弹飞行自动控制系统归结为由三个回路组成。

12.1.1 舵回路

导弹飞行自动控制系统根据输入信号，通过执行机构（舵机）控制舵面。为改善舵机的性能，通常引入内反馈（将舵机的输出反馈至输入端），形成随动系统（或称伺服系统、伺服回路），简称为舵回路。舵回路由舵机、放大器及反馈元件组成，如图 12.1 虚线框内所示。

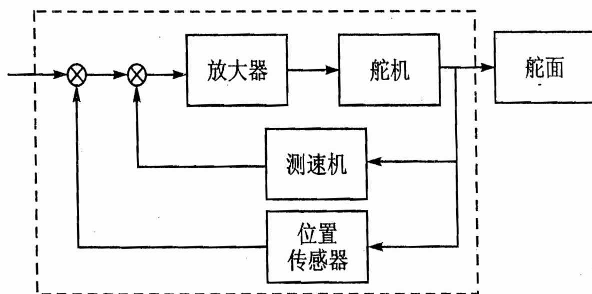


图 12.1 舵回路示意图

图 12.1 中测速机测出舵面偏转的角速度，反馈给放大器以增大舵回路的阻尼，改善舵回路的性能。位置传感器将舵面角位置信号反馈到舵回路的输入端，从而使控制信号与舵偏角一一对应。舵回路可用伺服系统理论来分析。舵回路的负载是舵面的惯性力矩和作用在舵面上的气动力矩（铰链力矩）。



12.1.2　稳定回路

舵回路加上敏感元件和放大计算装置组成的自动驾驶仪，与弹体组成新回路——稳定回路，如图12.2所示。有许多书籍也把这里的稳定回路概念称为稳定控制回路，或简称为自动驾驶仪。

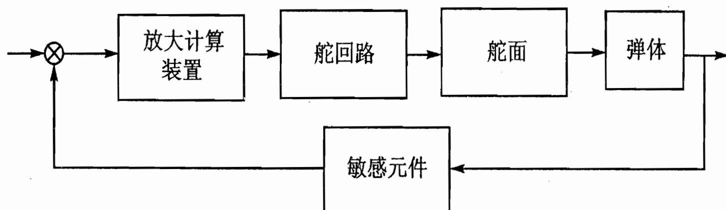


图12.2　稳定回路示意图

稳定回路的作用如下：

① 接收导引系统产生的控制信号，执行控制指令，操纵执行机构使导弹跟踪控制指令，使导弹重心准确地沿基准弹道飞行；

② 没有控制信号时，稳定回路起稳定作用，确保导弹在所有飞行条件下静态和动态的稳定，并消除干扰的影响。

稳定回路的工作基于反馈控制原理，其工作过程为测量偏(误)差、利用偏(误)差和消除偏(误)差的过程。众所周知，利用反馈构成闭环系统之后，就降低了系统对参数变化和未知扰动的敏感程度，以及降低了系统的时间常数，但传递系数也降低了。在开环增益足够大的条件下，输出与输入之间的传递特性与前向通路特性(包括控制对象在内)无关，而只与反馈回路特性有关。

由于该回路中包含了导弹弹体，而弹体的动态特性又随飞行条件(如速度、高度)而异，使稳定回路的分析变得较为复杂。

12.1.3　控制回路

稳定回路加上测量导弹重心位置的元件以及导弹运动学环节又组成了一个更大的新回路，称为控制回路。控制回路方框图如图12.3所示。

下面详细介绍稳定回路以及控制回路。其中重点为稳定回路的介绍，因为运动学环节和指令形成系统在运动学以及导引律部分均已介绍过了，有了稳定回路的知识完成整个控制回路的设计并不很困难。而舵回路构成的基本原理也同稳定回路中一样，而且相对来说比较简单，由于篇幅限制在此不多作讲解，读者有兴趣和需要可以翻阅相关参考资料。

另外，考虑到面对称导弹的控制类似于飞机，在第9章、第10章中已经介绍过飞机的稳定性和操纵性，故这里不再重复。下面将仅介绍轴对称导弹的滚转、俯仰及偏航稳定和控制回路。



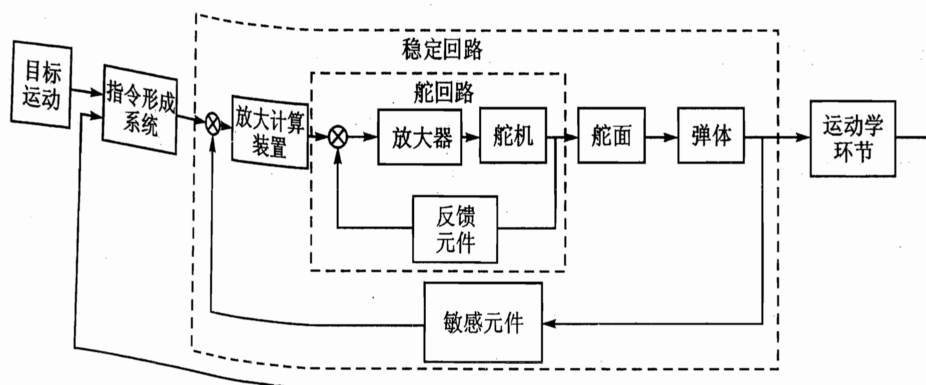


图 12.3　控制回路示意图

12.2　滚转稳定回路

12.2.1　无控时导弹的横侧扰动运动

1. 导弹扰动运动方程

为了讲述的方便，先回顾一下导弹的横侧向扰动运动方程组。由第6章导出的无控时导弹横侧扰动运动方程组的矩阵形式即式(6.88)现重列如下，为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{bmatrix}\beta\\p\\r\\\phi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{Y}_\beta & \alpha_*+\overline{Y}_p & \overline{Y}_r-1 & g\cos\theta_*/V_*\\ \overline{L}_\beta & \overline{L}_p & \overline{L}_r & 0\\ \overline{N}_\beta & \overline{N}_p & \overline{N}_r & 0\\ 0 & 1 & \tan\theta_* & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta\\p\\r\\\phi\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & \overline{Y}_{\delta_r}\\ \overline{L}_{\delta_a} & \overline{L}_{\delta_r}\\ \overline{N}_{\delta_a} & \overline{N}_{\delta_r}\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\delta_a\\ \delta_r\end{bmatrix}$$

在研究轴对称导弹的横侧向扰动运动时，由于其构形特点，导弹上每一部分相对弹体纵轴均匀对称，惯性积 $I_{xz}=0$；为保持纵横向正常操纵，一般弹上装有滚转稳定自动器，因此在同样的小扰动条件下，导弹的横侧向扰动运动可以分成横向(滚转)和侧向(偏航)运动单独处理。

导弹的滚转扰动运动方程可以独立写出，没有了与偏航运动的耦合项，其具体形式为式(6.94)，现重列如下：

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}&=\overline{L}_p p+\overline{L}_{\delta_a}\delta_a+\frac{1}{I_x}\Delta L\\ \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}&=p\end{aligned}\right\}$$

式中 ΔL 为干扰力矩项，包括了被认为已知的偏航运动引起的滚转力矩项以及其他各类原因产生的干扰力矩。



2. 模态特性

面对称导弹的横侧向模态特性与飞机类似，对应三种模态特性不再重复讲述。而对轴对称情况侧向扰动运动方程与纵向短周期扰动方程类同，模态特性也相类同，也不重复分析，对横侧向的研究仅留下滚转方向的一个模态。因此，对于轴对称导弹横侧向的分析，只需考虑滚转运动模态。

求解导弹滚转扰动运动在自动驾驶仪不工作(即 $\delta_a=0$)且仅有常值干扰力矩 ΔL 作用下的过渡函数得

$$p(t)=\dot{p}_0 e^{\bar{L}_p t}-\frac{\Delta L}{\bar{L}_p \cdot I_x}(1-e^{\bar{L}_p t}) \tag{12.1}$$

过渡过程结束时滚转角速度有稳态误差

$$p_s=-\frac{\Delta L}{\bar{L}_p \cdot I_x} \tag{12.2}$$

相应的导弹滚转角稳态值可将式(12.1)积分后得到

$$\phi_s=\phi_0-\frac{\Delta L}{\bar{L}_p \cdot I_x}t \tag{12.3}$$

可见，导弹在常值干扰力矩作用下，随着时间推移，滚转角不断增大。因此滚转运动不能自身达到理想的稳定要求，需要人为给以控制。最常用的设计方法是采用滚转自动驾驶仪，通过副翼偏转来克服干扰作用。

一般对于轴对称的导弹通常有两种滚转控制要求：滚转角稳定和滚转角速度稳定。对于雷达导引头的导弹，由于天线极化方向的影响，要求滚转角稳定；滚转角速度稳定的要求适用于装有红外导引头的导弹。下面详细介绍这两种稳定回路。

12.2.2　滚转角稳定回路

有时由于受到雷达导引头极化方向的影响，需要采用滚转自动驾驶仪来稳定滚转角。单独引入滚转角的反馈不能改善系统的振荡过程，因而实际上采用滚转角及其角速度两个反馈。下面先分析介绍一般稳定回路引入两个反馈的原因和优势，然后再具体讲解导弹滚转角稳定回路的构造和性能。

1. 通用的稳定回路构成及分析

常用的位置反馈稳定回路结构如图 12.4 所示。

图 12.4 中 x_0 为给定位置，可以是坐标位置或者角度等；x 为实际位置。运动方程为

$$u_{\Delta x}=K_T(x_c-x)=K_T\Delta x \tag{12.4}$$

式中 K_T 为放大系数；$u_{\Delta x}$为输出信号。当给定 $x_c=0$ 时，有

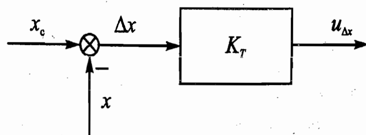


图 12.4　位置反馈示意图



$$u_{\Delta x} = -K_T x \tag{12.5}$$

利用测得的误差信号,经过放大,去操纵执行机构,使被控对象运动后的实际位置返回到给定位置,直到消除位差为止,即常规的闭环控制过程实现了位置的稳定过程。

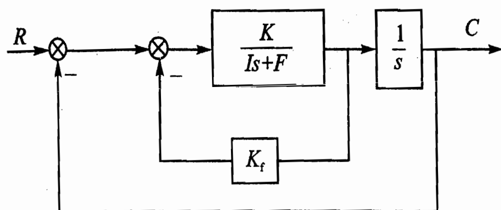


图 12.5 带测速反馈的位置随动系统

但通常上述回路响应并不十分理想,振荡较严重,阻尼不够。一般为了提高阻尼性能,在稳定回路中还要引入速度反馈构成阻尼回路。带测速反馈的位置随动系统如图 12.5 所示。

图 12.5 中,R,C 分别为输入/输出量,通常 R 对应为给定位置,C 对应为实际位置;K 为综合放大器及执行电机总传递系数;I,F 为折算到执行电机输出轴的转动惯量及实际阻尼系数;K_f 为测速电机传递函数。

未引入测速反馈时系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K}{Is+F}\frac{1}{s}}{1+\frac{K}{(Is+F)s}} = \frac{1}{\frac{I}{K}s^2+\frac{F}{K}s+1} = \frac{1}{T^2s^2+2\zeta Ts+1} \tag{12.6}$$

式中 $\zeta=\frac{F}{2\sqrt{IK}}$;$\frac{1}{T}=\omega_n=\sqrt{\frac{K}{I}}$。

从系统快速性及准确度观点看,希望 K 大,但这导致 ζ 降低,使系统超调增大。通常此时对应的动态响应不够理想,振荡严重。

引入测速反馈时系统闭环传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Is^2+(F+KK_f)s+K} = \frac{1}{\frac{1}{K}s^2+\frac{(F+KK_f)}{K}s+1} = \frac{1}{T'^2s^2+2\zeta'T's+1} \tag{12.7}$$

式中 $\zeta'=\frac{F+KK_f}{\sqrt{2KI}}$;$\frac{1}{T'}=\omega_n'=\sqrt{\frac{K}{I}}$。

可见系统相对阻尼系数 ζ' 比 ζ 显著提高,可能使系统超调量及稳定误差都比较小。适当调节反馈系数 K_f,可使 $\zeta'=0.4\sim0.8$,改善系统的阻尼性能。

可见引入速率反馈后,使 ζ' 远比 ζ 大,适当调节测速装置传递系数,可获得满意的阻尼性能,所以引入速率反馈的内回路有阻尼回路之称。

在通常的稳定回路设计中均采用带测速反馈的结构。

2. 常用的导弹滚转角稳定回路

通常轴对称导弹所用的滚转角稳定回路应用了稳定回路结构,采用滚转角及其角速度两个反馈,即副翼采用如下的偏转规律:



$$\delta_a = K_1\dot{\phi} + K_2\phi = K_1 p + K_2\phi \tag{12.8}$$

这样就得到稳定回路，如图 12.6 所示。

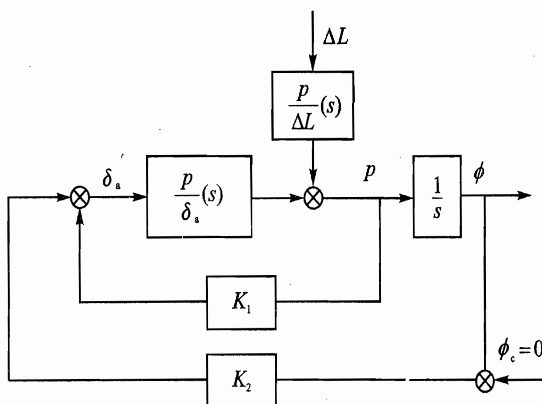


图 12.6 常用的干扰 ΔL 作用下的稳定回路

图 12.6 中，有

$$\frac{p}{\delta_a}(s) = \frac{\overline{L}_{\delta_a}}{s - \overline{L}_p}$$

$$\frac{p}{\Delta L}(s) = \frac{1/I_x}{s - \overline{L}_p}$$

通过结构变换，得到对于干扰的滚转角的传递函数为

$$\frac{\phi(s)}{\Delta L(s)} = \frac{1/I_x}{s^2 + (-\overline{L}_p + K_1\overline{L}_{\delta_a})s + K_2\overline{L}_{\delta_a}} \tag{12.9}$$

可以看到，角速度反馈的引入改善了阻尼特性，滚转角反馈的引入改善了系统的快速性。如果干扰力矩为常值，则可求得滚转角的稳态值为 $\phi_s = \dfrac{1/I_x}{K_2\overline{L}_{\delta_a}}$，因此，系统有静差；如果将反馈系数 K_2 取得大些，则静差就可以减小。

注意，若同时引入滚转角和滚转角角速度的反馈，虽然滚转角存在稳态误差，但角速度的稳态误差是可以消除的。

3. 消除静差后的导弹滚转角稳定回路

有些情况下需要将滚转角调节到零，故有必要研究消除静差的方法。一般引入积分环节可消除静差。

令 $x_1 = \int\phi \mathrm{d}t, x_2 = \phi, x_3 = \dot{\phi} = p$，则滚转动力学方程可扩写为状态空间的形式：

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \overline{L}_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ \overline{L}_{\delta_a}\end{bmatrix}\delta_a + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1/I_x\end{bmatrix}\Delta L \tag{12.10}$$

引入状态反馈

$$\delta_a = -[K_3 \quad K_2 \quad K_1][x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T \tag{12.11}$$

带入式(12.10)得

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -K_3\bar{L}_{\delta_a} & -K_2\bar{L}_{\delta_a} & -K_1\bar{L}_{\delta_a}+\bar{L}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/I_x \end{bmatrix} \Delta L \tag{12.12}$$

由此求得

$$\begin{bmatrix} x_1(s) \\ x_2(s) \\ x_3(s) \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} 1/I_x \\ s/I_x \\ s^2/I_x \end{bmatrix} \Delta L(s) \tag{12.13}$$

式中

$$\Delta = s^3 + (K_1\bar{L}_{\delta_a} - \bar{L}_p)s^2 + K_2\bar{L}_{\delta_a}s + K_3\bar{L}_{\delta_a}$$

因此,系统的极点可以任意配置。如果干扰力矩为常值,则滚转角积分 $x = \int \phi \mathrm{d}t$ 将有稳态值,这意味着 ϕ 的稳态值为零。当然,若干扰力矩非常值,只要变化得比较慢,滚转角的误差还是可以接受的。

根据控制规律式(12.11)得到无静差的滚转角控制回路如图 12.7 所示。

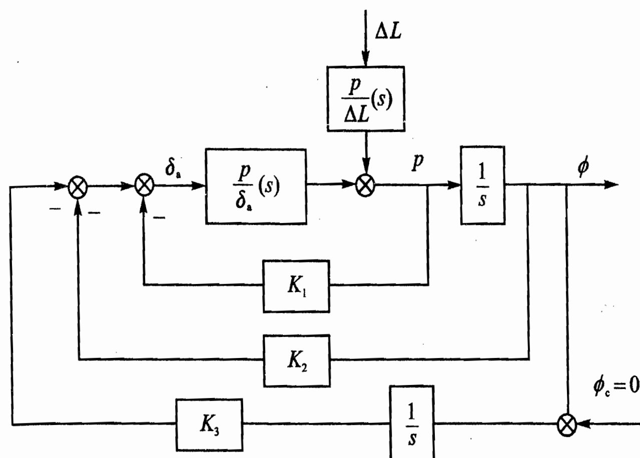


图 12.7 消静差后在干扰 ΔL 作用下的稳定回路

由于图 12.7 中均采用负反馈的形式,而 $\bar{L}_{\delta_a}<0$,因此三个反馈系数均应取负值。

12.2.3 滚转角速度稳定回路

对于仅对滚转角速度有要求的装有红外导引头的导弹来说,稳定回路情况则比较简单,如图 12.8 所示。



图 12.8 为一个角速度稳定回路的变形，其中副翼偏转规律为

$$\delta_a = Kp \tag{12.14}$$

并且

$$\frac{p}{\delta_a}(s) = \frac{\bar{L}_{\delta_a}}{s - \bar{L}_p}$$

$$\frac{p}{\Delta L}(s) = \frac{1/I_x}{s - \bar{L}_p}$$

由于 $\bar{L}_{\delta_a} < 0$，因此，如果取 $K < 0$，则回路实际上还是负反馈。通过结构变换得到对于干扰力矩的滚转角速度的传递函数

图 12.8　滚转角速度稳定回路

$$\frac{p(s)}{\Delta L(s)} = \frac{1/I_x}{s - \bar{L}_p + K\bar{L}_{\delta_a}} \tag{12.15}$$

可以看到反馈系数的引入使得系统极点左移了 $|K\bar{L}_{\delta_a}|$，因此增加了稳定性，同时阻尼系数由 $-\bar{L}_p$ 增加到了 $-\bar{L}_p + K\bar{L}_{\delta_a}$。假如干扰力矩为常值，则角速度的稳态值 $p_s = \frac{1/I_x}{-\bar{L}_p + K\bar{L}_{\delta_a}}$，通过反馈系数 K 的选择，可以把角速度的稳态值减小到红外导引头需要的误差范围。

图 12.9 为一种空空导弹上常用的角速度稳定装置，副翼由一对气动陀螺驱动。当导弹飞行时，陀螺转子在气流的冲击下高速转动，其转速可达 30 000～50 000 r/m。由于陀螺的定轴特性，当导弹产生滚转角速度时，每个陀螺转子产生力矩为

$$M_g = I_g \Omega \dot{\phi} \tag{12.16}$$

式中 I_g 为转子的转动惯量；Ω 为转子的转动角速度。该力矩驱动副翼偏转形成与导弹转动方向相反的力矩，从而克服导弹的滚转。

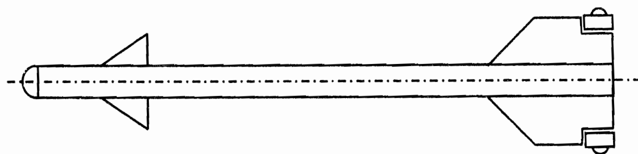


图 12.9　采用气动陀螺舵稳定角速度的空空导弹

舵面铰链力矩为

$$H_a = H_{a.\delta}\delta_a \tag{12.17}$$

式中 $H_{a.\delta} = \frac{\partial H_a}{\partial \delta_a}$。每片副翼的偏转角由陀螺力矩和铰链力矩的平衡得到

$$\delta_a = \frac{I_g \Omega \dot{\phi}}{H_{a.\delta}} \tag{12.18}$$

由于这样的导弹有四个副翼，因此，回路中的 $\dot{\phi}$ 反馈系数 K 为

$$K=\frac{4I_g\Omega}{H_{a.\delta}} \tag{12.19}$$

由此可以看出，增加陀螺转子的转动惯量和转速以及减小铰链力矩对副翼偏角的导数，可以增加反馈系数的值，因而可以减小稳态误差，提高控制精度。另外，上述气动陀螺副翼舵只能要求稳定滚转角速度，而且稳定效率还受飞行状态的影响。

12.3 俯仰和偏航稳定回路

在忽略重力影响时，轴对称导弹的侧向扰动运动方程与纵向短周期扰动方程类同，故初步设计时，认为导弹的纵向短周期运动特性同样适用于偏航运动。纵向和航向的自动器可以是同类型的。因此，本部分仅将对轴对称导弹的俯仰方向稳定回路给出分析。与滚转稳定回路不同的是，一般俯仰稳定回路不光需要对姿态进行稳定控制，还需要对加速度等其他量进行稳定或跟踪指令控制。下面分别进行介绍。

12.3.1 无控时导弹的俯仰扰动运动

1. 导弹短周期扰动运动方程

(1) 航迹系内的短周期扰动运动方程

为了给下面的分析和讲述提供模型，现给出的航迹系内导弹的纵向短周期扰动运动方程组，是在式(6.81)中忽略 $\Delta\alpha$ 引起的下洗延迟力矩影响后整理得到的。

取 $\boldsymbol{x}=[\Delta\theta \quad \Delta q \quad \Delta\alpha]^{\mathrm{T}}$，$u=\Delta\delta_e$，有

$$\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}u \tag{12.20}$$

式中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & \overline{M}_q & \overline{M}_\alpha\\ 0 & 1 & -Z_\alpha\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0\\ \overline{M}_{\delta_e}\\ -Z_{\delta_e}\end{bmatrix}$$

各动力学导数表达式及含义见第6章。

可以写出输入 $\Delta\delta_e$，输出 Δq 的传递函数

$$\frac{\Delta q(s)}{\Delta\delta_e(s)}=\frac{\overline{M}_{\delta_e}s+(\overline{M}_{\delta_e}Z_\alpha-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha)}{s^2+(Z_\alpha-\overline{M}_q)s-(\overline{M}_\alpha+\overline{M}_qZ_\alpha)} \tag{12.21}$$

为了方便，将传递函数改写如下：

$$\frac{\Delta q(s)}{\Delta\delta_e(s)}=\frac{K_2(c_1s+1)}{a_2s^2+a_1s+1} \tag{12.22}$$

式中



$$K_2 = -\frac{\overline{M}_{\delta_e} Z_\alpha - Z_{\delta_e} \overline{M}_\alpha}{\overline{M}_\alpha + \overline{M}_q Z_\alpha}, \qquad a_2 = -\frac{1}{\overline{M}_\alpha + \overline{M}_q Z_\alpha}$$

$$a_1 = -\frac{Z_\alpha - \overline{M}_q}{\overline{M}_\alpha + \overline{M}_q Z_\alpha}, \qquad c_1 = \frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\overline{M}_{\delta_e} Z_\alpha - Z_{\delta_e} \overline{M}_\alpha}$$

(2) 机体系内的短周期扰动运动方程

为了给后面的设计提供模型，下面给出机体系内的短周期运动方程及相关数据：

$$\left.\begin{aligned} \dot{\alpha} &= -\frac{F_z}{mV}\cos(\alpha) + q \\ \dot{q} &= \frac{M}{I_y} \\ n_z &= \frac{F_z}{mg} \end{aligned}\right\} \tag{12.23}$$

式中 n_z 为法向过载系数；F_z 为弹体坐标系下法向力(N)，且 $F_z = qSC_n(|\alpha|, \delta, Ma)$，其中，$q$ 为动压$\left(\frac{1}{2}\rho V^2\right)$，$\rho$ 为大气密度；M 为俯仰力矩(N·m)，且 $M = qScC_m(|\alpha|, \delta, Ma)$；$S$ 为参考面积；Ma 为马赫数；c 为参考长度。

当马赫数在 2～4 之间时，空气动力及空气动力矩系数可写为

$$C_n = -\operatorname{sign}(\alpha)(\alpha_n|\alpha|^3 + b_n|\alpha|^2 + c_n(2 - Ma/3)|\alpha|) + d_n\delta \tag{12.24}$$

$$C_m = \operatorname{sign}(\alpha)(\alpha_m|\alpha|^3 + b_m|\alpha|^2 + c_m(-7 + 8Ma/3)|\alpha|) + d_m\delta \tag{12.25}$$

由此导弹的状态方程可写为

$$\dot{\alpha} = f_1(\alpha, q, \delta_e, Ma) = -\frac{F_z}{mV}\cos(\alpha) + q \tag{12.26}$$

$$\dot{q} = f_2(\alpha, q, \delta_e, Ma) = \frac{M}{I_y} \tag{12.27}$$

取其输出方程为

$$\left.\begin{aligned} \alpha &= \alpha \\ q &= q \\ n_z &= F_z/mg \end{aligned}\right\} \tag{12.28}$$

求相应的扰动运动方程，可在非线性方程组平衡工作点附近进行线化(用一阶泰勒级数展开法)，并略去二阶以上小量而得出，其状态空间形式如下：

$$\begin{bmatrix} \Delta(\dot{x}) \\ \Delta(y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta(x) \\ \Delta(u) \end{bmatrix} \tag{12.29}$$

其具体形式为

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{\alpha} \\ \Delta\dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix} \Delta\delta_e \tag{12.30}$$



$$\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta q\\ \Delta n_y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\\ c_{31} & c_{32}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\alpha\\ \Delta q\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}d_{11}\\ d_{21}\\ d_{31}\end{bmatrix}\Delta\delta_e \tag{12.31}$$

式中 $\Delta\alpha,\Delta\delta_e,\Delta q,\Delta n_y$ 等分别为各量绕平衡点(α_*,q_*,δ_e,Ma)的扰动量，另外方程式中

$$a_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial\alpha}=-\frac{\sin\alpha qS}{mV}[a_n\alpha^3+b_n\alpha^2+c_n(2-Ma/3)\alpha+d_n\delta_e]+$$

$$\frac{\cos\alpha qS}{mV}[3a_n\alpha^2+2b_n\alpha+c_n(2-Ma/3)]$$

$$a_{12}=\frac{\partial f_1}{\partial q}=1$$

$$a_{22}=\frac{\partial f_2}{\partial q}=0$$

$$a_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial\alpha}=\frac{qSc}{I_y}[3a_m\alpha^2+2b_m\alpha+c_m(7-8Ma/3)]$$

$$b_{11}=\frac{\partial f_1}{\partial\delta}=\frac{qS}{mV}\cos(\alpha)d_n$$

$$b_{21}=\frac{\partial f_2}{\partial\delta}=\frac{qSc}{I_y}d_m$$

$$c_{11}=\frac{\partial\alpha}{\partial\alpha}=1$$

$$c_{12}=\frac{\partial\alpha}{\partial q}=0$$

$$c_{21}=\frac{\partial q}{\partial\alpha}=0$$

$$c_{22}=\frac{\partial q}{\partial q}=1$$

$$c_{31}=\frac{\partial n_z}{\partial\alpha}=\frac{qS}{m}[3a_n\alpha^2+2b_n\alpha+c_n(2-Ma/3)]$$

$$c_{32}=\frac{\partial n_z}{\partial q}=0$$

$$d_{11}=\frac{\partial\alpha}{\partial\delta}=0$$

$$d_{21}=\frac{\partial q}{\partial\delta}=0$$

$$d_{31}=\frac{\partial n_z}{\partial\delta}=\frac{qS}{m}d_n$$

式中各系数 a_n,b_n,c_n,d_n 等对于某导弹可取为



$$a_n = 0.000\,103\ (°)^{-3},\qquad a_m = 0.000\,215\ (°)^{-3}$$

$$b_n = -0.009\,45\ (°)^{-2},\qquad b_m = -0.019\,5\ (°)^{-2}$$

$$c_n = -0.169\,6\ (°)^{-1},\qquad c_m = 0.051\ (°)^{-1}$$

$$d_n = -0.034\ (°)^{-1},\qquad d_m = -0.206\ (°)^{-1}$$

参考面积 $S=0.040\,9\ \text{m}^2$；参考长度 $c=0.228\ \text{m}$。

在后面的设计推导过程中，上述公式中“Δ”往往也可省略不写。

2. 模态特性

通过对导弹的纵向扰动运动特征方程的根进行分析可知，在导弹具有足够的静稳定性时，两对特征根中其中一对共轭复根的实部和虚部的绝对值远远超过另一对共轭复根的实部和虚部的绝对值，或一对共轭复根的实部的绝对值远远大于另外两个实根的绝对值。实部的绝对值表征着扰动运动的衰减快慢，一对大复根（就其模值而言）对应于快衰减运动，一对小复根对应于慢衰减运动。

经过验证，无论扰动运动具有怎样的性质（由两个振荡运动组成或由一个振荡运动和两个非周期运动组成），根与根之间比例关系的结论总是正确的，即可将导弹的纵向扰动运动分为长周期和短周期运动两种运动模态来考虑。由于导弹的工作特点，飞行时间有限，长周期运动模态的影响较小，本节的分析仅考虑短周期运动。

12.3.2 姿态稳定回路

要控制俯仰角，必须引入俯仰角的反馈，否则无法判断俯仰角是否达到了预定值。为了改善闭环响应的动态特性，通常还引入角速度反馈，图 12.10 是一个姿态稳定回路的结构图，回路中引入了姿态角和角速度的反馈，输入升降舵，输入角速度的传递函数为

$$\frac{\Delta q(s)}{\Delta\delta_e(s)} = \frac{K_2(c_1 s+1)}{a_2 s^2 + a_1 s + 1} \tag{12.32}$$

图中 K_θ 和 K_q 是待设计的反馈系数。这里忽略测量装置（自由陀螺和测速陀螺）和舵机及执行机构的动力学。

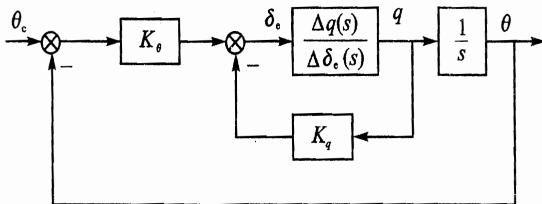


图 12.10 俯仰角稳定回路结构图

经过简单推导，可得到闭环传递函数

$$\frac{\theta(s)}{\theta_c(s)}=\frac{K_\theta K_2(c_1s+1)}{a_2s^3+(a_1+K_qK_2c_1)s^2+(1+K_qK_2+K_\theta K_2c_1)s+K_\theta K_2} \tag{12.33}$$

从其特征方程来看，方程次数为三次，要确定的参数只有两个，因此不能应用极点配置等方法设计反馈系数 K_θ 和 K_q，只能根据 Hurwitz 稳定性判据及闭环性能来确定。

根据 Hurwitz 稳定性判据，系统稳定的条件为

$$\left.\begin{aligned}&(a_1+K_qK_2c_1)/a_2>0\\&(1+K_qK_2+K_\theta K_2c_1)/a_2>0\\&K_\theta K_2/a_2>0\\&(a_1+K_qK_2c_1)(1+K_qK_2+K_\theta K_2c_1)-K_\theta K_2\cdot a_2>0\end{aligned}\right\} \tag{12.34}$$

考虑到

$$K_2=-\frac{\overline{M}_{\delta_e}Z_\alpha-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha}{\overline{M}_\alpha+\overline{M}_qZ_\alpha},\qquad c_1=\frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\overline{M}_{\delta_e}Z_\alpha-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha}$$

所以根据不同气动外形的特点对鸭式导弹而言 $K_2>0$，对正常式导弹 $K_2<0$，不管鸭式还是正常式导弹都有 $c_1>0$，对于稳定的导弹(角速度和迎角稳定)有 $\alpha_2>0$ 和 $\alpha_1>0$。对稳定的鸭式导弹，上面不等式组可转化为

$$\left.\begin{aligned}&K_q>-\frac{a_1}{K_2c_1}\\&K_q>-c_1K_\theta-\frac{1}{K_2}\\&K_\theta>0\\&K_2^2c_1K_q^2+(K_2c_1+K_2a_1+K_2^2c_1^2K_\theta)K_q+(a_1+K_2c_1a_1K_\theta-K_2a_2K_\theta)>0\end{aligned}\right\} \tag{12.35}$$

如果以 K_θ 为横坐标，以 K_q 为纵坐标，则根据不等式(12.35)很容易画出一个平面区域，即参数的稳定域，在此稳定域内选用合适的参数即可得到比较理想的稳定回路。

再看系统的增益。令 $s=0$ 即可得到系统增益为 1，因此，如果系统稳定，则系统能够跟踪指令信号。下面给一个例子。

例： 某稳定的鸭式导弹，动力系数为 $\overline{M}_\alpha=-2.98\ \mathrm{s}^{-2}$，$\overline{M}_{\delta_e}=2.31\ \mathrm{s}^{-2}$，$Z_\alpha=0.577\ \mathrm{s}^{-1}$，$\overline{M}_q=-0.49\ \mathrm{s}^{-1}$，$Z_{\delta_e}=0\ \mathrm{s}^{-2}$，求图 12.10 回路中 K_θ，K_q 的稳定域。

首先计算出

$$a_2=-\frac{1}{\overline{M}_\alpha+\overline{M}_qZ_\alpha}=0.306\,5,\qquad a_1=-\frac{Z_\alpha-\overline{M}_q}{\overline{M}_\alpha+\overline{M}_qZ_\alpha}=0.327\,0$$

$$c_1=\frac{\overline{M}_{\delta_e}}{\overline{M}_{\delta_e}Z_\alpha-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha}=1.733,\qquad K_2=-\frac{\overline{M}_{\delta_e}Z_\alpha-Z_{\delta_e}\overline{M}_\alpha}{\overline{M}_\alpha+\overline{M}_qZ_\alpha}=0.408\,5$$

这样就可以解出

$$K_q>-0.461\,9=P_1$$

$$K_q>-1.733K_\theta-2.448=P_2$$



$K_\theta > 0 = P_3$

$$0.289\,2K_q^2 + (0.841\,6 + 0.501\,3K_\theta)K_q + (0.327\,0 + 0.106\,3K_\theta) > 0$$

结合 $K_\theta>0$ 解最后一个不等式得

$$K_q > -1.455 - 0.866\,7K_\theta + 1.729\sqrt{0.330\,0 + 0.720\,8K_\theta + 0.251\,3K_\theta^2} = P_4$$

以 K_θ 为横坐标，以 K_q 为纵坐标可画出曲线 P_1，P_2，P_3 和 P_4，计算出 P_1 与 P_4 的交点 $A(-0.000\,681\,3, -0.461\,9)$，$P_1$ 和 P_3 的交点 $B(0, -0.461\,9)$，P_3 和 P_4 的交点 $C(0, -0.461\,8)$，P_3 上某点 $D(0,3)$，P_4 上右支曲线的上半支上某点 $E(3, 0.176\,7)$，则参数 K_θ 和 K_q 的稳定域为图 12.11 中射线$\overrightarrow{CD}$和有向曲线 CE(从 C 到 E)所包含区域。

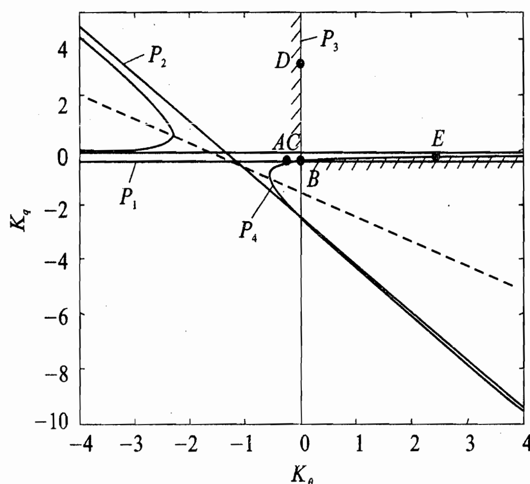


图 12.11　参数 K_θ 和 K_q 的稳定区域

12.3.3　加速度稳定回路

前面讲述的各种稳定回路中已经介绍了关于传统的角稳定回路和阻尼稳定回路的原理和作用，此处不再赘述。本部分将重点讲解几种加速度稳定回路设计方法的完整设计过程，其中还包括一些非经典的设计方法参与比较。俯仰方向的加速度稳定回路的设计在导弹的控制回路设计中比较有代表性，经常作为一些控制方法的参考设计回路，此部分回路设计又被习惯称为自动驾驶仪设计。

下面把加速度稳定回路设计按习惯称为自动驾驶仪设计。

1. 经典的三回路自动驾驶仪

(1) 自动驾驶仪结构

采用机体坐标系下导弹纵向短周期扰动运动方程及数据。目前常见的加速度稳定回路的结构如图 12.12 所示。

图 12.12 中，虚线框代表自动驾驶仪部分，其整体传递函数为 $K(s)$，包含有四个可供选择

图 12.12 三回路自动驾驶仪结构示意图

的增益 K_{dc}, K_{nz}, K_i, K_q。K_{dc}是表示指令整形部分的参数，由此参数来保证无稳态误差。x_0，x_1, x_2, x_3, x_4 都是代表该处输出的状态量，可以有实际的物理意义，也可以没有物理意义，在此只作为代数意义上的表示。$K(s)$部分的输入是指令法向过载系数 n_{zc}，输出是指令舵偏角，在框图中用 x_3 表示。

在控制器虚线框外面的部分都是相关弹体部分的模块。其中舵机、速率陀螺以及加速度计环节在本仿真研究中取成 1，在绝大多数仿真研究中是合理的。弹体部分用两个传递函数 $\frac{q}{\delta_e}(s)$和$\frac{n_z}{\delta_e}(s)$来表示，分别为弹体部分俯仰角速度 q 以及法向过载系数 n_z 对舵偏角 δ_e 的传递函数，该传递函数仅与所选弹体模型对应的各参数有关，是导弹本身的特性，不能人为改动。

(2) 稳定回路中各参数的确定与设计

1) 弹体部分传递函数$\frac{q}{\delta_e}(s)$和$\frac{n_z}{\delta_e}(s)$的确定

在确定如图 12.12 所示的自动驾驶仪传递函数 $K(s)$中的各项可人为改动的增益之前，先确定弹体部分各模块中的参数。

首先，舵机、速率陀螺以及加速度计环节在本仿真研究中取成 1；

其次，由所选用的导弹模型各项参数求出弹体部分俯仰角速度 q 以及法向过载系数 n_z 分别对舵偏角 δ_e 的传递函数$\frac{q}{\delta_e}(s)$和$\frac{n_z}{\delta_e}(s)$（下面书写时省略(s)）。由导弹系统的特性可知该传递函数分别具有如下形式：

$$\frac{q}{\delta_e} = K_1 \frac{a_1 s + 1}{b_1 s^2 + b_2 s + 1} \tag{12.36}$$

$$\frac{n_z}{\delta_e} = K_2 \frac{a_2 s^2 + a_3 s + 1}{b_1 s^2 + b_2 s + 1} \tag{12.37}$$

对线性化后的导弹动力学方程求 Laplace 变换得

$$s\alpha = a_{11}\alpha + q + b_{11}\delta_e \tag{12.38}$$

$$sq = a_{21}\alpha + 0 + b_{21}\delta_e \tag{12.39}$$



$$n_z = c_{31}\alpha + 0 + d_{31}\delta_e \tag{12.40}$$

① 俯仰角速度 q 对舵偏角 δ 的标准形式传递函数中各系数的确定。

由式(12.38)得

$$\alpha = \frac{1}{(s-a_{11})}(q + b_{11}\delta_e) \tag{12.41}$$

将式(12.41)代入式(12.39)得

$$sq(s-a_{11}) = a_{21}(q + b_{11}\delta_e) + b_{21}\delta_e(s-a_{11}) \tag{12.42}$$

则

$$\frac{q}{\delta_e} = \frac{b_{21}s + (a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})}{s^2 - a_{11}s - a_{21}} = -\frac{(a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21})}{a_{21}} \frac{\dfrac{b_{21}}{a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21}}s + 1}{-\dfrac{1}{a_{21}}s^2 + \dfrac{a_{11}}{a_{21}}s + 1} \tag{12.43}$$

对应标准传递函数形式(12.36)中的各系数为

$$K_1 = -\frac{a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21}}{a_{21}}, \qquad a_1 = \frac{b_{21}}{a_{21}b_{11} - a_{11}b_{21}}$$

$$b_1 = -\frac{1}{a_{21}}, \qquad b_2 = \frac{a_{11}}{a_{21}}$$

② 法向过载系数 n_z 对舵偏角 δ 的标准形式传递函数中各系数的确定。

由式(12.39)得

$$q = \frac{a_{21}}{s}\alpha + \frac{b_{21}}{s}\delta_e \tag{12.44}$$

再将式(12.44)代入式(12.38)得

$$\alpha = \frac{b_{21} + sb_{11}}{s^2 - a_{11}s - a_{21}}\delta_e \tag{12.45}$$

最后将式(12.45)代入式(12.40)得

$$\frac{n_z}{\delta_e} = \frac{d_{31}s^2 + (c_{31}b_{11} - a_{11}d_{31})s + (c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31})}{s^2 - a_{11}s - a_{21}} =$$

$$-\frac{(c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31})}{a_{21}} \frac{\dfrac{d_{31}}{c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31}}s^2 + \dfrac{c_{31}b_{11} - a_{11}d_{31}}{c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31}}s + 1}{-\dfrac{1}{a_{21}}s^2 + \dfrac{a_{11}}{a_{21}}s + 1} \tag{12.46}$$

对应标准传递函数形式式(12.37)中的各系数为

$$K_2 = -\frac{(c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31})}{a_{21}}$$

$$a_2 = \frac{d_{31}}{c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31}}, \qquad a_3 = \frac{c_{31}b_{11} - a_{11}d_{31}}{c_{31}b_{21} - a_{21}d_{31}}$$

$$b_1 = -\frac{1}{a_{21}}, \qquad b_2 = \frac{a_{11}}{a_{21}}$$

2）各可调增益的确定

下面介绍的两种方法（Butterworth 特殊极点配置法、极点配置方法）都是基于平衡工作点线性化方程设计的控制器。

由回路图 12.12 直接写出系统开环传递函数

$$G(s)=K_{nz}\frac{x_4}{x_1}\frac{n_z}{\delta_e} \tag{12.47}$$

其中，由子回路可得

$$\frac{x_4}{x_1}=\frac{K_qG_aK_i}{K_qK_iG_a\dfrac{q}{\delta_e}+K_qG_a\dfrac{q}{\delta_e}s+s}=\frac{K_qK_i}{K_qK_i\dfrac{q}{\delta_e}+K_q\dfrac{q}{\delta_e}s+s} \tag{12.48}$$

所以，特征多项式可写成

$$\Delta_{cl}(s)=1+K_{nz}\frac{x_4}{x_1}\frac{n_z}{\delta_e}=1+\frac{K_{nz}K_qK_i}{K_qK_i\dfrac{q}{\delta_e}+K_q\dfrac{q}{\delta_e}s+s}\frac{n_z}{\delta_e} \tag{12.49}$$

经整理得

$$\Delta_{cl}(s)=1+\frac{K_{nz}K_qK_iK_2(a_2s^2+a_3s+1)}{K_qK_iK_1(a_1s+1)+K_qK_1(a_1s^2+s)+s(b_1s^2+b_2s+1)} \tag{12.50}$$

对上式通分整理，可将特征多项式写为

$$\begin{aligned}\Delta_{cl}(s)=&K_qK_iK_1(a_1s+1)+K_qK_1(a_1s^2+s)+s(b_1s^2+b_2s+1)+\\&K_{nz}K_qK_iK_2(a_2s^2+a_3s+1)=\\&(b_1)s^3+(b_2+K_qK_1a_1+K_{nz}K_iK_qK_2a_2)s^2+\\&(1+K_qK_iK_1a_1+K_qK_1+K_{nz}K_iK_qK_2a_3)s+(K_{nz}K_qK_iK_2+K_qK_iK_1)\end{aligned} \tag{12.51}$$

下面将采用两种不同的方法来确定可以满足性能要求的自动驾驶仪中四个增益的值。

① 使用极点配置方法时自动驾驶仪中各参数的确定。

由该回路可以看出，闭环回路的特征多项式应为三阶的。因此，可用极点配置法，令其等于下式形式：

$$\Delta_{cl}(s)=(s^2+2\varsigma\omega_1s+\omega_1^2)(s+\omega_2) \tag{12.52}$$

式中ς为闭环回路的阻尼比；ω_1 为复数极点的位置；ω_2 为实数极点的位置。这几个参数可以根据性能要求定出。

另外，上述特征方程还可改写为

$$\Delta_{cl}(s)=\left(\frac{1}{\omega_1^2\omega_2}\right)s^3+\left(\frac{1}{\omega_1^2}+\frac{2\varsigma}{\omega_1\omega_2}\right)s^2+\left(\frac{2\varsigma}{\omega_1}+\frac{1}{\omega_2}\right)s+1 \tag{12.53}$$

取 $R=\dfrac{\omega_1}{\omega_2}$，将 $\omega_1=R\omega_2$ 代入上式得



$$\Delta_{cl}(s)=\left(\frac{1}{R^2\omega_2^3}\right)s^3+\left(\frac{1}{R^2\omega_2^2}+\frac{2\varsigma}{R\omega_2^2}\right)s^2+\left(\frac{2\varsigma}{R\omega_2}+\frac{1}{\omega_2}\right)s+1 \tag{12.54}$$

或

$$\Delta_{cl}(s)=s^3+(2\varsigma R+1)\omega_2 s^2+(2\varsigma R+R^2)\omega_2^2 s+(R^2\omega_2^3) \tag{12.55}$$

对式(12.55)和式(12.51)取对应项系数相等得

s^2：　$K_q(K_1a_1)+K_{nz}K_iK_q(K_2a_2)=(2\varsigma R+1)\omega_2 b_1-b_2$

s^1：　$K_qK_1+K_iK_q(K_1a_1)+K_{nz}K_iK_q(K_2a_3)=(2\varsigma R+R^2)\omega_2^2 b_1-1$

s^0：　$K_qK_iK_1+K_{nz}K_iK_qK_2=R^2\omega_2^3 b_1$

若取 $G_1=K_{nz}K_iK_q, G_2=K_iK_q, G_3=K_q$，则上面三个等式可写为规则的 $\boldsymbol{KG}=\boldsymbol{B}$ 的形式：

$$\begin{bmatrix} K_2 & K_1 & 0 \\ K_2a_3 & K_1a_1 & K_1 \\ K_2a_2 & 0 & K_1a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} R^2\omega_2^3 b_1 \\ (2\varsigma R+R^2)\omega_2^2 b_1-1 \\ (2\varsigma R+1)\omega_2 b_1-b_2 \end{bmatrix} \tag{12.56}$$

首先单独确定俯仰角速度的反馈增益 K_q。对于图 12.12 中的子回路“K_q→舵机→q/δ→速率陀螺→K_q”，在穿越频率 ω_c 处满足以下关系式：

$$\left|K_q\frac{q}{\delta}(j\omega_c)\right|=-1 \tag{12.57}$$

即可得到

$$K_q=\frac{-1}{\left|\frac{q}{\delta}(j\omega_c)\right|} \tag{12.58}$$

其中，在选定了上述穿越频率 ω_c 后，可以由下式计算求得 $\left|\frac{q}{\delta}(j\omega_c)\right|$，进而计算得到 K_q，即

$$\left|\frac{q}{\delta}(j\omega_c)\right|=K_1\left|\frac{a_1j\omega_c+1}{b_1(j\omega_c)^2+b_2(j\omega_c)+1}\right| \tag{12.59}$$

再选取合适的 R,ς的值，则上面的关于未知量 $\boldsymbol{G}$ 的方程式(12.56)中的 $\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中的各元素中将只有 ω_2 是未知的。又 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{K}^{-1}\boldsymbol{B}$，取

$$\boldsymbol{K}^{-1}=\boldsymbol{K}_i=\begin{bmatrix} K_2 & K_1 & 0 \\ K_2a_3 & K_1a_1 & K_1 \\ K_2a_2 & 0 & K_1a_1 \end{bmatrix}^{-1} \tag{12.60}$$

$$\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} K_2 & K_1 & 0 \\ K_2a_3 & K_1a_1 & K_1 \\ K_2a_2 & 0 & K_1a_1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} R^2\omega_2^3 b_1 \\ (2\varsigma R+R^2)\omega_2^2 b_1-1 \\ (2\varsigma R+1)\omega_2 b_1-b_2 \end{bmatrix} \tag{12.61}$$

前面已经求出 $G_3=K_q$，因此可以由方程式(12.61)的第三行得到关于 ω_2 的三次方程如下：



$$G_3 = K_q = \omega_2^3(K_{i31}b_1R^2) + \omega_2^2[K_{i32}(2\varsigma R + R^2)b_1] +$$
$$\omega_2[K_{i33}(2\varsigma R + 1)b_1] - (K_{i32} + b_2K_{i33})$$

式中 K_{ijk} 表示 K_i 中第 j 行第 k 列的元素。ω_2 应取该方程三个根中的惟一实数根或者实数根中最大的那一个。至此，可以由式(12.61)中的另两个方程求出 G_1 和 G_2。再由关于 G_1,G_2,G_3 的定义式求解出另两个增益 K_{nz},K_i 的值。接下来求解 K_{dc}，整个回路的指令增益为

$$G_{dc} = \frac{K_{nz}K_2}{K_{nz}K_2 + K_1} \tag{12.62}$$

所以，用来进行除静差的增益 K_{dc} 可直接取为 $1/G_{dc}$。至此，应用极点配置方法设计的控制器中的参数都已经确定了。

② 使用 Butterworth 特殊极点配置方法时自动驾驶仪中参数的确定 。

Butterworth 特殊极点配置方法实际上也是一种典型的极点配置方法，取回路的阻尼始终为 0.5，对于三阶系统，此参数保证了一对复极点始终保持在合适的位置，如图 12.13 所示。

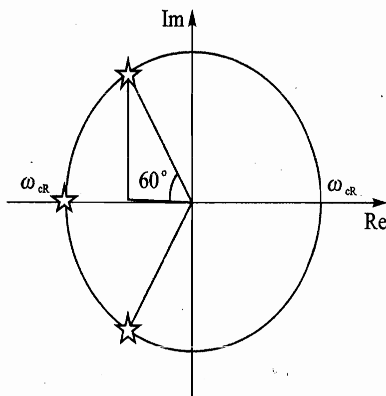


图 12.13　Butterworth 特殊极点配置方法极点示意图

图 12.13 中的五角星代表闭环极点，此方法保证了两个复数极点与原点连线同实轴的夹角始终为 60°。因此，本方法是典型的三阶系统极点配置方法。

用此方法得到的闭环特征多项式将具有如下形式：

$$\Delta_{cl}(s) = As^3 + Bs^2 + Cs + 1 \tag{12.63}$$

式中

$$A = \frac{1}{\omega_{cR}^3}, \qquad B = \frac{1}{\omega_{cR}^2}, \qquad C = \frac{1}{\omega_{cR}}$$

通常情况下，根据性能要求选取合适的 ω_{cR} 即可得到所需控制器。

对多项式式(12.63)进行整理，可写成

$$\Delta_{cl}(s) = s^3 + 2\omega_{cR}s^2 + 2\omega_{cR}^2 s + \omega_{cR}^3 \tag{12.64}$$

用同样的待定系数法，对式(12.64)和式(12.51)取对应项系数相等得



$$s^2: \quad K_q(K_1a_1)+K_{nz}K_iK_q(K_2a_2)=\omega_{cR}b_1-b_2$$

$$s^1: \quad K_qK_1+K_iK_q(K_1a_1)+K_{nz}K_iK_q(K_2a_3)=2\omega_{cR}^2b_1-1$$

$$s^0: \quad K_qK_iK_1+K_{nz}K_iK_qK_2=\omega_{cR}^3b_1$$

令 $G_1=K_{nz}K_iK_q, G_2=K_iK_q, G_3=K_q$，上面三个等式可写为 $\boldsymbol{KG}=\boldsymbol{B}$ 的形式：

$$\begin{bmatrix} K_2 & K_1 & 0 \\ K_2a_3 & K_1a_1 & K_1 \\ K_2a_2 & 0 & K_1a_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ G_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \omega_{cR}^3b_1 \\ \omega_{cR}^2b_1-1 \\ \omega_{cR}b_1-b_2 \end{bmatrix} \tag{12.65}$$

其中，若 ω_{cR} 取定后，$\boldsymbol{K}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 中各元素将都是常数，则可求得 $\boldsymbol{G}$，控制器中各参数为

$$K_q=G(3,1), \qquad K_i=\frac{G(2,1)}{G(3,1)}, \qquad K_{nz}=\frac{G(1,1)}{G(2,1)}$$

另外，求解增益 K_{dc} 的方法和应用极点配置方法时的解法相同，此处不再赘述。至此，应用 Butterworth 特殊极点配置方法设计的控制器中的参数都已经确定了。

2. 采用 H_∞ 回路成形方法的自动驾驶仪设计

(1) 自动驾驶仪结构

H_∞ 回路成形方法的自动驾驶仪示意图如图 12.14 所示。

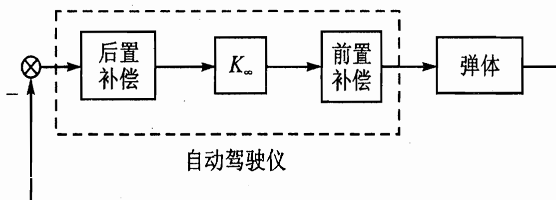


图 12.14　H_∞ 回路成形方法的自动驾驶仪示意图

(2) 各参数的确定

1) 预备知识

① 对回路奇异值的要求。

考虑如图 12.15 所示的反馈系统。

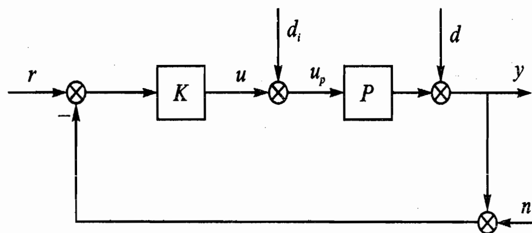


图 12.15　标准反馈结构图

定义输入回路传递矩阵 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}}$ 和输出回路传递矩阵 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{o}}$ 分别为

$$\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}}=\boldsymbol{KP},\qquad \boldsymbol{L}_{\mathrm{o}}=\boldsymbol{PK}$$

式中 $\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}}$ 由在对象的输入处断开回路得到；$\boldsymbol{L}_{\mathrm{o}}$ 由在对象的输出处断开回路得到。输入灵敏度矩阵定义为从 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{i}}$ 到 $\boldsymbol{u}_p$ 的传递矩阵

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{i}})^{-1},\qquad \boldsymbol{u}_p=\boldsymbol{S}_{\mathrm{i}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{i}}$$

输出灵敏度矩阵定义为从 $\boldsymbol{d}$ 到 $\boldsymbol{y}$ 的传递矩阵

$$\boldsymbol{S}_{\mathrm{o}}=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}_{\mathrm{o}})^{-1},\qquad \boldsymbol{y}=\boldsymbol{S}_{\mathrm{o}}\boldsymbol{d}$$

显然，通过减小输入灵敏度函数 S_{i} 和输出灵敏度函数 S_{o} 可以分别减小干扰 d_{i} 和 d 对对象输入和输出的影响。又由于在给定的频率范围内矩阵大小的概念可以用依赖于频率的奇异值表示，则上述要求可改写为要求如下两量要小，即

$$\bar{\sigma}(S_{\mathrm{i}})=\bar{\sigma}[(I+L_{\mathrm{i}})^{-1}]=\bar{\sigma}[(I+KP)^{-1}]=\frac{1}{\underline{\sigma}(I+KP)}$$

$$\bar{\sigma}(S_{\mathrm{o}})=\bar{\sigma}[(I+L_{\mathrm{o}})^{-1}]=\bar{\sigma}[(I+PK)^{-1}]=\frac{1}{\underline{\sigma}(I+PK)}$$

式中 $\underline{\sigma}$,$\bar{\sigma}$ 分别代表最大奇异值和最小奇异值。

类似，由 H_∞ 控制理论可以得到，对于上面的反馈回路，良好的性能要求在某频域，特别是某低频域$(0,\omega_{\mathrm{l}})$满足

$$\underline{\sigma}(PK)\gg 1,\qquad \underline{\sigma}(KP)\gg 1,\qquad \underline{\sigma}(K)\gg 1$$

而好的鲁棒性和强的抗传感器噪声则要求在某些频域，尤其是某高频域$(\omega_{\mathrm{h}},\infty)$满足

$$\bar{\sigma}(PK)\ll 1,\qquad \bar{\sigma}(KP)\ll 1,\qquad \bar{\sigma}(K)\ll M$$

式中的 M 不太大。这些设计指标在图 12.16 中以图的形式表示出来。具体的频率 ω_{l} 和 ω_{h} 取决于具体的应用以及对干扰特性、模型不确定性及传感器噪声水平的了解。

② 回路成形的基本概念。

回路成形控制器设计基本上包含了以下内容：寻找一个控制器 K，使回路增益 $\underline{\sigma}(L)$ 和 $\bar{\sigma}(L)$在低频率处离开性能要求的边界，在高频率处离开鲁棒性要求的边界，如图 12.16 所示（L 为回路开环传递函数）。

2) 主要步骤

下面介绍 H_∞ 回路成形设计方法。该方法是在 H_∞ 理论基础上应用回路成形的一种设计方法，由于篇幅有限，只能对其相关理论及 MATLAB 下的 Mu 分析与综合工具箱中的部分函数作简要介绍。下面介绍具体设计过程主要步骤(参见图 12.17)。

① **回路成形**

设标称受控对象为 P，利用一前置补偿器 W_1 和/或一后置补偿器 W_2，将标称受控对象的奇异值成形为期望的开环形状。标称受控对象 P 和成形函数 W_1,W_2 合并成为成形后受控对象 P_{s},P_{s} 的奇异值，满足指定的开环增益值(见 12.3.3 节预备知识)。其中 $P_{\mathrm{s}}=W_2PW_1$。假



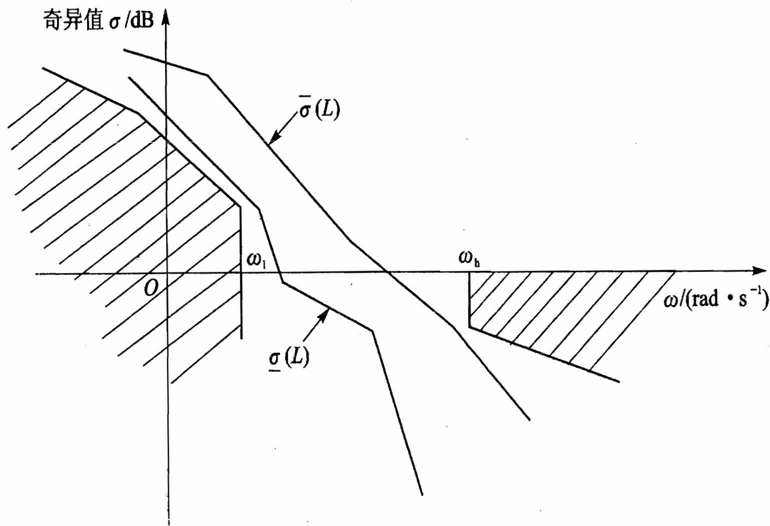


图 12.16　期望的回路增益

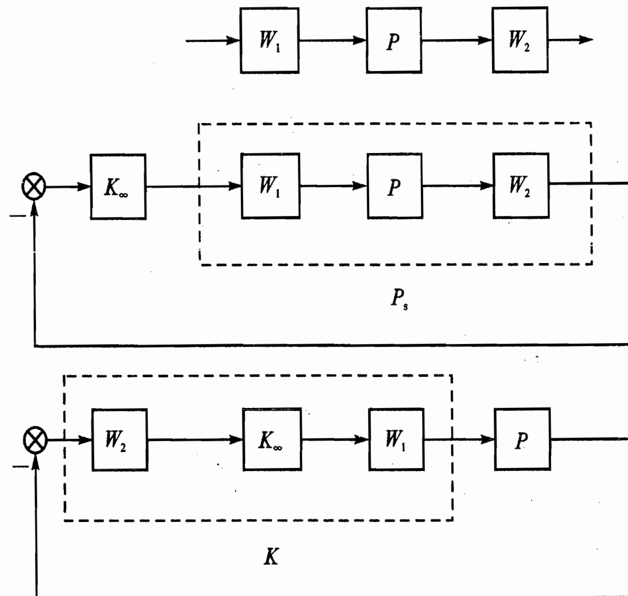


图 12.17　回路成形设计步骤

设 W_1 和 W_2 使 P_s 无不稳定隐含模态。

注意：所获得的实际回路形状在开环传递函数中包含 K_∞，有可能使由 P_s 指定的开环形状变坏；但有关文献中证明，由 K_∞ 引起的回路形状变坏仅局限于被指定回路形状充分大或充分小的频率上，故可以忽略。

② **鲁棒镇定**

计算 ε_{max}。

$$\varepsilon_{max}=\left(\inf_{K\text{镇定}}\left\|\begin{bmatrix}I\\K\end{bmatrix}(I+P_sK)^{-1}\widetilde{M}_s^{-1}\right\|_\infty\right)^{-1}=\sqrt{1-\|[\widetilde{N}_s\quad\widetilde{M}_s]\|_H^2}<1 \tag{12.66}$$

式中 $\widetilde{M}_s$,$\widetilde{N}_s$ 为 P_s 的正规化互质分解,即 $P_s=\widetilde{M}_s^{-1}\widetilde{N}_s$;$\inf\limits_{K\text{镇定}}\left\|\begin{bmatrix}I\\K\end{bmatrix}(I+P_sK)^{-1}\widetilde{M}_s^{-1}\right\|_\infty$ 的含义是 K 取能使成形后受控对象 P_s 镇定的所有可能值时该范数的下确界;ε_{max}是稳定余量,是系统对非结构扰动的鲁棒稳定性的指标,它既是闭环鲁棒稳定性的一个度量,也是满足回路成形指标的设计成功与否的测度。ε_{max}的值总小于 1,当它的值大于 0.3 时通常意味着系统有很好的鲁棒稳定余量,且如果 $\varepsilon_{max}\ll 1$ 则返回①,并且调整 W_1 和 W_2。

选择 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_{max}$,设计镇定控制器 K_∞,使得

$$\left\|\begin{bmatrix}I\\K_\infty\end{bmatrix}(I+P_sK_\infty)^{-1}\widetilde{M}_s^{-1}\right\|_\infty\leqslant\varepsilon^{-1} \tag{12.67}$$

在本文的应用中,取 $\varepsilon=\varepsilon_{max}$时对应的控制器 K_∞。

③ **组合控制器**

组合 H_∞控制器 K_∞和成形函数 W_1,W_2,构成最终的反馈控制器 K,则

$$K=W_1K_\infty W_2 \tag{12.68}$$

一个典型的设计是这样进行的:检查标称受控对象的开环奇异值,通过前置与后置补偿对其成形,直至满足标称性能指标。设计一反馈控制器 K_∞,满足(对于成形后受控对象的)稳定余量 $\varepsilon\leqslant\varepsilon_{max}$。如果 ε_{max}小,则此指定的回路形状与鲁棒稳定性要求不相容,应当作相应调整,并重新设计 K_∞。

3) 通过编程实现的过程

① 根据标称受控对象 P 设计出成形函数 W_1,W_2 的形式,然后画出 P_s 频域响应图进行分析,调整增益或者 W_1,W_2 的形式,使得 P_s 满足性能要求。

② 对成形后受控对象 P_s 使用 Mu 分析与综合工具箱中 ncfsyn 函数得到反馈控制器 K_∞ 以及 ε_{max},使用语句如下:

```
[ksys,emax]=ncfsyn(GsysWsys,1.05);
```

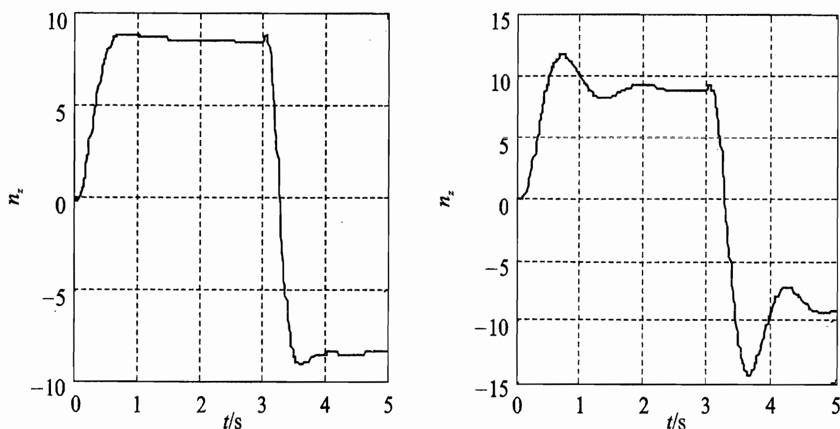
其中 GsysWsys 表示 P_s;ksys 表示得到的反馈控制器 K_∞系统;emax 表示 ε_{max}。如果 ε_{max}不满足要求,则返回①继续调整 W_1,W_2。最终将得到合适的反馈控制器 K_∞。

③ 最终的控制器 $K=W_1K_\infty W_2$,将其作用于原受控对象 P,即完成了控制回路的设计过程。

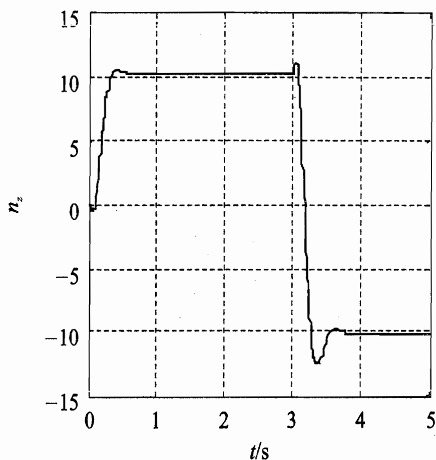
根据 H_∞回路成形方法的理论介绍,对于本导弹实例进行编程调参设计,得到控制器各参数。

图 12.18 为采用几种设计方法在相同弹体上的仿真结果。





(a) 用极点配置方法得到的阶跃响应曲线　(b)用Butterworth特殊极点配置方法得到的阶跃响应曲线



(c) 用H_∞回路成形方法得到的阶跃响应曲线

图 12.18　某导弹阶跃响应曲线

12.4　导弹控制回路

12.2 节和 12.3 节已介绍了导弹的稳定回路的构成和设计方法，下面接着讨论稳定回路加上测量导弹质心位置的元件以及导弹运动学环节组成的大回路，称为控制回路。简单的控制回路示意图如图 12.19 所示。

由图 12.19 可知，导弹控制回路的基本工作过程为由弹上导引头或者地面装置采集处理目标运动信息，结合弹体上的测量器件得到的导弹运动参数，由导引系统进行分析处理，并通过给定的制导律，以计算处理得到的相对运动参数为输入，计算出指令加速度或者其他指令状态量，输入到稳定回路中去，通过稳定回路的作用使导弹较理想地跟踪控制指令，按指定的运动飞行。

以使用比例导引法的导弹为例，介绍简单情况下的控制回路组成及其工作原理。比例导



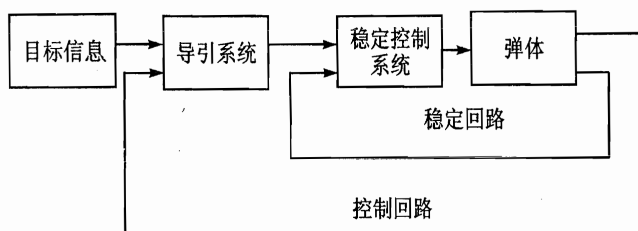


图 12.19　导弹控制回路简图

引法的制导规律为

$$a_c = N'V_c\dot{\lambda}$$

式中 a_c 为指令加速度；N' 为有效导引比；V_c 为导弹与目标的接近速度；$\dot{\lambda}$ 为视线转率。可见上式即是式(5.54)，只是采用符号不同。目标和导弹的相对运动关系如图 12.20 所示。

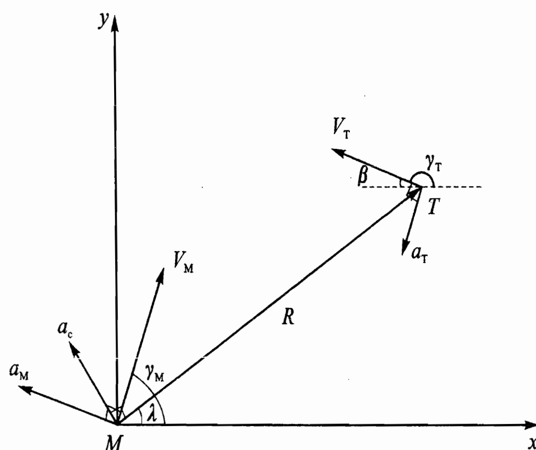


图 12.20　目标和导弹的相对运动关系图

坐标原点取在导弹质心，取参考方向为 x 轴(通常取水平方向)，取铅垂方向为 y 轴。

根据图 12.20 得到，目标和导弹的非线性运动关系方程组为

$$\left.\begin{aligned}
\dot{x} &= V_T\cos\gamma_T - V_M\cos\gamma_M \\
\dot{y} &= V_T\sin\gamma_T - V_M\sin\gamma_M \\
\dot{\gamma}_T &= \frac{a_T}{V_T} \\
\dot{\gamma}_M &= \frac{a_M}{V_M} \\
\lambda &= \arctan\frac{y}{x} \\
R &= \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}\right\} \tag{12.69}$$



式中 V_T 为目标速度大小；V_M 为导弹速度大小；x 为目标与导弹相对距离在参考方向上的投影；y 为目标与导弹相对距离在参考方向的垂直方向上的投影；γ_T 为目标速度方向与参考方向的夹角；γ_M 为导弹速度方向与参考方向的夹角；a_T 为目标加速度大小；a_M 为导弹加速度大小；λ 为目标视线角；R 为导弹目标相对距离的大小；并设 V_T，V_M 为常数。

以模块图表示的上述非线性运动关系方程如图 12.21 所示。

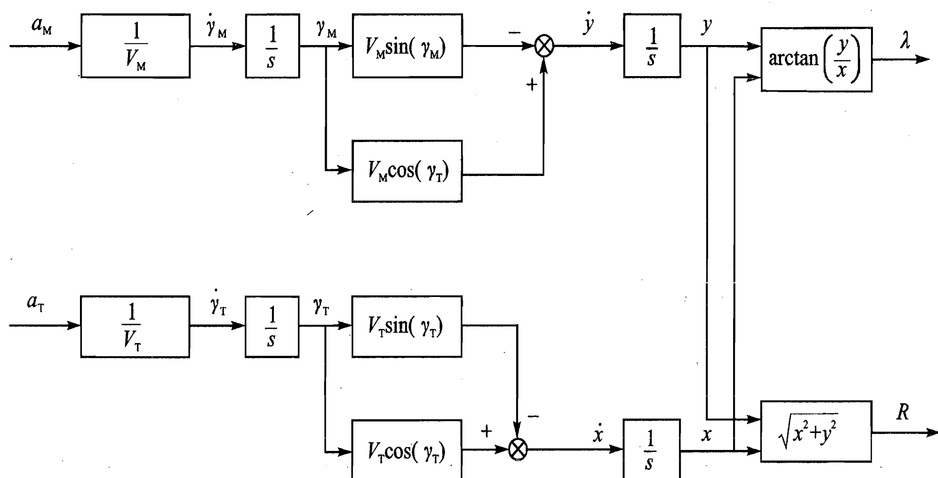


图 12.21　非线性相对运动关系模块图

通常在尾追和迎击情况下，上述非线性的运动方程组可以很精确地以其线性化形式代替，其带来的误差和不准确度，实践表明在整个控制回路设计过程中是可以忽略的。下面简要介绍上述方程组的线性化过程。

在图 12.20 上引入新的状态量 y（相对距离在上述坐标纵轴的投影）以及角 β。

显然，

$$\ddot{y} = a_T\cos\beta - a_M\cos\gamma_M \tag{12.70}$$

$$\sin\lambda = \frac{y}{R_{TM}} \tag{12.71}$$

因为考虑的是尾追或迎击情况，所以角 β,λ,γ_M 均可按小角度考虑，即正弦约等于角度本身，余弦约等于 1，则方程式(12.70)可以改写为近似的线性化形式：

$$\ddot{y} = a_T - a_M \tag{12.72}$$

$$\lambda = \frac{y}{R_{TM}} \tag{12.73}$$

令接近速度

$$V_c = \dot{R}_{TM} \tag{12.74}$$

估计飞行时间

$$t_f = \frac{R_{TM0}}{V_c} \tag{12.75}$$

并设当前飞行时刻为 t，可以得到近似的相对距离可改写为



$$R_{TM} = V_c(t_f - t) \tag{12.76}$$

因此,线性化近似考虑后的相对运动方程组变为

$$\left.\begin{aligned} \ddot{y} &= a_T - a_M \\ \lambda &= \frac{y}{V_c(t_f - t)} \end{aligned}\right\} \tag{12.77}$$

注意,该方程组各量均是线性化后的近似值。

以模块图表示的线性化后的运动关系如图 12.22 所示。

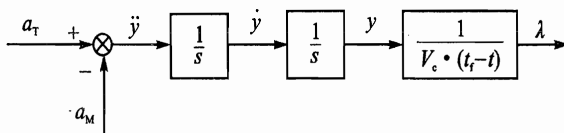


图 12.22　线性化后的相对运动关系模块图

至此可以得到一个非常简单的导弹控制回路,如图 12.23 所示。

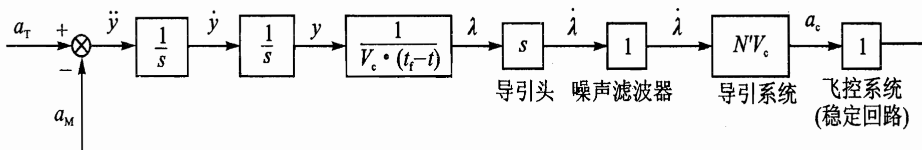


图 12.23　简单的导弹控制回路图

由图 12.23 可知,制导律采用的是比例导引法以及尾追或迎击时线性化后的相对运动关系,导引头和噪声滤波以及飞控、导引系统都作了最简化的考虑。这个简单的例子已经基本包含了控制回路中所有的主要系统。其中:导引头的作用是跟踪目标,测量视线角速度 $\dot{\lambda}$;噪声滤波器用来滤去噪声,以获得 $\dot{\lambda}$ 的估计值;导引系统产生制导指令;飞控系统即导弹稳定回路部分,是用来操纵弹体达到指令需要,并使弹体稳定的系统。

例: 采用上述最简单的控制回路结构,用 Simullink 搭出如下情况下导弹的控制回路,并给出相对距离坐标 y 以及导弹法向加速度的仿真结果曲线。

目标机动($HE=0°$)$a_T=30\ \mathrm{m/s^2}$;$V_M=300\ \mathrm{m/s}$,$V_T=100\ \mathrm{m/s}$,$N'=4$;$R_{M10}=0$,$R_{M20}=0$,$R_{T10}=4\ 000\ \mathrm{m}$,$R_{T20}=0$。Simulink 框图如图 12.24 所示,仿真结果如图 12.25 所示。

当然实际的导弹控制回路相当复杂,每一部分子系统都需要更详细准确的设计,而且在设计过程中还要不断考虑各系统或回路之间性能的相互影响。其中稳定回路(飞控系统)的分析和设计已经作了讲解。由于篇幅所限以及侧重点不同,此处不再对控制回路的其他内容,如导引头、滤波器等作详细的讨论。感兴趣的读者可以查阅相关参考书。



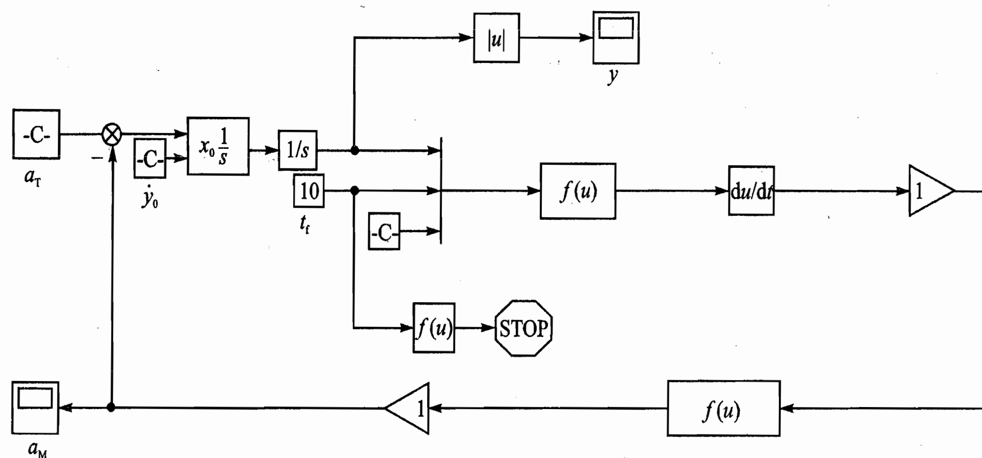


图 12.24 控制回路 Simullink 模块图

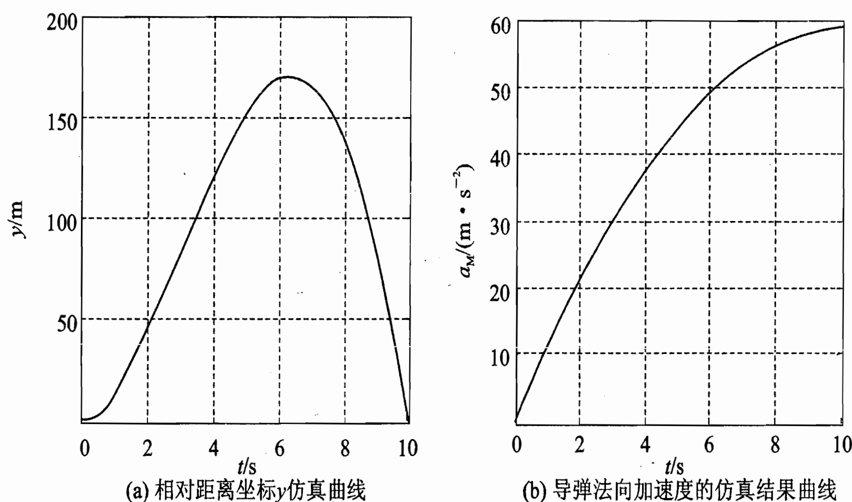


图 12.25 某导弹的仿真结果曲线

12.5 导弹精度分析

弹道计算获得了导弹在整个飞行过程中的一些具体信息,如过载、响应时间等,有利于对导弹总体性能进行分析和改进。而导弹作战效能的评估则取决于导弹击中目标时刻的射击精度,这也是对导弹性能评估的一个最关键的因素。评估导弹射击精度的指标很多,比如圆概率偏差、脱靶量、命中概率和毁伤概率等。而其中最方便的就是脱靶量分析,脱靶量也是评价导弹拦截成功与否的重要参数。所谓脱靶量通常指导弹与目标在交战的最后时刻的距离。在实际过程中,这个最后时刻就是战斗部被引爆的时刻,而在弹道仿真和计算的过程中,通常取为

导弹与目标在飞行过程中的最近距离。

通常在作弹道计算时，都是考虑在理想的情况下进行的，导弹、目标以及周围的环境全部是理想的标称模型。然而导弹的精度评估如果仅仅在理想环境下进行是不够的，导弹与目标的实际交战过程中存在很多随机干扰因素，如目标随机机动、设备噪声、环境突发干扰以及敌方施加的电子干扰等。这些因素都是随机出现的，在每次的弹道计算中都会对最终脱靶量产生不同的影响。评估或预测这些噪声及干扰会对脱靶量造成什么样的影响，是弹道精度评估的一项重要内容。在存在随机因素的条件下，要完全精确获知导弹在攻击目标时的脱靶量是不可能的，只能通过一些近似方法来预测可能产生的脱靶量。用于预测脱靶量的方法很多，如蒙特卡洛(Monte Carlo)法、协方差分析法、伴随分析法和 SLAM 法等。这些方法将在本节逐一介绍。

12.5.1 脱靶量模型及其线性化

本节仍使用与 12.4 节同样的控制回路。需要指出的是，在进行导引方法研究和导引精度分析时，控制回路通常又被称作导引回路。为了分析脱靶精度，必须得出脱靶量模型；另外，很多脱靶量分析方法都是针对线性系统的，因此有必要得到一个线性的导引回路模型。图 12.26为弹目二维交战示意图。

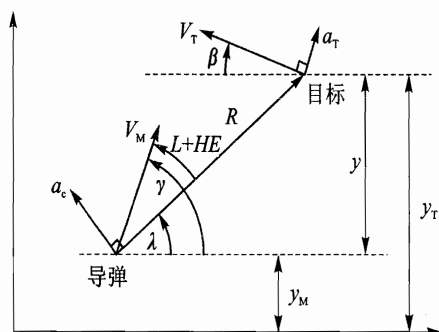


图 12.26　弹目二维交战示意图

定义接近速率 V_c 为导弹与目标之间距离变化率的相反数，即

$$V_c = -\dot{R} \tag{12.78}$$

在一般末端交战状态，导弹多处于迎击或尾追状态，导弹与目标之间的相对关系可以由它们的垂直距离 y 来表征。这个 y 值通常也称为导弹与目标之间的相关分离量，y 的变化规律可以写为

$$\ddot{y} = a_T\cos\beta - a_c\cos\lambda \tag{12.79}$$

在飞行路径角较小时(如迎击或尾追的情况)，通过小角度近似，可以将以上方程线性化为如下形式：

$$\ddot{y} = a_T - a_c \tag{12.80}$$

同样由小角度近似，视线角的关系式也可被线性化为如下形式：

$$\lambda = y/R \tag{12.81}$$

在线性化模型中，通常假定接近速率为一个正的常量，而且假定在飞行结束时导弹与目标之间的距离将变成零。根据这个假定，也可以将距离方程线性化为如下时变关系：

$$R = V_c(t_f - t) \tag{12.82}$$

式中 t 为当前时间；t_f 为整个飞行时间，注意，t_f 现在也是常量；$t_f - t$ 为离飞行结束所剩的时间，也即待飞时间，通常也用 t_{go} 来表示。由于定义时假定相对距离 R 在飞行结束时为零，因此必



须重新定义脱靶量。可以定义飞行结束时导弹目标的相关分离量为脱靶量，即

$$\text{Miss} = y(t_f)$$

由于线性化脱靶量不是通过距离公式得到的，所以它只是实际脱靶量的近似值。实践表明，这个近似值是相当精确的。

综上所述，整个回路模型如图 12.27 所示。

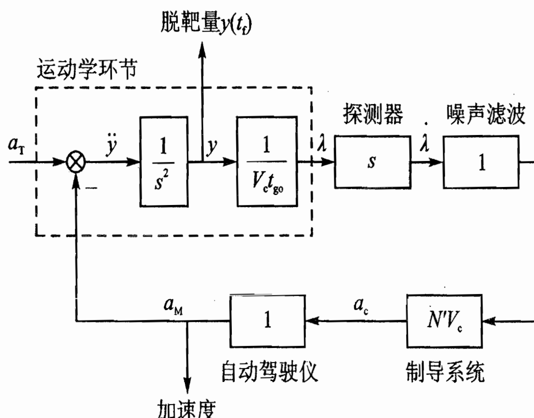


图 12.27　导引回路图

12.5.2　干扰及噪声模型

不同的干扰和噪声具有不同的概率分布，在仿真计算时就需要构造相应的数学概率模型。很多噪声模型仿真实现比较困难，而且也不利于数学分析。很多噪声模型都可以用一个整形滤波器将白噪声整形，一个具有随机输入的系统可以用由白噪声驱动的增强系统(原系统加上整形滤波器)来代替。这样大大方便了工程实现，而且能够利用协方差分析、伴随分析这类数学方法进行高效的分析。

尽管复杂的随机过程可以用一个很简单的整形滤波器来表示，但此时只有二阶统计特性对系统起作用，具有相同均值和自相关函数的随机过程在数学上是等价的，尽管它们的概率密度函数完全不同。也就是说，如果只关注二阶统计特性，一个随机现象与和它等价的整形滤波器是无法区分的。因此这种方法主要用于二阶统计特性占主导地位的场合。

下面通过一个例子来分析如何利用整形滤波器构造随机干扰模型。目标的随机机动是一种比较常见的机动模型，也称随机电报机动，如图 12.28 所示。在这种机动模型中，目标作等过载规避机动，且在 τ 时间内过载的正负号次数服从泊松分布，即

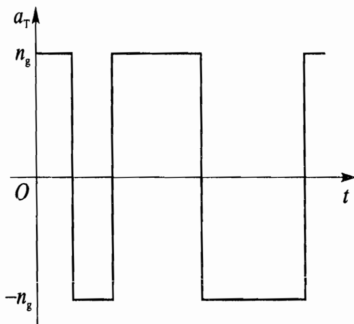


图 12.28　目标随机机动加速度



$$p\{x=K\}=\frac{(\nu\tau)^K}{K!}\mathrm{e}^{-\nu\tau} \tag{12.83}$$

式中 $\nu>0$，表示单位时间内目标机动过载变号平均次数；x 为随机变量，表示目标机动过载的变号次数；K 表示目标机动过载所有可能的变号次数，取 0，1，2…。

其自相关函数为

$$\phi_{a_Ta_T}(\tau)=\mathrm{E}[a_T(t)a_T(t+\tau)]=n_g^2\Big[\sum_{K=0}^{\infty}p(2K)-\sum_{K=0}^{\infty}p(2K+1)\Big]=$$
$$n_g^2\mathrm{e}^{-2\nu|\tau|} \tag{12.84}$$

因此其功率谱密度为

$$\Phi_{a_T}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\phi_{a_Ta_T}(\tau)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=n_g^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-2\nu|\tau|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega\tau}\mathrm{d}\tau=$$
$$\frac{4\nu n_g^2}{\omega^2+(2\nu)^2} \tag{12.85}$$

取白噪声功率谱密度为 n_g^2/ν，则整形滤波器为

$$H(s)=\frac{1}{1+s/2\nu} \tag{12.86}$$

因而随机机动模型可以用图 12.29 表示，其中输入是功率谱密度为 n_g^2/ν 的白噪声。

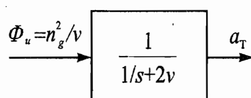


图 12.29　目标随机机动的成形滤波器

整形滤波器也可以用于起始时间随机确定过程的统计描述。这在交战过程中也是很常见的，比如目标发现导弹向自己攻击后，即以恒定的加速度作规避机动，但目标发现有导弹在向自己攻击的时间是随机的，且在导弹发射到飞行结束这段时间内服从均匀分布。

假如目标从 T 时刻开始机动，则系统输入为

$$x(t)=n_gu(t-T) \tag{12.87}$$

式中 T 为目标开始机动的时间；n_g 为机动加速度大小；$u(t-T)$ 为单位阶跃函数，即

$$u(t-T)=\begin{cases}0 & (t<T)\\ 1 & (\text{其他})\end{cases} \tag{12.88}$$

机动开始时间服从均匀分布，其概率密度函数为

$$p_T(t)=\begin{cases}1/t_f & (0\leqslant t\leqslant t_f)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{12.89}$$

用图形表示如图 12.30 所示。

于是，其自相关函数为

$$\phi_{xx}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t_1)x(t_2)p_T(T)\mathrm{d}T=$$
$$\int_0^{t_f}n_gu(t_1-T)n_gu(t_2-T)\frac{\mathrm{d}T}{t_f} \tag{12.90}$$



设 $0<t_1<t_2<t_f$，则

$$\phi_{xx}(t_1,t_2)=\frac{n_g^2}{t_f}\int_0^{t_1}\mathrm{d}T \tag{12.91}$$

设某整形网络的脉冲响应为 $h(t)$，则其由白噪声驱动时的输出自相关函数为

$$\phi_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{t_1}h(t_1-\tau_1)\int_{-\infty}^{t_2}h(t_2-\tau_2)\cdot \phi_{uu}(\tau_1,\tau_2)\mathrm{d}\tau_1\mathrm{d}\tau_2 \tag{12.92}$$

图 12.30　起始时间随机的机动加速度

式中 ϕ_{uu} 为白噪声输入自相关函数。

$$\phi_{uu}(\tau_1,\tau_2)=\Phi_u(\tau_1)\delta(\tau_1-\tau_2)$$

其中白噪声的频谱密度 Φ_u 是时间的函数。若设 $t_1<t_2$，则可得

$$\phi_{yy}(t_1,t_2)=\int_{-\infty}^{t_1}\Phi_u(\tau_1)h(t_1-\tau_1)h(t_2-\tau_1)\mathrm{d}\tau_1 \tag{12.93}$$

从上式可以看出，如果取

$$\Phi_u(t)=\begin{cases}n_g^2/t_f & (0\leqslant t\leqslant t_f)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{12.94}$$

并有

$$h(t)=1$$

则 $\phi_{xx}(t_1,t_2)$ 与 $\phi_{yy}(t_1,t_2)$ 是完全相同的。也就是说，白噪声在通过此整形网络后，输入原系统与原系统直接接受原随机输入是完全等价的。

因此，对于开始时间在飞行时间内服从均匀分布的幅度为 n_g 的常值机动，其传递函数为

$$H(s)=L[h(t)]=\frac{1}{s} \tag{12.95}$$

由功率谱密度为

$$\Phi_u(t)=\begin{cases}n_g^2/t_f & (0\leqslant t\leqslant t_f)\\ 0 & (\text{其他})\end{cases} \tag{12.96}$$

的白噪声驱动的线性整形网络有相同的自相关函数，即该机动也可以用整形滤波器加白噪声来表示，如图 12.31 所示。其中，u_s 是功率谱密度为 n_g^2/t_f 的白噪声。

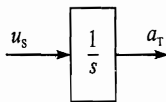


图 12.31　起始时间随机的机动成形滤波器

同样，很多其他噪声模型也可以用整形滤波器来表示，在这里就不一一列举了。

12.5.3　蒙特卡洛法

蒙特卡洛法是一类通过随机变量的统计试验（或随机模拟）进行近似求解的数值方法。蒙特卡洛法通过建立数学模型进行数学模拟打靶，可以研究在各种随机干扰作用下导弹的飞行

特性、导弹命中目标的概率或飞行准确度、导弹毁伤目标的概率、制导精度和启控点散布等。

用蒙特卡洛法进行数学模拟打靶的一般步骤如下：

① 确定导弹飞行过程中的各种随机干扰因素及其分布规律；

② 根据各随机干扰的分布规律，构造相应的数学概率模型，以产生各随机干扰变量的抽样值；

③ 建立导弹系统数学模型；

④ 将随机变量的抽样值输入导弹系统数学模型，进行弹道计算，得到随机干扰的弹道参数；

⑤ 重复步骤④，进行多次模拟打靶，获得随机弹道参数子样；

⑥ 对模拟打靶的结果进行处理，得到弹道参数的统计特征值。

理论上来说，用蒙特卡洛法求解时可以使用任意精确的导弹数学模型，而且求解的次数越多，所得到的结果也就越可信。但是，模型越精确、仿真次数越多，计算量也就越大，所需的计算时间也就越长。因此在使用蒙特卡洛法时，要注意探讨满足精度要求的最小抽样次数，而且对于模型的复杂程度也要根据问题的需求而定，不可盲目地追求精确。

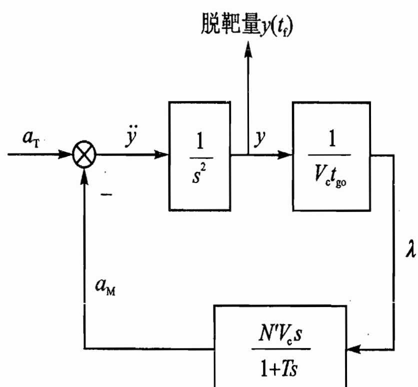


图 12.32　导引回路

下面通过一个算例来看蒙特卡洛法如何实现。对于12.5.1节中所述的脱靶量模型，设回路中存在一阶惯性环节，则其导引回路模型可以用图12.32表示。目标机动为起始时间服从均匀分布的常值机动。分析在不同飞行时间这种目标机动模式对脱靶量的影响，可以采用脱靶量标准差σ来描述目标机动对脱靶量的影响，即

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}[y_i(t_f)-\mu]^2/(n-1)} \qquad (12.97)$$

式中$y_i(t_f)$为第i次打靶脱靶量；n为打靶次数；μ为脱靶量均值，由下式计算，即

$$\mu=\sum_{i=1}^{n}y_i(t_f)/(n-1) \qquad (12.98)$$

当均值为零时，式(12.97)变为

$$\sigma=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}y_i^2(t_f)/(n-1)}$$

此时的统计脱靶量又常常称为均方根脱靶量。

该导引回路模型在MATLAB/Simulink中很容易得到，如图12.33所示。

用蒙特卡洛法求解时，每次运行前将Step模块的阶跃起始时间设置为一个服从均匀分布的随机数。各参数的值为$V_c=1\ 200$ m/s，$a_T=30$ m/s^2，$N=3$，$T=1$。

图12.34是某次蒙特卡洛法求解的结果。图12.34(a)为每一个飞行时间作50次仿真，一共



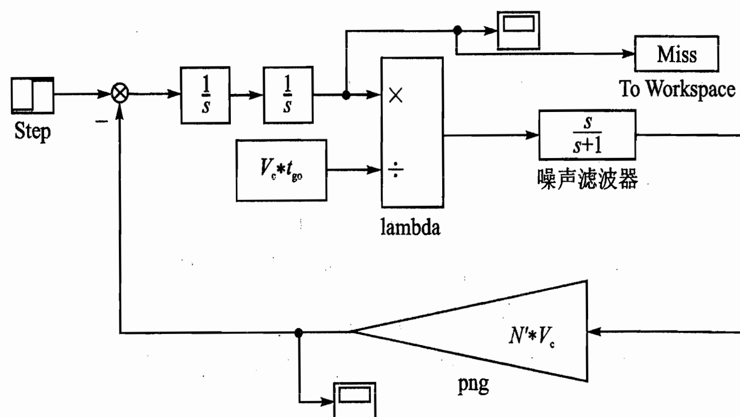


图 12.33　导引回路的 Simulink 表示

作 500 次仿真运算，计算时间为 11.2 s；图 12.34(b)的结果是每次飞行作 500 次仿真，计算时间为 95.3 s；图 12.34(c)中的结果则是每次飞行时间作 1 000 次仿真，计算时间为 193.9 s。从图中可以看出每次的计算结果趋势都相同，但计算次数越多，其结果就越接近于一条光滑的曲线。

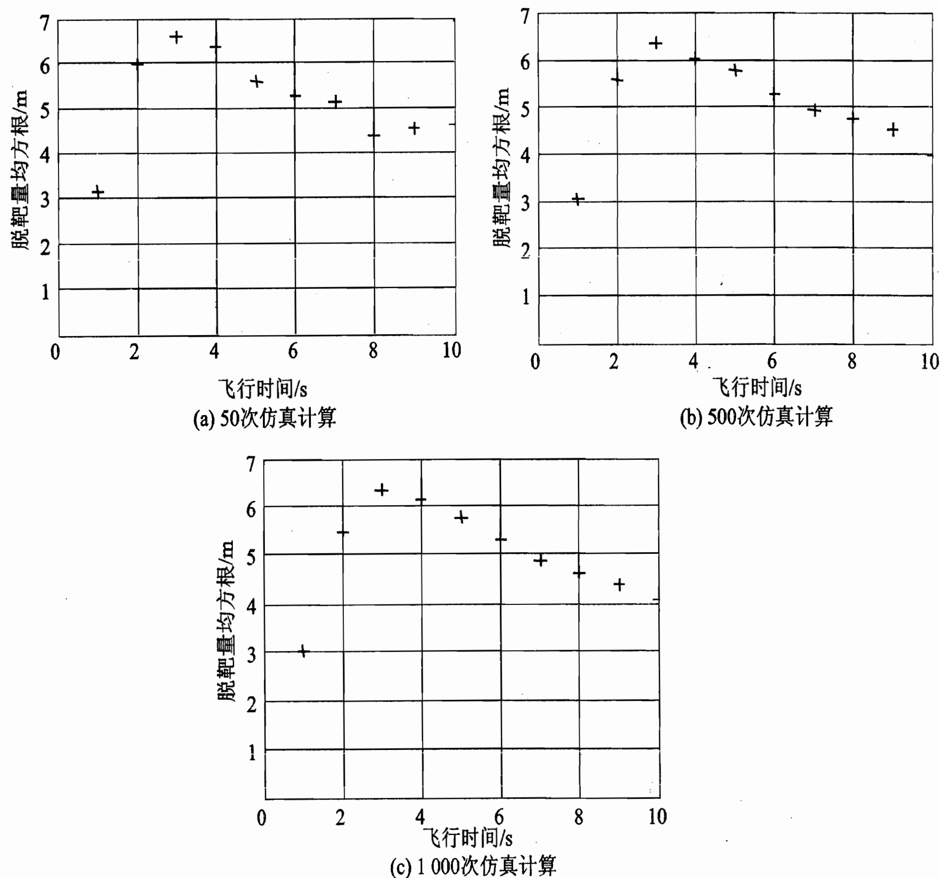


图 12.34　某次蒙特卡洛法求解结果

从图 12.34 中可以看出，脱靶量呈两头小中间大的趋势。这是因为在飞行时间较短时，目标逃逸时间不够，而飞行时间越长，则导弹就有足够的时间调整弹道。

12.5.4 协方差分析法

从 12.5.3 节中可以看到，用蒙特卡洛法求解是相当费时的，要进行多次仿真运算，然后对结果进行统计计算，最后得到的也只是近似的抽样统计结果。对于线性时变系统，可以用协方差分析法，只需一次求解即可得到相应的均方根参数，使计算时间大为减少。

协方差分析法是导出系统响应的随机状态矢量的均值和协方差的微分方程，通过求解矩阵微分方程来获取某个特定系统结构的统计性能值。

设动态系统的状态空间表示如下：

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{u}(t) \tag{12.99}$$

式中 $\boldsymbol{x}(t)$是系统的状态向量，$\boldsymbol{F}(t)$是系统的动态矩阵，$\boldsymbol{u}(t)$是白噪声向量。白噪声的频谱密度函数矩阵为 $\boldsymbol{Q}(t)$，即

$$\boldsymbol{Q}(t) = \mathrm{E}[\boldsymbol{u}(t)\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}}(t)] \tag{12.100}$$

则此系统的协方差传播的微分方程为

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t) = \boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t) + [\boldsymbol{F}(t)\boldsymbol{X}(t)]^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{Q}(t) \tag{12.101}$$

其中协方差矩阵 $\boldsymbol{X}(t)$由状态向量 $\boldsymbol{x}(t)$根据下式得到，即

$$\boldsymbol{X}(t) = \mathrm{E}[\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}(t)] \tag{12.102}$$

如果扰动随机过程是零均值的，则协方差矩阵对角线上的元素为状态变量的方差，而其他元素则对应不同状态变量之间的协方差。

对协方差传播方程可用普通的数值积分法求解，如龙格-库塔法。对于一阶微分方程

$$\dot{x} = f(x,t)$$

其四阶龙格-库塔法算法如下：

$$x_{k+1} = x_k + \frac{1}{6}[K_0 + 2K_1 + 2K_2 + K_3]$$

式中

$$K_0 = h * f(x_k, t_k)$$
$$K_1 = h * f(x_k + 0.5K_0, t_k + 0.5h)$$
$$K_2 = h * f(x_k + 0.5K_1, t_k + 0.5h)$$
$$K_3 = h * f(x_k + K_2, t_k + h)$$

对于 12.5.3 节中的算例，模型图可以重组为如图 12.35 的形式。



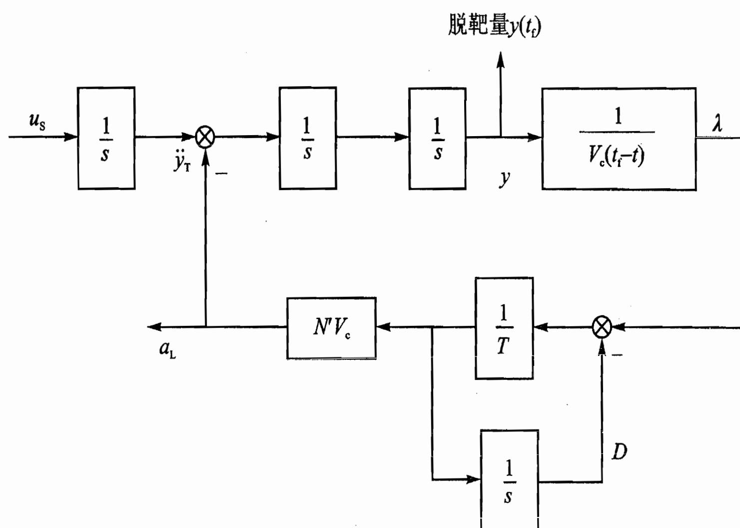


图 12.35　导引回路分解

根据图 12.35 可写出此系统微分方程组：

$$\left.\begin{aligned}&\ddot{y}=\ddot{y}_T-N'V_c\dot{D}=\ddot{y}_T-\frac{N'V_c}{T}\left[\frac{y}{V_c(t_f-t)}-D\right]\\&\dddot{y}_T=u_s\\&\dot{D}=\frac{1}{T}\left[\frac{y}{V_c(t_f-t)}-D\right]\end{aligned}\right\}\tag{12.103}$$

写成状态方程表达式为

$$\begin{bmatrix}\dot{y}\\\ddot{y}\\\dddot{y}_T\\\dot{D}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\\dfrac{-N'}{T(t_f-t)}&0&1&\dfrac{N'V_c}{T}\\0&0&0&0\\\dfrac{1}{TV_c(t_f-t)}&0&0&\dfrac{-1}{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y\\\dot{y}\\\ddot{y}_T\\D\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\u_s\\0\end{bmatrix}\tag{12.104}$$

可知状态向量为

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}y\\\dot{y}\\\ddot{y}_T\\D\end{bmatrix}$$

系统动态矩阵为



$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dfrac{-N'}{T(t_f - t)} & 0 & 1 & \dfrac{N'V_c}{T} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{1}{TV_c(t_f - t)} & 0 & 0 & \dfrac{-1}{T} \end{bmatrix} \tag{12.105}$$

系统输入为

$$u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_s \\ 0 \end{bmatrix}$$

因此频谱密度矩阵为

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

式中 Φ_s为白噪声功率谱密度,在噪声模型一节中将详细讨论。

把以上各式代入协方差传播方程中,积分可得所有状态变量的统计信息。本例中,相对弹道 y 的均方根值(零均值时也即其标准差)可通过求协方差矩阵 X 对角线上第一个元素的平方根求出,即

$$\sigma_y(t) = \sqrt{X(1,1)}$$

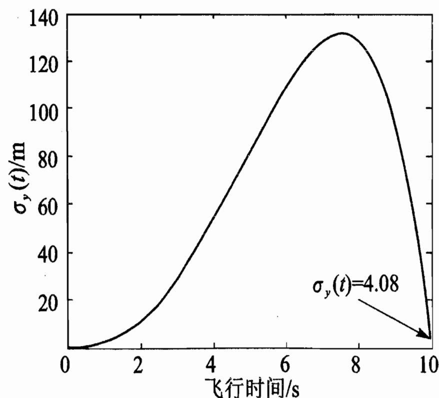


图 12.36　协方差分析法计算的结果

本例中,协方差分析借助了 MATLAB 程序方便地运算。参数设置同前,$V_c = 1\ 200$ m/s, $a_T = 30$ m/s^2, $N=3$, $T=1$。最终运算结果如图 12.36 所示。

从图 12.36 中可以看出,协方差分析法只需一次运算即可得出脱靶量的统计信息,而且是精确解,但是它每次计算也只能针对特定的飞行时间,要想得到不同飞行时间的统计特性,还是必须多次计算。不过不同于蒙特卡洛法,协方差分析法中,飞行过程中每一时刻的所有系统状态量或其组合量均值和均方差都能得到。这在分析相对弹道、加速度变化(过载能力)和对非线性环节的统计线性化中相当有用。



12.5.5 伴随分析法

前面提到的蒙特卡洛法和协方差分析法每次运行都是针对特定的飞行时间，而且存在多个干扰源时，每次运行只能得到某一种干扰对脱靶量的影响或是所有干扰源的总的影响。而伴随分析法则可以通过一次运行得出所有不同飞行时间、不同干扰源对脱靶量的影响。

伴随分析法的核心就是要构造原系统的伴随系统，然后对伴随系统求解。下面简单介绍伴随分析法的基本原理。首先，对于输入为确定过程(相对于随机过程)的线性系统，可用如下线性微分方程描述，即

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_1(t)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+a_0(t)y=u \tag{12.106}$$

式中 y 为系统输出，u 为其确定的输入；系数 a_i 为时间的函数。根据线性系统理论，上述微分方程的解为

$$y(t)=\int_{t_i}^{t}u(\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12.107}$$

式中 t_i 为输入开始的时间；$h(t,\tau)$ 为系统脉冲响应函数。函数 $h(t,\tau)$ 描述系统对在 τ 时刻的单位脉冲输入在 t 时刻的响应，利用这个函数，系统可以方便地转换成如图 12.37 所示的方框图。

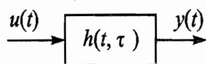


图 12.37 线性系统脉冲响应模型

对于上述积分形式的解，其积分变量对应于脉冲作用时间，也就是说，为了得到问题的解就必须知道 $h(t,\tau)$，这样就需要通过仿真获得系统在每一个脉冲作用时间 τ 的响应，然后再用数值方法来求积分，这个计算量是相当大的。

前述线性系统(当 $u=0$ 时)的修正伴随系统的微分方程可以表示为

$$\frac{\mathrm{d}^n z}{\mathrm{d}t^n}+\frac{\mathrm{d}^{n-1}[a_{n-1}(t^*)z]}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+\frac{\mathrm{d}[a_1(t^*)z]}{\mathrm{d}t}+a_0(t^*)z=0 \tag{12.108}$$

式中 z 为脉冲响应函数；$t^*=t_f-t$，t_f 为结束的时间。

如果上述形式微分方程描述的伴随系统，在时刻 τ^* 受到一脉冲输入，系统的响应(即伴随脉冲响应函数)用 $h^*(t^*,\tau^*)$ 表示，则原系统与其对应的伴随系统的脉冲响应函数之间存在如下关系：

$$h^*(t_f-t_1,t_f-t_2)=h(t_1,t_1) \tag{12.109}$$

这里 t_1 和 t_2 分别为原始系统的脉冲作用时间和观察时间，将系统解方程用伴随系统的脉冲响应函数表示为

$$y(t)=\int_{t_f-t}^{t_f-t_i}u(t_f-t^*)h^*(t^*,t_f-t)\mathrm{d}t^* \tag{12.110}$$

积分变量变成了伴随脉冲响应函数的第一个参数，即对伴随系统来说，输入的时刻 t_f-t 在积分过程中保持不变，因此只需进行一次计算，便可求出原系统在不同时刻接收到输入对同



一观察时刻的影响。

图 12.38 和图 12.39 分别表示了通过原系统和伴随系统求解的区别。在求输入对最终时刻的影响时,运用原系统必须不断改变输入的时刻,多次求解。而在伴随系统中,因 $y(t_f)=\int_0^{t_f-t_i}u(t_f-t^*)h^*(t^*,0)\mathrm{d}t^*$,只需进行一次求解即可。

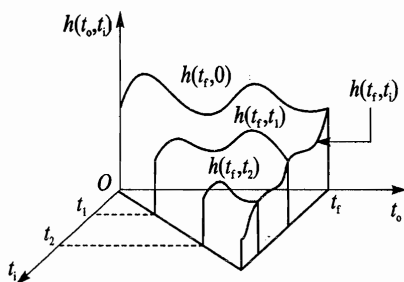


图 12.38 原系统求解方式

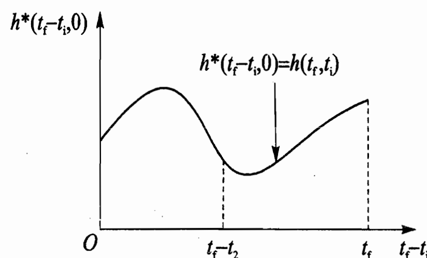


图 12.39 伴随系统求解方式

如果系统输入为一个幅值为 a 的阶跃输入,从零时刻开始作用,而需要得到的是最后时刻的解,则

$$y(t_f)-a\int_0^{t_f}h^*(t^*,0)\mathrm{d}t \tag{12.111}$$

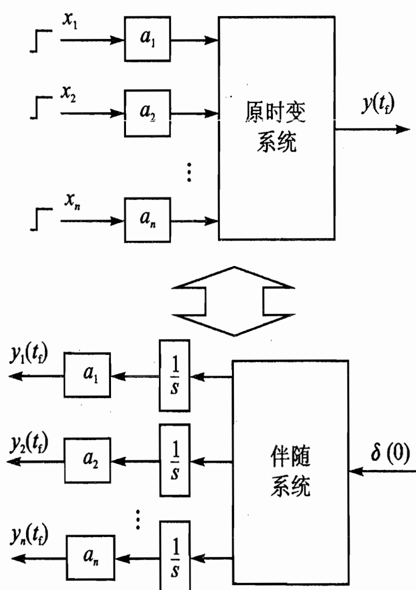


图 12.40 确定性输入的伴随解

因此,只需在伴随系统零时刻加一脉冲,通过对伴随系统的输出进行积分,便可以很容易地得到结果了。而且当原系统存在多个阶跃输入时,可以通过伴随系统只用一次求解即可得到原系统每个输入对输出造成的影响,如图 12.40 所示。此时有 $y(t_f)=y_1(t_f)+y_2(t_f)+\cdots+y_n(t_f)$。

伴随方法也可以适用于随机输入。若线性系统由某一随机过程 $n(t)$驱动,则系统输出也是随机的,并可以写成

$$y(t)=\int_{t_i}^{t}n(\tau)h(t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12.112}$$

将上式两边平方并取数学期望可得

$$\mathrm{E}[y^2(t)]=\int_{t_i}^{t}\Phi_0(\tau)h^2(t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12.113}$$

式中 $R(t,\tau)=\Phi_0\delta(t,\tau)$为非平稳白噪声的自相关函数;对于平稳白噪声,上式可简化为

$$\mathrm{E}[y^2(t)]=\Phi_0\int_{t_i}^{t}h^2(t,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{12.114}$$



其中，白噪声功率谱密度 Φ_0 为常数。

同样，如果考虑相应的伴随系统，则有

$$\mathrm{E}[y^2(t)] = \Phi_0 \int_{t_f-1}^{t_f-t_i} [h^*(t^*, t_f - t)]^2 \mathrm{d}t^* \tag{12.115}$$

如果噪声输入起始于 $t_i=0$ 时刻，而观察时间取在最后时刻，则可简化为

$$\mathrm{E}[y^2(t_f)] = \Phi_0 \int_0^{t_f} [h^*(t^*, 0)]^2 \mathrm{d}t^* \tag{12.116}$$

这样，通过一次计算即可确定原系统对白噪声输入的响应的均方值，而且也推广到有多个白噪声输入的情况，如图 12.41 所示。

上面的分析都是针对白噪声输入的情况。对于有色噪声的情况，则可通过使用整形滤波器，用类似的方法处理。

通过以上分析，已经看到了伴随分析法的优越性，剩下的问题就是如何方便地构造伴随系统。通常构造伴随系统的方法有三种。

① 状态空间法：当系统方程以状态空间的形式给出时，可直接根据伴随系统定义求解。

② 半分析法：它用状态空间法确定系统矩阵的伴随阵，然后把这个矩阵转化成系统方框图进行计算机仿真。

③ 系统方框图构造规则法：在已经得到原系统方框图的情况下，可以通过一组构造规则将原系统的方框图转换为图 12.41 所示伴随系统的方框图。构造规则如下：

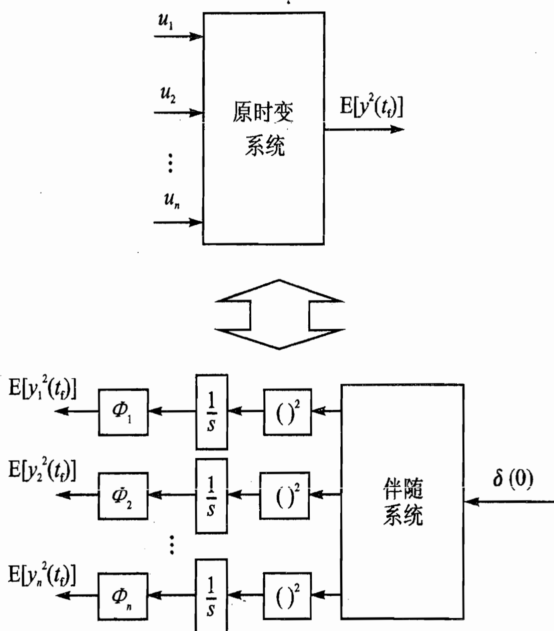


图 12.41　随机输入的伴随解

- 把所有系统输入转化成脉冲或白噪声的等效形式。
- 颠倒所有信号流动方向。
- 把所有系统输入变成伴随系统的输出，输出则变成输入。
- 把所有综合点变成引出线，所有引出线变成综合点。
- 把所有时变元素中的时间 t 用伴随系统时间 t^* 代替，这里 $t^*=t_f-t$。
- 把原系统的输出变成一输入综合点，并提供一脉冲信号。
- 在伴随系统所有的随机输出点后面求伴随解序列，即求系统脉冲响应的均方值。

对于简单的系统，利用这套变换规则构造伴随系统相当方便；对于比较复杂的系统，也可



以通过编制程序，自动生成伴随系统方框图。

例如，对于10.5.3节中的例子，运用伴随系统构造规则，可以得如图12.42所示的伴随系统。注意，为了不致在仿真开始时出现除零错误，在伴随时间上加上了一个小量。

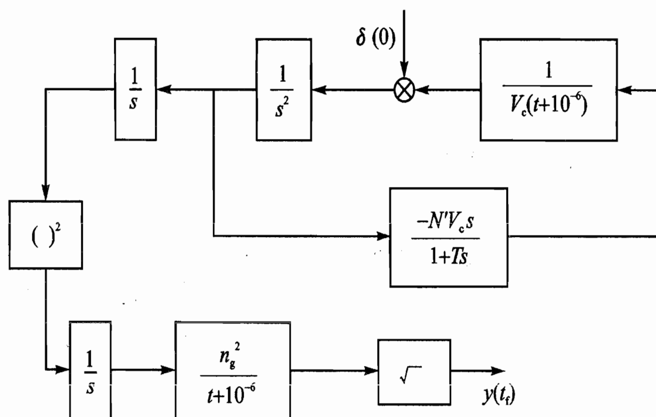


图 12.42　导引回路的伴随系统

通过仿真，可以得到不同飞行时间下，起始时间均匀分布的目标常值机动对最终脱靶量的影响，如图12.43所示。

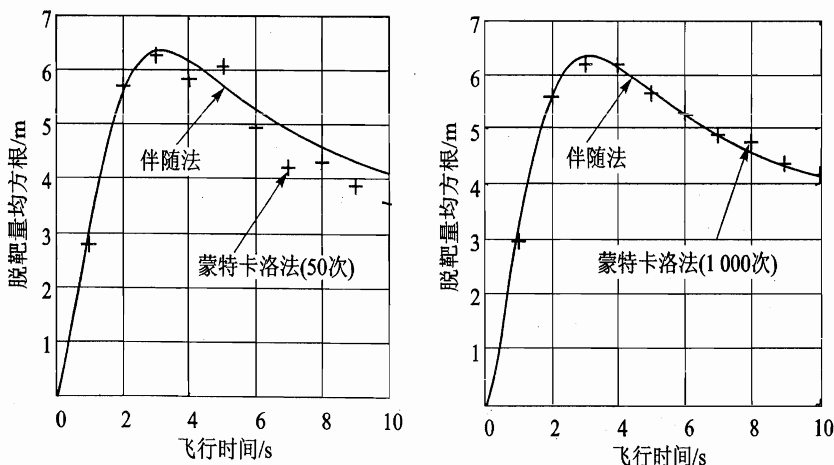


图 12.43　蒙特卡洛法与伴随法结果对比

从图12.43中的结果可以看出，伴随法所得的结果与蒙特卡洛法所得的结果基本一致。蒙特卡洛法的计算次数越多，其结果与伴随法越接近。在计算时间上，伴随法只需0.08 s；而蒙特卡洛法要得到较好的结果，比如计算1 000次，计算时间则在上百秒的量级了。



12.5.6 统计线性化伴随法

协方差分析法和伴随法都只能用于线性系统，对于非线性系统，必须作特殊处理。一般的思想是进行线性化，而在导弹控制系统中常见的非线性关系式，如饱和、阶跃等非线性特性，用通常的泰勒级数展开是无法线性化的，必须通过统计线性化来处理。统计线性化是一种拟线性化方法，它是根据随机量的概率密度函数形式，在较大范围内用一个线性函数来逼近非线性关系式，使得一大批不能用通常方法进行线性化的非线性关系式有了线性化的可能。将协方差分析法与统计线性化相结合，通常称为协方差描述函数法(CADET)，可以对非线性系统进行协方差分析。将协方差描述函数法与伴随法相结合，就是统计线性化伴随法(Statistical Linearization Adjoint Method，SLAM)。

对于导弹控制系统中常见的非线性环节，在进行统计线性化时，可以用一个等效增益来代替，增益的大小取决于非线性环节的输入信号的假设形式。假设非线性环节是输入为 $x(t)$、输出为 $y(t)$，$x(t)$的零均值随机过程。$y(t)$与等效增益输出 $y_{eq}(t)$之差定义为误差信号 $e(t)$，则有

$$e(t) = y(t) - y_{eq}(t) = y(t) - K_{eq}x(t) \tag{12.117}$$

由最小二乘法可知，要使误差最小，必须使其均方值最小，即

$$\overline{e^2} = \overline{y^2} - 2K_{eq}\,\overline{xy} + K_{eq}^2\,\overline{x^2} \tag{12.118}$$

令$\overline{e^2}$导数为零，即可得出 K_{eq}，即

$$\frac{\partial\,\overline{e^2}}{\partial K_{eq}} = -2\,\overline{xy} + 2K_{eq}\,\overline{x^2} = 0 \Rightarrow K_{eq} = \frac{\overline{xy}}{\overline{x^2}} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xyp(x)\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)\mathrm{d}x} \tag{12.119}$$

式中 $p(x)$为概率密度函数。

若输入信号是零均值的高斯随机过程，则其概率密度函数如下：

$$p(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}} \tag{12.120}$$

式中 σ_x 为 $x(t)$的均方根值。根据上式，则等效增益成为

$$K_{eq} = \frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} xy\,\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{12.121}$$

例如导弹控制系统中常见的饱和模块，其模型如图 12.44所示，表示导弹过载能力的限制。

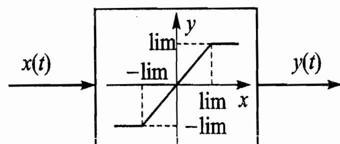


图 12.44 限幅器模型

那么它的等效增益为



$$K_{\mathrm{eq}}=\frac{-\lim}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\lim}x\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}}\mathrm{d}x+$$

$$\frac{1}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}}\int_{-\lim}^{\lim}x^2\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}}\mathrm{d}x+\frac{\lim}{\sigma_x^3\sqrt{2\pi}}\int_{\lim}^{\infty}x\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\lim}^{\lim}\mathrm{e}^{\frac{-x^2}{2\sigma_x^2}}\mathrm{d}x \tag{12.122}$$

上式可以近似展开为

$$K_{\mathrm{eq}}=1-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{\frac{-\lim^2}{2\sigma_x^2}}\times[0.436\,183\,6\omega-0.120\,167\,6\omega^2+0.937\,298\,\omega^3] \tag{12.123}$$

式中

$$\omega=\frac{1}{1+(0.332\,67\times\lim)/\sigma_x}$$

可以看出，等效增益的描述函数只与其输入信号均方根 σ_x 值有关，而这个值可以从系统的协方差传播矩阵中得到。

仍以 12.5.4 节的系统为例，在其中加入一个饱和环节，得回路如图 12.45 所示。

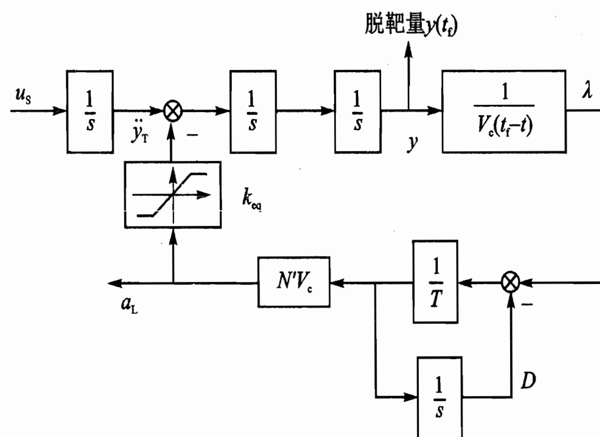


图 12.45　加入过载限制的导引回路图

系统动态矩阵变为

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ \dfrac{-k_{\mathrm{eq}}N'}{T(t_f-t)} & 0 & 1 & \dfrac{k_{\mathrm{eq}}N'V_c}{T}\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \dfrac{1}{TV_c(t_f-1)} & 0 & 0 & \dfrac{-1}{T}\end{bmatrix} \tag{12.124}$$

除此之外，其他方程均无变化，饱和环节（限幅器）的输入信号为



$$a_L = \frac{N'V_c}{T}\left[\frac{y}{V_c(t_f - t)} - D\right] = Ax \tag{12.125}$$

式中

$$A = \left[\frac{N'}{T(t_f - t)} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{N'V_C}{T}\right]$$

所以饱和环节的输入信号方差为

$$\sigma_{a_L}^2 = E[a_L a_L^T] = AXA^T$$

可直接由协方差矩阵求出。

图 12.46 是加入饱和环节后的均方根弹道图，过载限制为 25，其他参数与 12.5.4 节同。与图 12.36 对比，可以发现最终脱靶量比未加入饱和环节的要大。这是由于饱和环节限制了加速度的大小(这在实际中由导弹的极限过载决定)，使导弹的追踪能力降低。

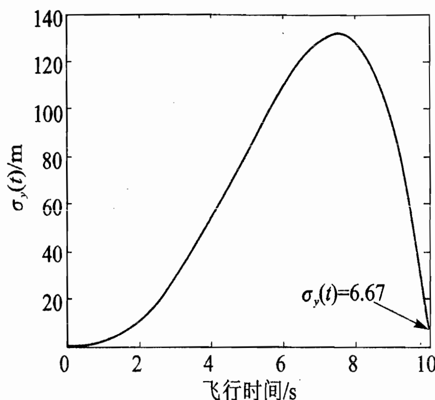


图 12.46 加入过载限制后的计算结果

这时的指令加速度均方根值以及饱和环节的等效增益图分别如图 12.47 和图 12.48 所示。指令加速度的均方根在导弹接近目标的末端急速上升，导弹所能提供的加速度在指令中所占部分也急速下降，表现为等效增益 K_{eq} 的值迅速减小到零。

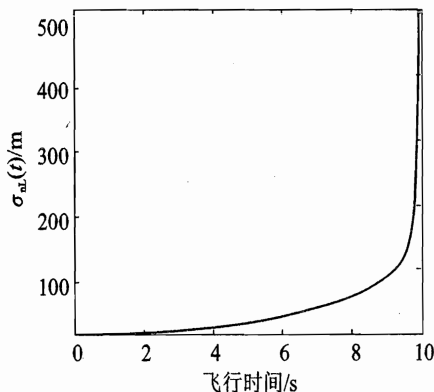


图 12.47 指令加速度均方值

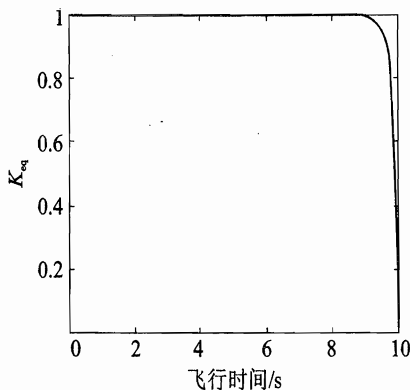


图 12.48 限幅器等效增益

上面的过程即协方差描述函数法(CADET)，利用得到的非线性环节的等效增益，即可进行 SLAM 分析，把得到的等效增益存储成为时间的函数，在生成伴随系统时将相应增益的时间 t 也应替换为 $t_f - t$。然后对生成的伴随系统仿真，即可得到结果。

图 12.49 是在不同过载限制时的脱靶量分析图。可以看出，过载能力的限制会显著增加



导弹的脱靶量，因此，在导弹设计过程中必须尽量增大可用过载。

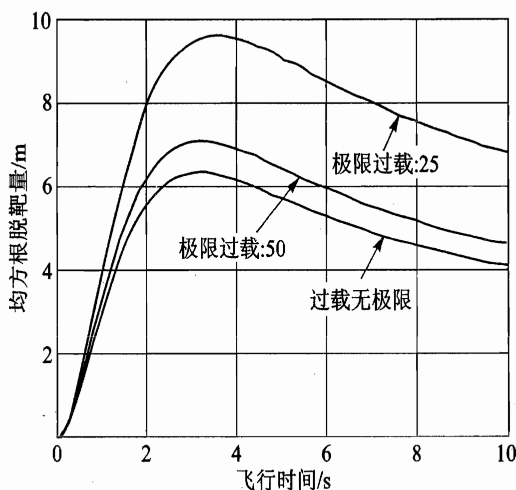


图 12.49　SLAM 法求解过载限制对脱靶量的影响

复习思考题

12.1　试说明稳定回路的作用。

12.2　试叙述整个导弹控制导引系统工作过程以及如何实现跟踪并击中目标。

12.3　试说明阻尼回路的构成和作用。

12.4　试推导 12.3 节中所用弹体的两个传递函数$\frac{q}{\delta_e}(s)$和$\frac{n_z}{\delta_e}(s)$的表达式(以动力学方程中的系数符号 $a_{ij}b_{ij}$ 等表示)。

12.5　试用 12.5.3 节例中的条件，在最简单的控制回路结构基础上考虑单时间常数的飞控系统$\left(\frac{1}{s+1}\right)$，用 Simullink 搭出导弹的控制回路，并给出相对距离坐标 y 以及导弹法向加速度的仿真结果曲线，并与例的结果加以分析比较。

参考文献

[1] 埃特肯 B.大气飞行动力学.何植岱,范立钦,许佩扬,等译.北京:科学出版社,1979.

[2] 胡兆丰,何植岱,高浩,等.飞行动力学——飞机的稳定性和操纵性.北京:国防工业出版社,1985.

[3] 周慧钟,李忠应,王谨玖,等.有翼导弹飞行动力学(上、下册).航空专业教材编审组,1983.

[4] 吕学富,陆毓峰,霍秀芳,等.飞行器飞行动力学.西安:西北工业大学出版社,1995.

[5] 熊海泉,刘昶,郑本武,等.飞机飞行动力学.北京:航空工业出版社,1990.

[6] 哈佛尔 X,萨克斯 G,等.现代飞机设计中的飞行力学原理.祝存清,译.西安:飞行力学杂志社,1985.

[7] 比施根斯 Γ C 主编.超音速飞机空气动力学和操纵性稳定性.沈阳飞机设计研究所,1999.

[8] Etkin B, Reid L D. Dynamics of Flight: Stability and Control. 3rd ed. New York: Wiley, 1996.

[9] Pamadi B N. Performance, Stability, Dynamics and Control of Airplanes. Reston. VA: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998.

[10] Lan C E. High Angle of Attach Aerodynamics, Stability and Control. Kansas University, 1998.

[11] Cook M V. Flight Dynamics Principles. London: Amold,1997.

[12] 张明廉主编.飞行控制系统.北京:航空工业出版社,1994.

[13] 宋翔贵,张新国,等.电传飞行控制系统.北京:国防工业出版社,2003.

[14] Mclean D. Automatic Flight Control Systems. Prentice Hall, 1990.

[15] Nelson R C. Flight Stability and Automatic Control. 2nd ed. Boston, Mass: WCB/McGraw Hill, 1998.

[16] 方振平.带自动器飞机飞行动力学.北京:国防工业出版社,1999.

[17] ГуськовГ Ю П. Запайнов И. Управление Полётом Самолётов. Машиностроение, 1991.

[18] Сурин В П. Устойцивость и Управляемость Самолёта В Пространственном Движеним. Московокнй: Авиачионный Институт, 1999.

[19] Paul Z. Tactical and Strategic Missile Guidance. Washington, DC: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1990.

[20] 约翰 H. 布莱克劳克主编.飞机和导弹的自动控制.北京:国防工业出版社,1979.

[21] 赵善友主编.防空导弹武器寻的制导控制系统设计.北京:宇航出版社,1992.

[22] 彭寇一主编.防空导弹武器制导控制系统设计.北京:宇航出版社,1996.

[23] Steven B L, Lewis F L. Aircraft Control and Simulation. New York: Wiley,1992.

[24] Hodgkinson J. Aircraft Handling Qualities. Oxford Blackwell Science,1999.

[25] Anon. Flying Qualities of Piloted Aircraft. MIL-HDBK-1797, 1997.